

# Sumar

## ✓ Bibliografie

## ✓ 0 Organizarea temelor de laborator

## ✓ 8 Modelarea și predicția seriilor de timp

### ✓ 8.1 Estimarea modelului polinomial al tendinței

### ☞ 8.2 Estimarea componentei sezoniere

### 8.3 Estimarea componentei nedeterministe (aleatoare)

### 8.4 Predicția seriei de timp

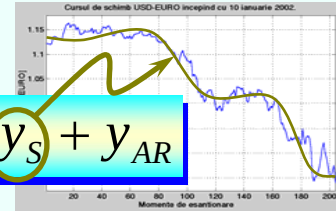
# Modelarea și predicția seriilor de timp

## 8.2 Estimarea componentei sezoniere

**Componentă sezonieră**

**Model determinist asociat fenomenului de repetabilitate relevat de seria de timp.**

$$y_M \equiv y_T + y_S + y_{AR}$$



coeficienți sezonieri (necunoscuți)

indice de perioadă  $k \in \mathbb{Z}$

prelungire prin periodicitate  
perioada modelului (necunoscută)

$$P \in \mathbb{N}^*$$

$$y_S = \dots \cup \{y_{S,1}^{k-1}, y_{S,2}^{k-1}, \dots, y_{S,p_{k-1}}^{k-1}\} \cup \{y_{S,1}^k, y_{S,2}^k, \dots, y_{S,p_k}^k\} \cup \dots$$

⚡ Nu neapărat o armonică elementară.

Cum se poate realiza prelungirea prin periodicitate?

**Eșantionare neuniformă**

Sunt necesare **interpolarea** și **re-eșantionarea** la momentele indicate de fiecare perioadă.

**Eșantionare uniformă**

Interpolare?

Natural, prin repetarea perioadei principale.

$$P = P_k \quad y_{S,p} = y_{S,p}^{k-1} = y_{S,p}^k$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall p \in \overline{1, P}$$

Există numeroase tehnici, dintre care două sunt preferate în acest context.

**Tabelă de interpolare**

nod de interpolare

|       |       |     |       |     |       |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| $t_1$ | $t_2$ | ... | $t_n$ | ... | $t_N$ |
| $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ | ... | $y_N$ |

momente de eșantionare  
(nu neapărat uniforme)  
eșantioane

$$y(t) = y_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} (y_n - y_{n-1}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**Interpolare liniară**

**Interpolare cu funcții spline cubice**

# 8 Modelarea și predicția seriilor de timp

## 8.2 Estimarea componentei sezoniere

Funcții spline?



Funcții **polinomiale pe porțiuni**. **Polinoamele** au grade egale, dar pot avea coeficienți diferiți între perechi diferite de momente de eșantionare.

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N-1} S_n$$

**Interpolatorul spline cubic**

Sumă de  $N-1$  polinoame de grad 3, determinate de tabela de interpolare.

$$S_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} a_{n,3}t^3 + a_{n,2}t^2 + a_{n,1}t + a_{n,0} \quad \begin{matrix} \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \forall n \in \overline{1, N-1} \end{matrix}$$

coeficienți necunoscuți (în număr de 4)

| $t_1$ | $t_2$ | ... | $t_n$ | ... | $t_N$ |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ | ... | $y_N$ |

Condiții generale care pot determina interpolatorul spline cubic

- ① Suportul fiecărui polinom din sumă este **inclus** în intervalul compact dintre două momente succesive de eșantionare.
- ② Interpolatorul trece prin nodurile de interpolare.
- ③ **Derivabilitatea** interpolatorului este cel puțin 1 și cel mult egală cu 3.

①  $Supp(S_n) \subseteq [t_n, t_{n+1}] \quad \forall n \in \overline{1, N-1}$

②  $S(t_k) = y_k \quad \forall k \in \overline{1, N}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S_k(t_k) = y_k \\ S_k(t_{k+1}) = y_{k+1} \end{cases} \quad \forall k \in \overline{1, N-1}$$

③  $S_k^{(i)}(t_{k+1}) = S_{k+1}^{(i)}(t_{k+1}) \quad \begin{matrix} \forall i \in \overline{1, 3} \\ \forall k \in \overline{2, N-1} \end{matrix}$

Polinoamele pot să coincidă **până la derivata a 3-a (inclusiv)** în nodurile interne.

|         |                                     |
|---------|-------------------------------------|
| $N = 2$ | 2 ecuații, 4 necunoscute            |
| $N = 3$ | 7 ecuații, 8 necunoscute            |
| $N = 4$ | 12 ecuații, 12 necunoscute          |
| $N > 4$ | mai multe ecuații decât necunoscute |

⚡ Ar trebui estimate derivatele de ordin 1.

