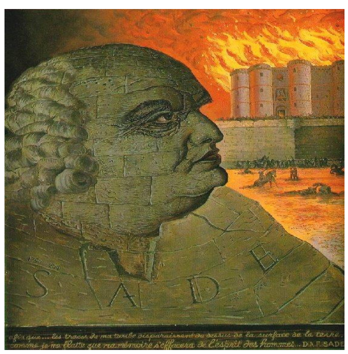
CAPITULO 2

Las Leyes de Newton. Ecuaciones del Movimiento



A mesure que l'on s'est èclairè,
on a senti que, le mouvement
ètant inhèrent à la matière,
l'agent nècessaire à imprimer ce
mouvement devenait un être illusoire

D.A.F. SADE[a]

[a] La Philosophie dans le Boudoir, p.166. La Musardine. Retrato imaginario de Man Ray.

En este capítulo[1] resumimos a las tres leyes fundamentales de la mecánica clásica. En este curso usaremos tan sólo versiones simplificadas de ellas, pero es muy conveniente irse familiarizando con ellas para cursos posteriores.

Deseamos comprender el comportamiento de un objeto simple que interactúa con su entorno. En la mecánica clásica estamos interesados en describir el movimiento del objeto que estamos estudiando en el futuro, suponiendo que tenemos algún conocimiento de sus propiedades y las de sus alredores. La solución de este problema fue lograda después de siglos de intentos tanto teóricos como experimentales y fue formulada en la forma en que la veremos por el físico inglés ISAAC NEWTON (1642-1727).

[1] Este documento fue elaborado en LaTeXpor A. Anzaldo Meneses y puede ser bajado de **mx.geocities.com/alfons_energie** ó contactando al autor en **alfons_rex@hotmail.com**

2.1 Vectores de Posición, Velocidad y Fuerza

Para poder expresar correctamente nuestras idéas necesitamos primero introducir algunas definiciones básicas.

ición

Definition 2.1.1 *Llamamos vector de* **posición** *de un cuerpo dado, ó bien simplemente "posición", al vector que une al origen del sistema de coordenadas o marco de referencia que hemos fijado con el cuerpo.*

Por simplicidad pensemos por lo pronto en cuerpos puntuales, que son una abstracción que nos simplificará mucho el trabajo por ahora. Dado que queremos entender el comportamiento de dicho cuerpo, es importante definir a un vector que nos diga como varía el vector de posición con el tiempo. Para esto, consideremos a los vectores de posición $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t+\Delta t)$, que nos dicen la posición de un cuerpo a los tiempos t y $t+\Delta t$ respectivamente, que suponemos **son lo suficientemente cercanos** como para que la posición de la partícula no haya cambiado mucho. Introduzcamos ahora al vector de **velocidad**.

velocidad

Definition 2.1.2 *Definimos al vector de* **velocidad** $\vec{v}$ *como*

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \tag{2.1}$$

en donde Δt es un intervalo de tiempo suficientemente pequeño.

Nota Importante. Estrictamente debemos tomar el límite cuando Δt tiende a cero y definir

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}).$$

derivada

Dicho límite es denominado la **derivada** de $\vec{r}(t)$ con respecto a t. Es usual escribir $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$, ó de manera aún más simple, tan sólo $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. ♠

Por componentes tenemos

$$v_x(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \; v_y(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \; v_z(t) = \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Dado que las unidades físicas del tiempo son los segundos, las unidades físicas de la velocidad son los metros sobre segundo, lo cual escribimos como

$$[\vec{v}(t)] = \frac{Metros}{Segundo}, \tag{2.3}$$

debido a que las unidades MKS del tiempo son los segundos. El módulo de la velocidad $v(t) =$

rapidez $\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)}$ es llamado la **rapidez** del cuerpo.

Los problemas más simples son aquellos para los cuales la velocidad es constante para todo tiempo. Esto es $\vec{v}(t)=\vec{v}(t+\Delta t)$ para todo intervalo de tiempo Δt. Esta situación ocurre para cuanto el vector de posición varía linealmente con el tiempo, ya que de la definición de velocidad tenemos que

$$\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}(t)+\vec{v}\,\Delta t, \tag{2.4}$$

en donde $\vec{v}$ es el vector de velocidad constante y $\vec{r}(t)$ lo podemos elegir libremente como la posición original al tiempo t.

En general las velocidades de los cuerpos no se mantienen constantes en el tiempo por lo que resulta también muy conveniente definir a una cantidad física que nos indique como varía la velocidad con el tiempo.

Definition 2.1.3 *Definimos al vector de* **aceleración** $\vec{a}$ *como* **aceleración**

$$\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{2.5}$$

en donde Δt es un intervalo de tiempo suficientemente pequeño.

