❹ Metode de identificare şi validare

❹.❾ Metode adaptive de identificare

MCMMP-R – variante cu fereastră: MCMMP-R□ (continuare)

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - \mathbf{P}_k \varphi[k-M]\left(y[k-M] - \varphi^T[k-M]\hat{\theta}_{k-1}\right) + \mathbf{P}_k \varphi[k]\left(y[k] - \varphi^T[k]\hat{\theta}_{k-1}\right) \quad \forall k \geq M+1$$

- De asemenea, erorile de predicție sunt ponderate de **două cîştiguri de senzitivitate**:

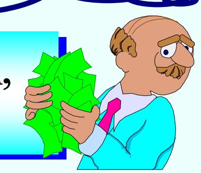
$$\gamma_{b,k-M} \overset{def}{=} \mathbf{P}_k \varphi[k-M]$$ ➔ Cîştig de senzitivitate **a priori**.

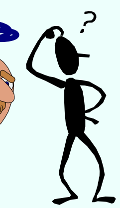
$$\gamma_{f,k} \overset{def}{=} \mathbf{P}_k \varphi[k]$$ ➔ Cîştig de senzitivitate **a posteriori**.

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - \gamma_{b,k-M}\varepsilon_b[k-M] + \gamma_{f,k}\varepsilon_f[k] \quad \forall k \geq M+1$$

Cum poate fi optimizată relația recursivă?

Prin aplicarea succesivă, **de două ori**, a lemei de inversare matricială.





$$\mathbf{P}_k^{-1} = \underbrace{\mathbf{P}_{k-1}^{-1} - \varphi[k-M]\varphi^T[k-M]}_{\mathbf{P}_{b,k-M}^{-1}} + \varphi[k]\varphi^T[k] \quad \forall k \geq M+1$$

$\mathbf{P}_{b,k-M}^{-1}$ (notație naturală)

☝ Acelaşi rezultat se obține plecînd de la: $\mathbf{P}_{f,k}^{-1} \overset{def}{=} \mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \varphi[k]\varphi^T[k]$

① **Lema 1**

$$\mathbf{P}_{b,k-M} \overset{def}{=} \left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1} - \varphi[k-M]\varphi^T[k-M]\right)^{-1} = \mathbf{P}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k-M]\varphi^T[k-M]\mathbf{P}_{k-1}}{1 - \varphi^T[k-M]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k-M]} \quad \forall k \geq M+1$$

② **Lema 1**

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{P}_{b,k-M}^{-1} + \varphi[k]\varphi^T[k]\right)^{-1} = \mathbf{P}_{b,k-M} - \frac{\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}}{1 + \varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]} \quad \forall k \geq M+1$$

MCMMP-R – variante cu fereastră: MCMMP-R□ (continuare)

Mai mult

se aduce la acelaşi numitor

$$\gamma_{f,k} \overset{def}{=} \mathbf{P}_k \varphi[k] = \mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k] - \frac{\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]} =$$

Lema 1

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{b,k-M} - \frac{\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]}$$

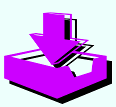
$$= \frac{\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k] + \cancel{\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]} - \cancel{\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]}}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]}\ , \quad \forall k \geq M+1.$$

☝ Pentru cel de-al doilea cîştig, ar trebui evaluată:

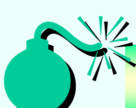
$$\mathbf{P}_{f,k} \overset{def}{=} \left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \varphi[k]\varphi^T[k]\right)^{-1}$$

Algoritmul adaptiv al Celor Mai Mici Pătrate cu fereastră dreptunghiulară



Date de intrare

- $M \geq 1$ (deschiderea ferestrei dreptunghiulare)
- $\mathcal{D}_M = \{\varphi[n]\}_{n\in\overline{1,M}} \cup \{y[n]\}_{n\in\overline{1,M}}$ (un set de date măsurate a priori pe durata ferestrei)
- $n\theta$ (indicele structural al modelului de identificare)

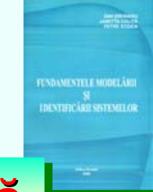


Iniţializare

- MCMMP off-line

$$\hat{\theta}_M = \boxed{\left(\sum_{n=1}^{M}\varphi[n]\varphi^T[n]\right)^{-1}} \left(\sum_{n=1}^{M}\varphi[n]y[n]\right) \quad \rightarrow \mathbf{P}_M$$