⚡ Sistem linear cu  $5N-8$  ecuații și  $4N-4$  necunoscute.



8<sub>2</sub>-3



# 8 Modelarea și predicția seriilor de timp

## 8.2 Estimarea componentei sezoniere

Cum se determină practic interpolatorul spline cubic?

Numărul de ecuații trebuie să fie **egal** cu numărul de necunoscute, iar **derivatele de ordinul întâi trebuie estimate**. Se renunță la egalitățile derivatelor de ordin superior.

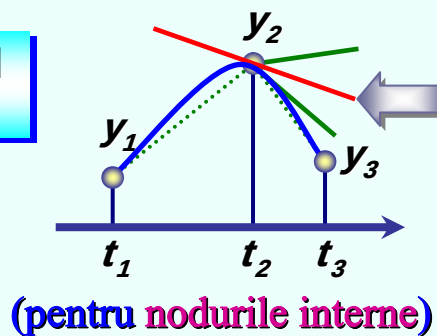
$N = 2$  → 2 ecuații, 4 necunoscute

Pentru o tabelă cu două noduri este de preferat o **interpolare liniară**.

$N = 3$  → 8 ecuații, 8 necunoscute

Trebuie estimate derivatele de ordinul întâi în **toate** nodurile de interpolare.

Principiul general



$$y_{2,1} = \text{tg} \left[ w_1 \arctg \left( \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \right) + w_2 \arctg \left( \frac{y_3 - y_2}{t_3 - t_2} \right) \right]$$

unghiuri obținute prin interpolare liniară

ponderi determinate de duratele de eșantionare

$$w_1 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \quad w_2 = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}$$

- Pentru **nodurile marginale**, se pot considera **derivatele laterale**.

$$y_{1,1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$$

$$y_{3,1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_3 - y_2}{t_3 - t_2}$$

☞ Ponderile trebuie să fie invers proporționale cu duratele de eșantionare.



8<sub>2</sub>.4



# ⑧ Modelarea și predicția seriilor de timp

## ⑧.② Estimarea componentei sezoniere

Așadar

$N = 3$

8 ecuații, 8 necunoscute

$$a_{1,3} t_1^3 + a_{1,2} t_1^2 + a_{1,1} t_1 + a_{1,0} = y_1$$

$$a_{1,3} t_2^3 + a_{1,2} t_2^2 + a_{1,1} t_2 + a_{1,0} = y_2$$

$$a_{2,3} t_2^3 + a_{2,2} t_2^2 + a_{2,1} t_2 + a_{2,0} = y_2$$

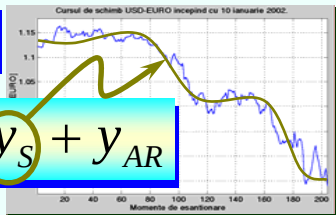
$$\begin{matrix} 3 & & 2 & & \\ 2,3 & 3 & 2,, & 2,1 & 2, \end{matrix}$$

# Modelarea și predicția seriilor de timp

## Estimarea componentei sezoniere

Revenim la

$$y_{\mathcal{M}} \equiv y_T + y_S + y_{AR}$$



Cum se pot determina perioada și coeficienții sezonieri?

Există două tehnici de bază.

**În timp: Wittacker-Robinson**

Recomandată pentru determinarea coeficienților sezonieri.

**În frecvență: periodograma Schuster**

Recomandată pentru determinarea perioadei.

### Metoda Wittacker-Robinson

- Se poate aplica **numai** seriilor de timp **uniform eșantionate**.