Las unidades físicas de la aceleración son

$$[\vec{a}]=\frac{\text{metros}}{\text{segundo}^2} \tag{2.6}$$

Ahora, si estamos tan solo interesados en cuerpos que se desplazan con velocidad constante, entonces la aceleración será también nula, $\vec{a}=\vec{0}$.

Finalizamos estas definiciones introduciendo una entidad que nos permite describir la manera en los cuerpos influyen sobre otros.

Definition 2.1.4 *Entendemos por* **fuerza** *a la acción de un objeto sobre de otro, comprendiendo dicha acción a una dirección, a un sentido y a una magnitud determinados en un instante de tiempo dado. Esto es, una fuerza es un vector que en general variará con el tiempo.* **fuerza**

Además,

Definition 2.1.5 *Llamamos* **fuerza neta** *a la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo* **fuerza neta**

$$\vec{F}_{neta}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i, \tag{2.7}$$

en donde hemos numerado con el subíndice i a las fuerzas que actuán, mismas que hemos supuesto ser un total de N.

La definición de fuerza que acabamos de dar requiere sin embargo, para su mas cabal explicación, de las conocidas tres leyes de Newton que a continuación explicaremos concisamente.

2.2 Primera Ley

Esta ley fue motivo de numerosos estudios, muchos de ellos de caracter filosófico desde la época de los antiguos griegos. Una cuestión fundamental era saber ¿Qué sucede con un cuerpo que está completamente aislado? Un punto de vista, que pareció ser muy pausible para muchos, era que dicho objeto quedaría en reposo absoluto después de transcurrido un tiempo suficientemente largo. El resultado fue otro. En base a numerosos experimentos, ente otros de Galileo, se encontró experimentalmente que si un cuerpo tiene una velocidad dada y sobre de él actúa una fuerza neta nula, entonces dicho cuerpo se moverá con la misma velocidad de manera constante.

Primera Ley de Newton

Todo cuerpo continúa en su estado de reposo ó de movimiento uniforme en una línea recta a menos que sea obligado por una fuerza a cambiar dicho estado

Aquí hemos hecho mención explícita al caso particular de velocidad constante igual a cero y que llamamos **reposo** con respecto a un sistema de referencia dado desde el cual medimos la velocidad.

2.3 Segunda Ley

La segunda ley de Newton se basa también en multitud de resultados experimentales que fueron resumidos de la siguiente forma.

Segunda Ley de Newton

El cambio en el movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza aplicada y tiene lugar en la dirección de la fuerza

Escribimos matemáticamente esta ley para problemas en los cuales la masa se conserva como

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{2.8}$$

en donde m es la llamada **masa inercial** del cuerpo en cuestión. Esta cantidad es introducida como una necesidad de expresar la proporcionalidad entre la fuerza aplicada a un cuerpo con una propiedad intrínseca a él y que es susceptible de ser medida en el experimento. La masa inercial representa la propiedad física de un cuerpo que determina su resistencia a un cambio en el movimiento. Nótese que en general la masa puede depender del tiempo. Tal situación ocurre por ejemplo cuando consideramos el movimiento de un cohete o un vehículo que consume algún combustible. La segunda ley de Newton original incluye también tal posibilidad pero no será necesaria en estas notas.

Existe por otro lado otro tipo de fenómenos que involucran a una cantidad física de las mismas unidades que la masa inercial. Estos fenómenos están descritos por la conocida ley de la gravitación universal. Dicha ley fundamental fue anunciada por Newton en 1666 quien se basó en parte en numerosas observaciones astronómicas de TYCHO BRAHE (1546-1601) e interpretadas por JOHANNES COPERNICO (1571-1630) y establece que

Ley de la Gravitación Universal

> Toda partícula en el universo atrae a toda otra partícula con una fuerza que varía directamente con el producto de las masas de las dos partículas e inversamente con el cuadrado de sus distancias. La dirección de la fuerza es a lo largo de la línea recta que une a las dos partículas