- $k=0$ ➔ indicele iterativ iniţial



Algoritmul adaptiv al Celor Mai Mici Pătrate cu fereastră dreptunghiulară (continuare)

Buclă iterativă

Pentru $k \geq M+1$

① Se evaluează erorile de predicție curente:

$$\varepsilon_b[k-M] = y[k-M] - \varphi^T[k-M]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \quad \text{(a priori)}$$

$$\varepsilon_f[k] = y[k] - \varphi^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \quad \text{(a posteriori)}$$

② Se evaluează vectorul auxiliar: $\xi_k = \mathbf{P}_{k-1}\varphi[k-M]$

③ Se evaluează matricea: $\mathbf{P}_{b,k-M} = \mathbf{P}_{k-1} + \dfrac{\xi_k \xi_k^T}{1-\varphi^T[k-M]\xi_k}$

④ Se reactualizează vectorul auxiliar: $\xi_k = \mathbf{P}_{b,k-M}\varphi[k]$

⑤ Se evaluează cîştigul de senzitivitate a posteriori: $\gamma_{f,k} = \dfrac{\xi_k}{1+\varphi^T[k]\xi_k}$

⑥ Se reactualizează matricea de auto-covarianță a erorii de estimare: $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{b,k-M} - \gamma_{f,k}\,\xi_k^T$

⑦ Se evaluează cîştigul de senzitivitate a priori: $\gamma_{b,k-M} = \mathbf{P}_k\varphi[k-M]$

⑧ Se reactualizează vectorul parametrilor estimați: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} - \gamma_{b,k-M}\,\varepsilon_f[k-M] + \gamma_{f,k}\,\varepsilon_f[k]$

⑨ Se incrementează indicele curent: $k \leftarrow k+1$

Exercițiu **MVI-R☐**

(deducerea relațiilor recursive, algoritmul eficient, inițializare)

Date de ieşire $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ⇒ Parametrii modelului reactualizați la fiecare pas de adaptare.

☝ Complexitatea algoritmului este ridicată.

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (MCMMPQR-R)

- Exploatarea MCMMP în unele aplicații necesită o mare stabilitate numerică.

Ori

$$\mathbf{R} \overset{def}{=} \mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi} = \left[\varphi[1] \mid \varphi[2] \mid \cdots \mid \varphi[N]\right]\begin{bmatrix}\varphi^T[1] \\ \hline \varphi^T[2] \\ \hline \vdots \\ \hline \varphi^T[N]\end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{N}\varphi[n]\varphi^T[n] \in \mathbb{R}^{n\theta\times n\theta}$$

☝ Care se inversează.

☹ Este dezechilibrată numeric.

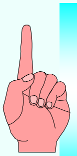
Raportul dintre valorile singulare maximă şi minimă este prea mare.

Numărul de condiționare numerică

$$\nu(\mathbf{\Phi}) \overset{def}{=} \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

Valorile singulare ale unei matrici A

Valorile proprii ale matricii $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.



Dezechilibrarea numerică a unei matrici inversabile conduce la erori numerice importante ale inversei (şi chiar la imposibilitatea evaluării acesteia pe un mijloc automat de calcul).

Exemplu

Matricea modelului polinomial al datelor de ieşire

$$y[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_p n^p + \varepsilon[n, a_0, \ldots, a_p]$$

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} N & \frac{N(N+1)}{2} & \cdots & \sum_{n=1}^{N} n^p \\ \frac{N(N+1)}{2} & \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} & \cdots & \sum_{n=1}^{N} n^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{N} n^p & \sum_{n=1}^{N} n^{p+1} & \cdots & \sum_{n=1}^{N} n^{2p} \end{bmatrix}$$

$$\sim N^{2p+1} \gg N$$

☝ Valorile singulare ale matricii Φ sunt valorile proprii ale matricii **R**.

Exercițiu

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

De regulă, matricile dezechilibrate numeric pot fi inversate după aplicarea unei **tehnici de balansare** (din domeniul **Metodelor Numerice**).