! **Seria staționară neuniform eșantionată trebuie întâi interpolată și apoi re-eșantionată uniform.**

! **Greoaie și subiectivă.  
Nu va fi implementată.**

$$\mathcal{D} = \{y_{\text{sta}}(t_n)\}_{n=1, \overline{N}}$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n \dots < t_N$$

interpolare  
liniară / spline

$$y_{\text{sta}} : [1, T_{\text{max}} = t_N] \rightarrow \mathbb{R}$$

(funcție continuă)

Re-eșantionare

$$T_s \stackrel{\text{def}}{=} \min_{n \in 1, \overline{N-1}} \{t_{n+1} - t_n\}$$

(pseudo-perioadă  
de eșantionare)

### Principiul metodei

- Pentru fiecare perioadă posibilă  $P$ , se rearanjează seria de timp într-o matrice cu  $P$  coloane și se evaluează media fiecărei coloane.

$$\mathcal{D}' = \{y_{\text{sta}}[m] = y_{\text{sta}}(m T_s)\}_{n=1, \overline{M}}$$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{T_{\text{max}}}{T_s} + \frac{1}{2} \right\rceil$$



8<sub>2</sub>.6





# 8 Modelarea și predicția seriilor de timp

## 8.2 Estimarea componentei sezoniere

### Metoda Wittacker-Robinson (continuare)

**Așadar**

$$\mathcal{D}' = \{y_{sta}[m]\}_{n=1, \overline{M}}$$

rearanjare

$$\mathbf{Y}_{sta} \in \mathbb{R}^{L \times P}$$

$$L = \left\lceil \frac{M}{P} \right\rceil$$

indice temporal  $p$

|                     |                     |     |                     |     |                   |
|---------------------|---------------------|-----|---------------------|-----|-------------------|
| $y_{sta}[1]$        | $y_{sta}[2]$        | ... | $y_{sta}[p]$        | ... | $y_{sta}[P]$      |
| $y_{sta}[P+1]$      | $y_{sta}[P+2]$      | ... | $y_{sta}[P+p]$      | ... | $y_{sta}[2P]$     |
| ...                 | ...                 | ... | ...                 | ... | ...               |
| $y_{sta}[kP+1]$     | $y_{sta}[kP+2]$     | ... | $y_{sta}[kP+p]$     | ... | $y_{sta}[(k+1)P]$ |
| ...                 | ...                 | ... | ...                 | ... | ...               |
| $y_{sta}[(L-1)P+1]$ | $y_{sta}[(L-1)P+2]$ | ... | $y_{sta}[(L-1)P+p]$ | ... | $y_{sta}[LP]$     |

☞ Segment de semnal (pe o perioadă).

mediere  
pe  
coloane

$$y_{S,1}$$

$$y_{S,2}$$

...

$$y_{S,p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} y[kP + p]$$

...

$$y_{S,P}$$

**Coeficienți sezonieri pe durata unei perioade** (pentru o perioadă precizată)

☞ În matricea de semnal  $\mathbf{Y}_{sta}$  ultimele date staționarizate pot lipsi.

**Evident**

Matricea de semnal trebuie să conțină  
minim două linii și două coloane.

$$P \in 2, \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil$$



8<sub>2</sub>.7



# Modelarea și predicția seriilor de timp

## 8.2 Estimarea componentei sezoniere

### Metoda Wittacker-Robinson (continuare)

Cum se poate alege o perioadă adecvată?

$$V[P] = \sum_{n=1}^N \left[ y_{\text{sta}}(t_n) - y_S^P(t_n) \right]^2$$

Folosind un **criteriu de adecvanță** bazat pe **eroarea pătratică**.

Minimul acestui criteriu indică perioada adecvată.

Componenta sezonieră, de perioadă  $P$ ,  
obținută în urma **prelungirii prin periodicitate**.

Cum se poate realiza prelungirea prin periodicitate?

**Eșantionare uniformă**  
Natural, prin repetarea perioadei principale.

**Eșantionare neuniformă**  
Sunt necesare **interpolarea** și **re-eșantionarea** la momentele indicate de fiecare perioadă.

Interpolare?

