



Sumar

✓ Bibliografie

✓ ① Organizarea temelor de laborator

✓ ② Modelarea și predicția seriilor de timp

✓ ②.① Estimarea modelului polinomial al tendinței

✓ ②.② Estimarea componentei sezoniere

☞ ②.③ Estimarea componentei nedeterminate (aleatoare)

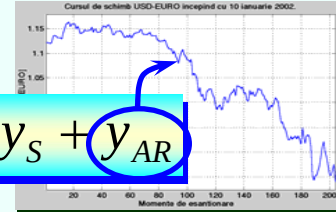
②.④ Predicția seriei de timp

Modelarea și predicția seriilor de timp

Estimarea componentei aleatoare

Componentă aleatoare

Model nedeterminist asociat perturbațiilor care corup
seria de timp.



$$y_M \equiv y_T + y_S + y_{AR}$$

În exprimarea modelului de identificare asociat,
maniera de eșantionare a datelor nu este esențială.

renotare

$$v[n] \leftarrow v(t_n) \quad \forall n \in \overline{1, N}$$

(pentru ușurința
exprimării
modelului)

Clasa ARMAX

AR[na]

Auto-Regresiv

$$y_{AR} \equiv v - e$$

Valorile zgomotului alb sunt
de asemenea necunoscute.

zgomot alb

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} v[n] + a_1 v[n-1] + \dots + a_{na} v[n-na] = e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

- Utilizat în special în **predicția optimală a datelor**,
fiind un **model de zgomot** și nu de date utile.

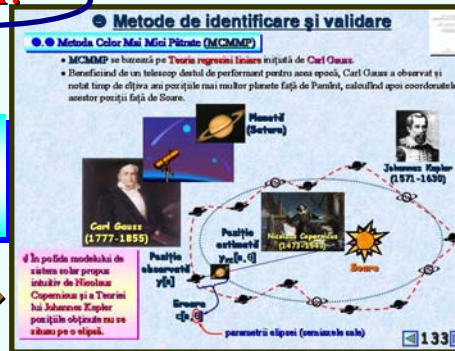
dispersie
(necunoscută)

parametri
(necunoscuți)

ordinul modelului
(necunoscut)

Cum poate fi determinat modelul?

Folosind **Metoda Celor Mai
Mici Pătrate (MCMMP)**.



$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in S} \mathcal{V}_N(\theta)$$

$$\mathcal{V}_N(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N (v[n] - y_{AR}[n])^2$$

$\forall \theta \in S$

domeniul de stabilitate

Curs IS →

83.2

Modelarea și predicția seriilor de timp

Estimarea componentei aleatoare



Estimație consistentă

$$\hat{\theta}_{N,na} = \mathbf{R}_{N,na}^{-1} \mathbf{r}_{N,na}$$

vector de covarianțe

$$\mathbf{r}_{N,na} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_{na}[n] v[n] = \left[-\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v[n] v[n-i] \right]_{i \in \overline{1,na}}$$

matrice ~Toeplitz simetrică
(echilibrată numeric)

$$\mathbf{R}_{N,na} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_{na}[n] \boldsymbol{\phi}_{na}^T[n] = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v[n-i] v[n-j] \right]_{i,j \in \overline{1,na}}$$

vectorul regresorilor

$$\boldsymbol{\phi}_{na}^T[n] \stackrel{\text{def}}{=} [-v[n-1] \quad \dots \quad -v[n-na]] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$r_v^N[0]$	$r_v^N[1]$	$r_v^N[2]$	$\dots$	$r_v^N[na-1]$
$r_v^N[1]$	$r_v^N[0]$	$r_v^N[1]$	$\ddots$	$r_v^N[na-2]$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$r_v^N[na-2]$	$\dots$	$r_v^N[1]$	$r_v^N[0]$	$r_v^N[1]$
$r_v^N[na-1]$	$\dots$	$r_v^N[2]$	$r_v^N[1]$	$r_v^N[0]$

Ce importanță are faptul că matricea este Toeplitz simetrică?

În primul rând, matricea este **unic determinată de prima sa linie ori coloană.**

matrice Toeplitz simetrică (mai precisă)

⚡ Diagonalele sunt constante acum.

$$r_v^N[k] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N v[n] v[n-k] \quad \text{auto-covarianță estimată}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

În al doilea rând, matricea poate fi inversată **mai eficient** decât în cazul general (cînd se folosește **procedura lui Gauss**).