Exemplul precedent | Matricea modelului polinomial al datelor de ieşire

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} N & \dfrac{N(N+1)}{2} & \cdots & \sum_{n=1}^{N} n^p \\ \dfrac{N(N+1)}{2} & \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} & \cdots & \sum_{n=1}^{N} n^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{N} n^p & \sum_{n=1}^{N} n^{p+1} & \cdots & \sum_{n=1}^{N} n^{2p} \end{bmatrix}$$

- În loc să se inverseze această matrice, se inversează matricea **balansată** (**echilibrată numeric**):

$$\mathbf{B}_N \mathbf{R}_N \boxed{\mathbf{B}_N}$$

balancing matrix

$$\mathbf{B}_N \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{N}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{N\sqrt{N}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{N^p\sqrt{N}} \end{bmatrix}$$

☝ Matrice diagonală.

Exerciţiu de simulare

- Folosind mediul de simulare **MATLAB**, evaluaţi inversele celor două matrici din exemplu (nebalansată şi balansată) pentru cîteva valori ale gradului polinomului modelului, apoi verificaţi corectitudinea rezultatelor şi evaluaţi numerele de condiţionare numerică prin apelarea funcţiei de bilbiotecă numită **cond**.

Prin echilibrare numerică, **rezultatul final nu se modifică.**

$$\mathbf{R}_N^{-1} = \mathbf{B}_N \left(\mathbf{B}_N \mathbf{R}_N \mathbf{B}_N\right)^{-1} \mathbf{B}_N$$

☝ Matricea de balansare nu trebuie inversată.

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

Cele mai "bune" matrici pentru inversare au numărul de condiționare numerică **unitar**.

- Cu cît numărul de condiționare numerică este mai mare, cu atît matricea este mai dezechilibrată numeric, iar inversa este mai eronată, în absența unei tehnici de balansare.

☹ În general, construcţia unei matrici de balansare nu este simplă.

Pentru matricile simetrice (strict) pozitiv definite dezechilibrate numeric (cum este $\mathbf{R}_N$), o tehnică de balansare se bazează pe **descompunerea QR a acestora**, cu ajutorul **matricilor de rotaţie** (care au numărul de condiţionare numerică unitar).

Proprietăţi remarcabile din Teoria Matricilor

➔ Triangularizarea unei matrici monice

$$\mathbf{Q}\,\underset{m}{\overset{n}{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

matrice superior triunghiulară

matrice ortogonală

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_m$$

➔ Invarianţa normei euclidiene la transformări ortogonale

$$\left\|\mathbf{Q}\mathbf{v}\right\|^2 = \mathbf{v}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \left\|\mathbf{v}\right\|^2 \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

- Existenţa matricii ortogonale din prima proprietate se poate demonstra cu ajutorul unui raţionament constructiv, în care **matricile de rotaţie joacă rolul principal**.

Ideea de bază

Anularea succesivă a elementelor sub-diagonale ale matricii monice cu ajutorul **operatorilor Givens**.

Operator Givens ⇒ Matrice elementară de rotaţie.

Exemplu

$$\mathbf{G} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

unghi de rotaţie (α)

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❾ Metode adaptive de identificare

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

Exemplu Anularea elementului sub-diagonal al unei matrici de ordin 2

$$\mathbf{A} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{21} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{21} & \sin\alpha_{21} \\ -\sin\alpha_{21} & \cos\alpha_{21} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_{21} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11}^{21} & r_{12}^{21} \\ 0 & r_{22}^{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{21}} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\cos\alpha_{21} + a_{21}\sin\alpha_{21} = r_{11}^{21} \\ a_{12}\cos\alpha_{21} + a_{22}\sin\alpha_{21} = r_{12}^{21} \\ \boxed{a_{21}\cos\alpha_{21} - a_{11}\sin\alpha_{21} = 0} \\ a_{22}\cos\alpha_{21} - a_{12}\sin\alpha_{21} = r_{22}^{21} \end{cases}$$

$$\alpha_{21} = \operatorname{atan2}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$$

- Ecuaţia care conduce la determinarea unghiului de rotaţie aferent este a treia.
- Celelalte ecuaţii oferă valorile matricii triunghiulare rezultate.
- Calculul se simplifică, prin determinarea directă a elementelor operatorului Givens.

$$\mathbf{G}_{21} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{21} & \sin\alpha_{21} \\ -\sin\alpha_{21} & \cos\alpha_{21} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} c_{21} & s_{21} \\ -s_{21} & c_{21} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

☝ Se evită utilizarea funcţiilor trigonometrice.

notaţie preluată din Robotică

$$s_{ij} \overset{def}{=} \sin\alpha_{ij} \qquad c_{ij} \overset{def}{=} \cos\alpha_{ij}$$

- În cazul unei matrici monice oarecare, operatorul Givens care anulează primul element sub-diagonal se obţine din $\mathbf{G}_{21}$ prin extinderea cu matricea unitate, fără a recalcula elementele acestuia.