Există numeroase tehnici, dintre care două sunt preferate în acest context.

| Tabelă de interpolare |       | nod de interpolare |
|-----------------------|-------|--------------------|
| $t_1$                 | $t_2$ | $t_n$              |
| $y_1$                 | $y_2$ | $y_n$              |

momente de eșantionare (nu neapărat uniforme)  
eșantionare

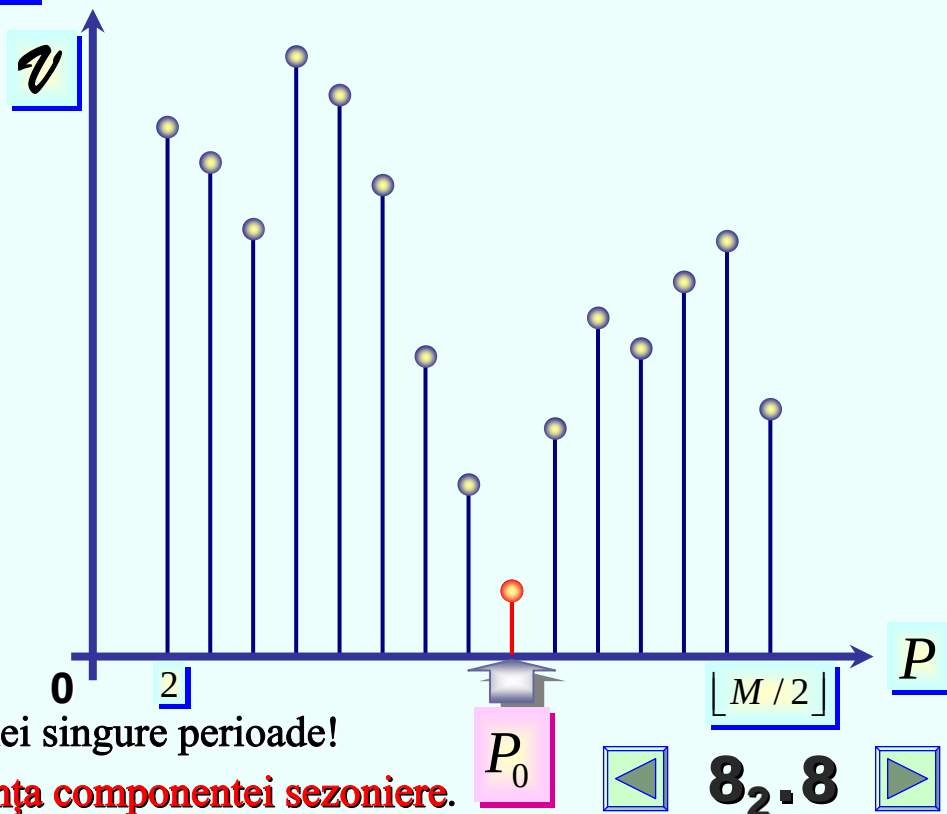
**Interpolare liniară**

**Interpolare cu funcții spline cubice**

$y(t) = y_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} (y_n - y_{n-1})$

$\forall t \in \mathbb{R}$

8.2



👉 În cazul interpolării spline, derivatele laterale din nodurile marginale se pot evalua ca și cele din nodurile interioare, folosind periodicitatea.

👉 Minimele locale pot indica **divizori** sau **multipli** ai unei singure perioade!

• **Prea multe minime locale necorelate** pot indica **absența componentei sezoniere**.



# 8 Modelarea și predicția seriilor de timp

## 8.2 Estimarea componentei sezoniere

Dar în cazul seriilor de timp care nu au comportament sezonier?

Comportamentul sezonier poate fi detectat cu ajutorul următorului criteriu empiric:

perioada  
estimată

Dacă

$$\nu[P_0] < \mu \mathcal{E}[y_{sta}]$$

atunci seria de timp  
posedă componentă sezonieră.

$P_0$

prag energetic

$$\mu \in [25, 35]\%$$

energia seriei staționarizate

$$\mathcal{E}[y_{sta}] = \sum_{n=1}^N y_{sta}^2(t_n)$$

Altfel

$$P_0 = 0$$

&

$$y_S^{P_0} \equiv 0$$

Care este tema de laborator?

Implementarea algoritmului de estimare a coeficienților sezonieri,  
bazat pe Metoda Wittacker-Robinson.

Pași principali ai algoritmului de modelare

Date de intrare

$\mathcal{D}_{sta}$

(seria de timp staționarizată)

Inițializare

Determinarea lungimii seriei de timp staționarizate.

$N$

Evaluarea perioadei de eșantionare.

$T_s$

Unitară, pentru seriile eșantionate  
uniform.