Algoritmul Levinson-Durbin

1/Precizie

$$\hat{\lambda}_{N,na}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(v[n] - \boldsymbol{\phi}_{na}^T[n] \hat{\theta}_{N,na} \right)^2$$

Modelarea și predicția seriilor de timp

Estimarea componentei aleatoare

Algoritmul Levinson-Durbin (ALD)



Procedură recursivă de determinare a parametrilor modelului $AR[na]$ cu ajutorul modelului $AR[na-1]$.

Date de intrare

$\mathcal{Z}_N = \{v[n]\}_{n \in \overline{1, N}}$ (zgomotul colorat rezidual)
 na (ordinul modelului auto-regresiv)

Inițializare

Pentru ușurință, se renunță la indicele N din notația parametrilor.

① Se evaluează valorile secvenței de auto-covarianță a zgomotului:

$$r_v^N[0] \quad r_v^N[1] \quad \cdots \quad r_v^N[na]$$

② Se estimează parametrii modelului de ordin 1:

$$\hat{a}_{1,1} = -\frac{r_v^N[1]}{r_v^N[0]} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\theta}_1 \quad \hat{\lambda}_1^2 = r_v^N[0](1 - \hat{a}_{1,1}^2)$$

Bucă iterativă

⌚ Pentru $p \in \overline{2, na}$

① Se evaluează câștigul: $k_p = -\frac{1}{\hat{\lambda}_{p-1}^2} (r_v^N[p] + \hat{a}_{p-1,1} r_v^N[p-1] + \cdots + \hat{a}_{p-1,p-1} r_v^N[1])$

$$|k_p| \leq 1$$

② Se reactualizează vectorul curent al parametrilor:

$$\hat{\theta}_p = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{p-1} \\ 0 \end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{p-1}^R \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ Se reactualizează dispersia zgomotului alb:

$$\hat{\lambda}_p^2 = \hat{\lambda}_{p-1}^2 [1 - k_p^2]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{p-1,p-1} \\ \hat{a}_{p-1,p-2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{p-1,1} \end{bmatrix}$$

vector răsturnat

Date de ieșire

$$\hat{\theta}_{na}$$

Parametrii estimați ai modelului $AR[na]$.

$$\hat{\lambda}_{na}^2$$

Dispersia estimată a zgomotului alb.



8₃.4



Modelarea și predicția seriilor de timp

Estimarea componentei aleatoare

Cum se poate determina ordinul modelului?

Se apelează la strategia generală prezentată în cursul de **IS**.

Pentru fiecare structură de model din ce în ce

mai bogată ($m \in \{1, 2, \dots, M\}$):

- se determină parametrii modelului ales, θ_m ;
- se evaluează precizia modelului ($\mathcal{V}(\theta_m)$).

Ordinul maxim al modelului.

$Na = 100$

Alegerea modelului adecvat datelor achiziționate

AR[na]

Teste (criterii) de adecvanță

Pentru fiecare indice structural:

Valorile modelului se estimează **recursiv**, **aproximînd zgomotul alb**.

$$y_{AR}[n] = -\hat{a}_{na,1}v[n-1] - \dots - \hat{a}_{na,na}v[n-na]$$

Primii pași.

$$y_{AR}[1] = 0$$

$$y_{AR}[2] = -\hat{a}_{na,1}v[1]$$

$$y_{AR}[3] = -\hat{a}_{na,1}v[2] - \hat{a}_{na,2}v[1]$$

⋮



83.5



Curs **IS** →
(experiment de identificare)

Criteriul utilizat în alegerea structurii modelului componentei aleatoare

Calitatea predicției

$PQ_K[p, P, na]$

Definit în final, pentru toate cele 3 modele componente.