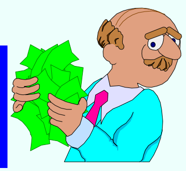
$$\mathbf{G}_2 \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{21} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-2} \end{array}\right]$$

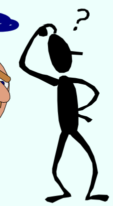
❹ Metode de identificare şi validare

❹.❾ Metode adaptive de identificare

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

Cum se pot anula primele 2 elemente ale lui $\mathbf{A}_2$?





Aşadar

$$\mathbf{G}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{R}_2} \\ -- \\ \boxed{\mathbf{A}_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_2 \rightarrow [\mathbf{R}_{21} \;\; \mathbf{B}_2]$$

☝ Epică.

$\mathbf{A}_2$: ultimele m-2 linii ale matricii A

Prin intermediul a 2 operatori Givens, a căror topologie este determinată de poziţiile celor 2 elemente.

$$\mathbf{G}_{31} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} c_{31} & 0 & s_{31} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{31} & 0 & c_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(r_{11}^{21}\right)^2 + a_{31}^2}} \begin{bmatrix} r_{11}^{21} & 0 & a_{31} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & 0 & r_{11}^{21} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{G}_3^1 \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{31} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-3} \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{G}_3^1\left(\mathbf{G}_2\mathbf{A}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{31} \\ -- \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$$

Acesta trebuie acum anulat. ☞ r_{32}^{31}

☝ Elementul din poziţia 32 nu este neapărat nul şi nici egal cu a_{32}.

$$\mathbf{G}_{32} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & s_{32} \\ 0 & -s_{32} & c_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(r_{22}^{31}\right)^2 + \left(r_{32}^{31}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}^{31} & r_{32}^{31} \\ 0 & -r_{32}^{31} & r_{22}^{31} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_3^2\mathbf{G}_3^1$$

$$\mathbf{G}_3^2 \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{32} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-3} \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{G}_3^2\left(\mathbf{G}_3^1\mathbf{G}_2\mathbf{A}\right) = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{R}_3} \\ -- \\ \boxed{\mathbf{A}_3} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_3$: epică, superior triunghiulară

$\mathbf{A}_3$: ultimele m-3 linii ale matricii A

Operatorul care anulează următoarele 2 elemente sub-diagonale ale matricii.

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

În general

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^{i-1}\cdots\boxed{\mathbf{G}_i^{j}}\cdots\mathbf{G}_i^{2}\mathbf{G}_i^{1}$$

$\forall i \in \overline{2,m}$

Anulează elementele sub-diagonale ale matricii originale, de pe linia ***i***.

Operator Givens compozit

$$\mathbf{G}_i^j \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|cccccc|c} \mathbf{I}_{j-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & c_{ij} & 0 & \cdots & 0 & s_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -s_{ij} & 0 & \cdots & 0 & c_{ij} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{i-1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \textbf{poziţia } j \\ \\ \\ \\ \leftarrow \textbf{poziţia } i \\ \\ \end{array} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$\forall\, j \in \overline{1,i-1}$

Operatorul ortogonal de triangularizare

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}_m\mathbf{G}_{m-1}\cdots\mathbf{G}_3\mathbf{G}_2$$

☝ Ortogonal, deoarece este format dintr-un produs de matrici de rotaţie elementare.

Mai mult

Acest operator Givens elementar modifică doar liniile ***i*** şi ***j*** ale matricii originale.

$$\begin{cases} \mathrm{lin}_i\left(\mathbf{G}_i^j\mathbf{A}\right) = c_{ij}\,\mathrm{lin}_i(\mathbf{A}) - s_{ij}\,\mathrm{lin}_j(\mathbf{A}) \\ \mathrm{lin}_j\left(\mathbf{G}_i^j\mathbf{A}\right) = c_{ij}\,\mathrm{lin}_j(\mathbf{A}) + s_{ij}\,\mathrm{lin}_i(\mathbf{A}) \end{cases}$$

Exerciţiu

- Să se determine numărul de operatori Givens elementari care formează operatorul ortogonal de triangularizare.