Stabilirea pragului energetic.

$\mu$



8<sub>2</sub>.9



# ⑧ Modelarea și predicția seriilor de timp

## ⑧.② Estimarea componentei sezoniere

### 👉 Pași principali ai algoritmului de modelare (continuare)

Se interpolează și re-eșantionează seria de timp staționarizată (dacă este cazul).

🔥 Cu două opțiuni:  
liniar, spline.

Se evaluează numărul de eșantioane.

$M$

🔥 Eșantionare  
uniformă

$M = N$

Bucă iterativă

① Pentru  $P \in 2, \lfloor M / 2 \rfloor$

① Se construiește matricea de semnal cu  $P$  coloane.

$\mathbf{Y}_{sta}$

② Se estimează valorile coeficienților sezonieri.

$\{y_{S,p}\}_{p \in \overline{1,P}}$

🔥 Același tip de interpolare ca  
și pentru seria staționarizată.

③ Se interpolează și re-eșantionează seria coeficienților sezonieri (dacă este cazul).

④ Se construiește componenta sezonieră folosind procedeul prelungirii prin periodicitate.

$y_S^P$

⑤ Se calculează și se memorează valoarea curentă a criteriului de adecvanță.

$\mathcal{V}[P]$

Se determină punctul de minim al criteriului de adecvanță.

$(P_0, \mathcal{V}[P_0])$

🔥 Cu indicarea  
perioadei minime!

Dacă

$\mathcal{V}[P_0] < \mu \mathcal{E}[y_{sta}]$

atunci seria de timp  
posedă componentă sezonieră.

$P = P_0$   
 $y_S \equiv y_S^{P_0}$

Altfel

$P = 0$  &  $y_S \equiv 0$

# ⑧ Modelarea și predicția seriilor de timp

## ⑧.② Estimarea componentei sezoniere

### ☞ Pași principali ai algoritmului de modelare (continuare)

Se evaluează zgomotul colorat.

$$v(t_n) = y_{sta}(t_n) - y_S(t_n)$$

$$\forall n \in \overline{1, N}$$

Date de ieșire

$v$

$y_S$

$P$

$\mathcal{V}$

Rutină ce trebuie proiectată

```
>> [v, yS, P, V] = seasonal(ysta);
```

vectorul  
zgomotului colorat

vectorul componentei  
sezoniere pe orizontul  
de măsură

perioada  
componentei  
sezoniere

vectorul valorilor  
criteriului de  
adecvanță

vectorul de date  
care conține  
seria de timp  
staționarizată

Programul de test al rutinei seasonal

ISLAB\_8B

### ☞ Pași principali

Se introduce numărul fișierului care conține seria de timp staționarizată.

nts

Se încarcă seria de timp staționarizată în spațiul de lucru.

• cu ajutorul funcției:

eval

Se apelează rutina seasonal.

# 8 Modelarea și predicția seriilor de timp

## 8.2 Estimarea componentei sezoniere

Programul de test al rutinei seasonal

ISLAB\_8B

### Pași principali (continuare)

Se trasează graficul criteriului de adecvanță (cu precizarea punctului de minim).

Dacă  $P \neq 0$

Se trasează graficele seriei de timp staționarizate și al componentei sezoniere (în aceeași fereastră, cu precizarea perioadei).

Altfel

Utilizatorul este informat printr-un mesaj corespunzător.

Se trasează graficul zgomotului colorat (cu precizarea dispersiei pe grafic).

$$\lambda_v^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v^2(t_n)$$

Graficele trebuie trasate cu axele corect scalate și marcate, cu titluri sugestive și legendă de discriminare (dacă este cazul).

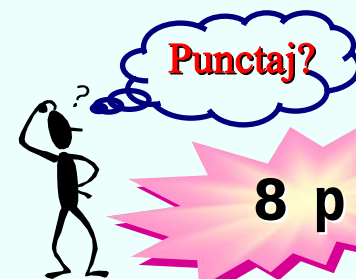
Pentru a determina perioada minimă, valorile minime ale criteriului de adecvanță se vor determina cu o precizie de cel mult  $\pm 5\%$  în jurul minimului global.



Mini-programe  
MATLAB.

STnts\_sta.M

nts ∈ {1, 2, 3, ..., 15}



8 p