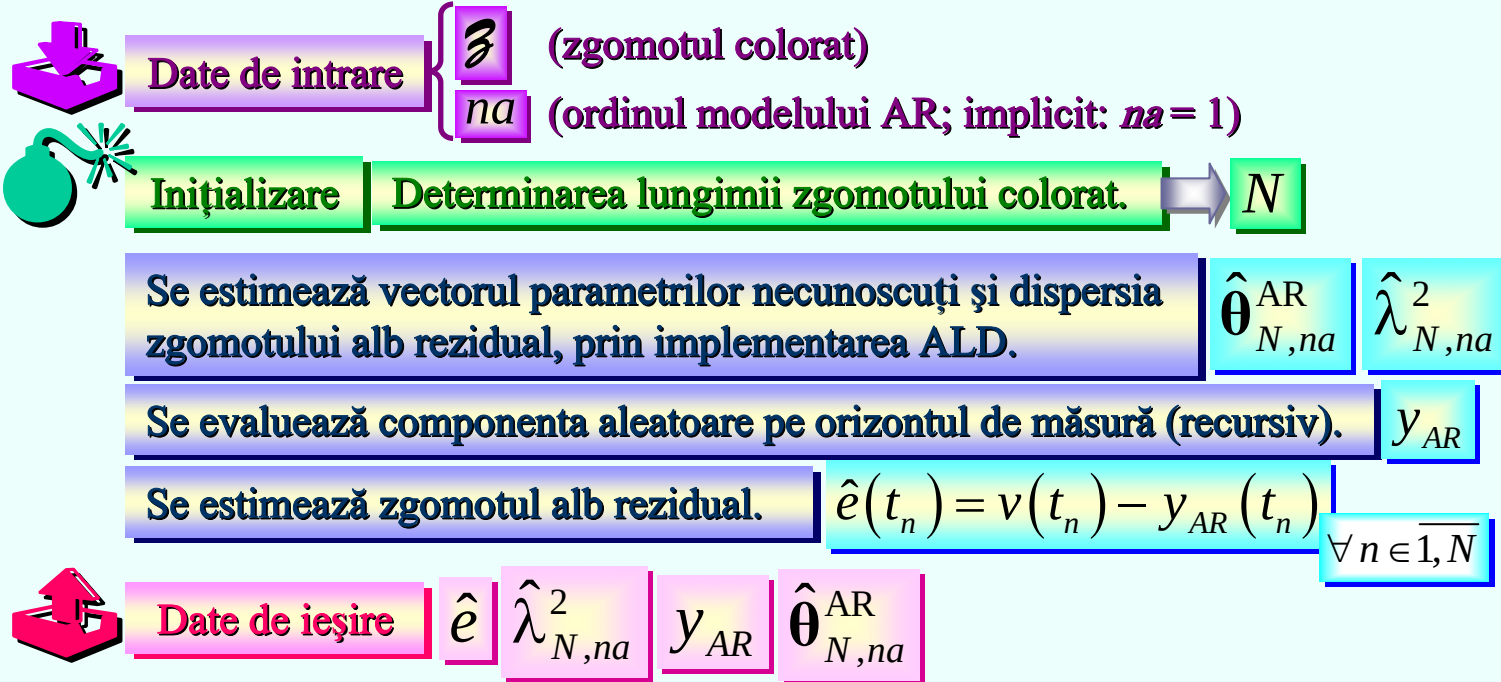
Care este tema de laborator?

Implementarea algoritmului de estimare a parametrilor modelului nedeterminist, bazat pe **ALD**.

8 Modelarea și predicția seriilor de timp

8.3 Estimarea componentei aleatoare

Pași principali ai algoritmului de modelare



Rutină ce trebuie proiectată

```
>> [e, lambda2, yAR, theta_AR] = stochastic(v, na);
```

vectorul zgomotului
alb rezidual

dispersia zgomotului
alb rezidual

vectorul
modelului AR

vectorul
parametrilor
modelului AR

vectorul de date care
conține zgomotul colorat

ordinul
modelului AR



8₃.6



⑧ Modelarea și predicția seriilor de timp

⑧.③ Estimarea componentei aleatoare

Programul de test al rutinei **stochastic**

ISLAB_8C

👉 Pași principali

Se introduce numărul fișierului care conține zgomotul colorat.

nts

Se introduce ordinul modelului AR.

na

Se încarcă zgomotul colorat în spațiul de lucru.

• cu ajutorul funcției:

eval

Se apelează rutina **stochastic**.

Se trasează graficele zgomotului colorat și al componentei aleatoare (în aceeași fereastră).

Se trasează graficul zgomotului alb rezidual (cu precizarea dispersiei estimate pe grafic).

📌 Graficele trebuie trasate cu axele corect scalate și marcate, cu titluri sugestive și legendă de discriminare (dacă este cazul).

Fișiere de date?



Mini-programe
MATLAB.

STnts_v.M

nts ∈ {1, 2, 3, ..., 15}

Punctaj?



10 p



8₃.7