Aşadar

$$\mathbf{G}_m\mathbf{G}_{m-1}\cdots\mathbf{G}_3\mathbf{G}_2\mathbf{A} = \boxed{\mathbf{R}}$$

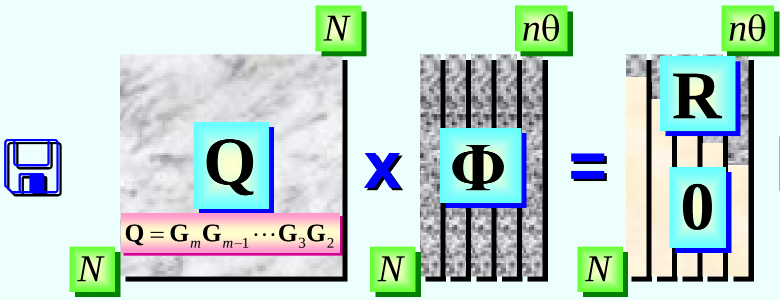
monică, superior triunghiulară

☝ Elementele deja anulate rămân nule şi după aplicarea oricărui operator Givens elementar.

❹.❾ Metode adaptive de identificare

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

- Folosind **descompunerea QR a matricii regresorilor**, criteriul pătratic din contextul modelelor de regresie liniară poate fi minimizat printr-o tehnică specială, **stabilă din punct de vedere numeric**.



invarianța normei euclidiene la transformări ortogonale

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \left\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\right\|^2 = \left\|\mathbf{Y}-\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}\right\|^2 = \left\|\mathbf{Q}(\mathbf{Y}-\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta})\right\|^2$$

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) = \left\|\boxed{\mathbf{QY}} - \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\right\|^2$$

$$\mathbf{QY} = \begin{bmatrix}\mathbf{r}^1 \in \mathbb{R}^{n\theta}\\ \mathbf{r}^2 \in \mathbb{R}^{N-n\theta}\end{bmatrix}$$

Minimizarea constă în **anularea primului termen**.

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) = \left\|\begin{bmatrix}\mathbf{r}^1\\ \mathbf{r}^2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\right\|^2 = \underbrace{\left\|\mathbf{r}^1-\mathbf{R}\boldsymbol{\theta}\right\|^2}_{0} + \left\|\mathbf{r}^2\right\|^2$$

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}^1 \qquad\qquad \left\|\mathbf{r}^2\right\|^2 = \gamma_N\hat{\lambda}^2$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1(n\theta-1)} & r_{1n\theta}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & r_{(n\theta-1)(n\theta-1)} & r_{(n\theta-1)n\theta}\\ 0 & \cdots & 0 & r_{n\theta n\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\theta}_1\\ \vdots\\ \hat{\theta}_{n\theta-1}\\ \hat{\theta}_{n\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_1^1\\ \vdots\\ r_{n\theta-1}^1\\ r_{n\theta}^1\end{bmatrix}$$

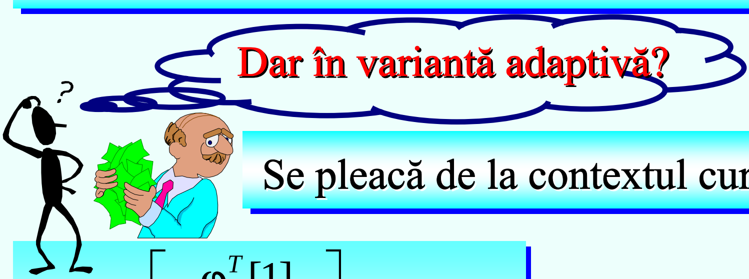
☝ Sistem compatibil şi determinat, care se poate rezolva prin procedeul **substituției înapoi** (sau al "exfolierii").

☝ Segmentare sugerată de forma operatorului aplicat lui θ.

$$\hat{\theta}_{n\theta} = \frac{r_{n\theta}^1}{r_{n\theta n\theta}}, \quad \hat{\theta}_{n\theta-1} = \frac{r_{n\theta-1}^1 - r_{(n\theta-1)n\theta}\hat{\theta}_{n\theta}}{r_{(n\theta-1)(n\theta-1)}} \quad \cdots \quad \hat{\theta}_1 = \frac{r_1^1 - r_{12}\hat{\theta}_2 - \cdots - r_{1n\theta}\hat{\theta}_{n\theta}}{r_{11}}$$

$$O \sim n\theta^2$$

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)



Se pleacă de la contextul curent definit pentru pasul k-1≥$n\theta$.

$$\Phi_{k-1} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \varphi^T[1] \\ \hline \varphi^T[2] \\ \hline \vdots \\ \hline \varphi^T[k-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times n\theta}$$

➔ Matricea curentă a regresorilor.

$$\boxed{\mathbf{Q}_{k-1}}\Phi_{k-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{R}_{k-1}} \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}_{k-1} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$, $\mathbf{R}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n\theta\times n\theta}$

➔ Descompunerea QR a matricii curente a regresorilor.

$\mathbf{Y}_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-1}$ ➔ Vectorul curent al datelor de ieşire măsurate.

$$\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{Y}_{k-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{r}^1_{k-1}} \\ \hline \boxed{\mathbf{r}^2_{k-1}} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{r}^1_{k-1} \in \mathbb{R}^{n\theta}$, $\mathbf{r}^2_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-n\theta-1}$

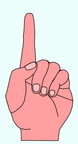
➔ Segmentarea curentă, în vederea minimizării.

$\hat{\theta}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n\theta}$ ➔ Vectorul curent al parametrilor estimaţi.

$\hat{\lambda}^2_{k-1}$ ➔ Dispersia curent estimată a zgomotului alb.

- La pasul următor se adaugă datele: $y[k]$ $\varphi[k]$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1} \\ \hline \varphi^T[k] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k-1} \\ \hline y[k] \end{bmatrix}$$



Relaţii recurente evidente.

Obiectiv

Reactualizarea descompunerii QR, a vectorului parametrilor necunoscuţi şi a dispersiei zgomotului alb, prin conservarea efortului de calcul de la pasul curent.

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

Reactualizarea descompunerii QR se bazează pe **matricea $\mathbf{Q}_{k-1}$ bordată.**

$$\mathbf{Q}_k^{k-1} \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

$$\mathbf{Q}_k^{k-1}\mathbf{\Phi}_k = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{\Phi}_{k-1} \\ \hline \boldsymbol{\varphi}^T[k] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Phi}_{k-1} \\ \hline \boldsymbol{\varphi}^T[k] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{R}_{k-1} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \boxed{\cancel{\boldsymbol{\varphi}^T[k]}} \end{array}\right]$$

☝ O mare parte a efectului dorit fiind realizată, doar ultima linie mai trebuie anulată.

Colecție de $n\theta$ operatori Givens elementari.

$$\mathbf{G}_k^j \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{I}_{j-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & c_{kj} & 0 & \cdots & 0 & s_{kj} \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -s_{kj} & 0 & \cdots & 0 & c_{kj} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

← poziția j (variabilă) $\forall\, j \in \overline{1,n\theta}$

← poziția k (constantă)

$$s_{kj} = \frac{\varphi_j[k]}{\sqrt{\left(r_{jj}^{k-1}\right)^2 + \varphi_j^2[k]}}$$

$$c_{kj} = \frac{r_{jj}^{k-1}}{\sqrt{\left(r_{jj}^{k-1}\right)^2 + \varphi_j^2[k]}}$$

$\forall\, j \in \overline{1,n\theta}$

Rezultă

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{G}_k^1\mathbf{G}_k^2\cdots\mathbf{G}_k^{n\theta-1}\mathbf{G}_k^{n\theta}\mathbf{Q}_k^{k-1} = $$
$$= \mathbf{G}_k^1\mathbf{G}_k^2\cdots\mathbf{G}_k^{n\theta-1}\mathbf{G}_k^{n\theta}\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{R}_k \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline 0 \end{array}\right] = \mathbf{G}_k^1\mathbf{G}_k^2\cdots\mathbf{G}_k^{n\theta-1}\mathbf{G}_k^{n\theta}\left[\begin{array}{c} \mathbf{R}_{k-1} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{\varphi}^T[k] \end{array}\right]$$

☝ Descompunerea QR reactualizată.

❹.❾ Metode adaptive de identificare

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

Reactualizarea vectorilor liberi se bazează pe recurența din descompunerea QR.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k^1 \\ \hline \mathbf{r}_k^2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Y}_k = \mathbf{G}_k^1 \mathbf{G}_k^2 \cdots \mathbf{G}_k^{n\theta-1} \mathbf{G}_k^{n\theta} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k-1} \\ \hline y[k] \end{bmatrix} = \mathbf{G}_k^1 \mathbf{G}_k^2 \cdots \mathbf{G}_k^{n\theta-1} \mathbf{G}_k^{n\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{k-1}^1 \\ \hdashline \mathbf{r}_{k-1}^2 \\ \hline y[k] \end{bmatrix}$$

☝ Uneori, nu este necesară determinarea vectorilor parametrilor la fiecare pas de reactualizare.

Altfel $\hat{\theta}_k = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{r}_k^1$ Nu prin inversare, ci prin exfoliere.

Algoritmul adaptiv al Celor Mai Mici Pătrate cu descompunere QR

Date de intrare
- $n\theta$ (indicele structural al modelului de identificare)
- $\mathcal{D}_M = \{\varphi[n]\}_{n\in\overline{1,n\theta}} \cup \{y[n]\}_{n\in\overline{1,n\theta}}$ (un set de date măsurate a priori)

☝ Dimensiune egală cu indicele structural.

Inițializare
- $\mathbf{Q}_{n\theta} \mathbf{\Phi}_{n\theta} = \mathbf{R}_{n\theta} \in \mathbb{R}^{n\theta\times n\theta}$ ➔ descompunere QR off-line
- $\mathbf{r}_{n\theta}^1 = \mathbf{Q}_{n\theta} \mathbf{Y}_{n\theta} \in \mathbb{R}^{n\theta}$ $\mathbf{r}_{n\theta}^2 = [\,] \in \mathbb{R}^0$ ➔ vectorii liberi inițiali (al doilea – vid)
- $\hat{\theta}_{n\theta} = \mathbf{R}_{n\theta}^{-1} \mathbf{r}_{n\theta}^1$ ➔ vectorul inițial al parametrilor (prin exfoliere)
- $\hat{\lambda}_{n\theta}^2 = 0$ ➔ dispersia inițială a zgomotului
- $k = n\theta$ ➔ indicele iterativ inițial

MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (continuare)

Algoritmul adaptiv al Celor Mai Mici Pătrate cu descompunere QR (continuare)

Buclă iterativă

Pentru $k \geq n\theta + 1$

① Se evaluează operatorii Givens elementari:

$$\mathbf{G}_k^j \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{I}_{j-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & c_{kj} & 0 & \cdots & 0 & s_{kj} \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -s_{kj} & 0 & \cdots & 0 & c_{kj} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{k\times k}, \quad \forall\, j \in \overline{1, n\theta}$$

$$s_{kj} = \frac{\varphi_j[k]}{\sqrt{\left(r_{jj}^{k-1}\right)^2 + \varphi_j^2[k]}} \qquad c_{kj} = \frac{r_{jj}^{k-1}}{\sqrt{\left(r_{jj}^{k-1}\right)^2 + \varphi_j^2[k]}}$$

② Se evaluează operatorul Givens global:

$$\mathbf{G}_k = \prod_{j=1}^{n\theta} \mathbf{G}_k^j$$

③ Se reactualizează operatorul ortogonal de triangularizare matricială:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{G}_k \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

④ Se reactualizează matricea triunghiulară şi vectorii liberi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_k \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_k \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{\varphi}^T[k] \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k^1 \\ \hline \mathbf{r}_k^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_k \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{k-1}^1 \\ \hline \mathbf{r}_{k-1}^2 \\ \hline y[k] \end{bmatrix}$$

☝ Algoritm extrem de stabil din punct de vedere numeric.

⑤ Se reactualizează vectorul parametrilor şi dispersia zgomotului:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{r}_k^1 \qquad \hat{\lambda}_k^2 = \frac{1}{\gamma_k}\left\|\mathbf{r}_k^2\right\|^2$$

$$\gamma_k \in \{N, N - n\theta\}$$

⑥ Se incrementează indicele curent: $k \leftarrow k+1$

Date de ieşire

$\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ⇨ Vectorii parametrilor modelului.

$\left\{\hat{\lambda}_k^2\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ⇨ Dispersiile zgomotului.