La masa que aparece en esta ley se denomina **masa gravitacional**. Posteriormente, fue posible comprobar experimentalmente con gran exactitud que la masa inercial es equivalente a la masa gravitacional. Por ello no haremos distinción entre ambas y las denominaremos simplemente "masa". Las unidades físicas de la masa son **masa**

$$[m] = \text{Kilogramos}, \tag{2.9}$$

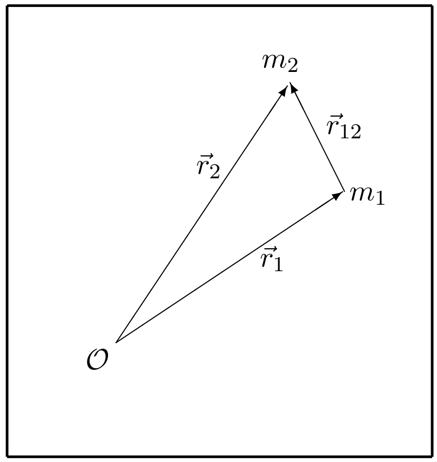
en sistema M**K**S de unidades. Las unidades físicas de la fuerza serán entonces

$$[\vec{F}] = \frac{\text{Kilogramos Metros}}{\text{Segundo}^2} = \text{Newtons}, \tag{2.10}$$

en honor a Newton. Podemos escribir a la ley de la gravitación en forma vectorial como

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}, \tag{2.11}$$

en donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que la partícula de masa gravitacional m_1 ejerce sobre la partícula de masa gravitacional m_2 con vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente. Además $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es el vector que parte de la posición de la partícula de masa m_1 y llega a la posición de la partícula de masa m_2. El vector unitario $\hat{r}_{12}$ está dado por $\vec{r}_{12}/r_{12}$, en donde r_{12} es el módulo de $\vec{r}_{12}$. La constante G es conocida como la constante de la gravitación universal y es una de las constantes fundamentales de la Física. Su valor aproximado es $G \approx 6.673 \times 10^{-11}\, Nm^2/Kg^2$.



Nota Importante.

Debido a que usualmente tratamos con problemas en los cuales consideramos a cuerpos que se encuentran cerca de nuestro planeta y a que este es mucho mayor, las variaciones en la distancia r_{12} en donde uno de los cuerpos es la Tierra serán mínimas. Por lo que para fines prácticos de este curso la distancia r_{12} puede ser considerada constante. Con esto, la fuerza de atracción que experimentan todas las partículas hacia el centro de la Tierra es de magnitud

$$F = mg, \tag{2.12}$$

$[g] = \frac{metros}{segundo^2}$

en donde m es la masa de la partícula y g es una constante con dimensiones de aceleración. El valor numérico de g que usaremos es de 9.8 metros sobre segundo al cuadrado, basandonos en los valores $R_T = 5.97 \times 10^6$ metros y $M_T = 5.97 \times 10^{24}$Kg. Dicho valor puede variar ligeramente sobre la superficie de la Tierra pero haremos caso omiso de ello. ♠

2.4 Tercera Ley

Por medio de esta última ley expresamos la reciprocidad que existen en cualquier interacción entre dos cuerpos arbitrarios.

Tercera Ley de Newton

A toda acción corresponde una reacción igual y de sentido opuesto, o bien, las acciones mútuas entre dos cuerpos son siempre iguales y estan dirigidas opuestamente

Esta ley la podemos formular vectorialmente como

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{2.13}$$

en donde denotamos como $\vec{F}_{AB}$ a la fuerza que el cuerpo "A" ejerce sobre el cuerpo "B", y con $\vec{F}_{BA}$ a la fuerza que el cuerpo "B" ejerce sobre el cuerpo "A". Vemos entonces que los vectores $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{BA}$ tienen la misma magnitud, $F_{AB} = F_{BA}$, la misma dirección, pero sentidos opuestos. Nótese que si escribimos a ambas fuerzas en el mismo miembro de la igualdad tendremos que

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = \vec{0}. \tag{2.14}$$

Así que la fuerza neta del sistema formado por los dos cuerpos es nula y por lo tanto se deberá trasladar con velocidad constante.

2.5 Ecuaciones del Movimiento

Denominaremos **ecuaciones del movimiento** a las ecuaciones resultantes de la segunda ley de Newton. En este capítulo resolveremos algunos casos simples para partículas puntuales, destacando sobre todo el caso de fuerzas constantes tanto temporal como espacialmente. Además analizaremos problemas bidimensionales en términos de coordenadas polares. **DE**

2.5.1 Fuerzas Constantes

Consideremos a una fuerza constante arbitraria actuando sobre una partícula puntual de masa inercial m constante. Las ecuaciones del movimiento son entonces

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.15}$$

Dado que la masa es constante deducimos que la aceleración es también constante. Ahora, dado que la aceleración está dada por la primer derivada con respecto al tiempo de la velocidad $\vec{v}$

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{a}(t), \tag{2.16}$$

podemos obtener a $\vec{v}(t)$ de las ecuaciones del movimiento integrando ambos miembros con respecto al tiempo utilizando el teorema fundamental del cálculo. Consideramos por simplicidad que empezamos a medir al tiempo desde el instante $t_o = 0$ y que queremos saber el comportamiento de la partícula al tiempo t. Nombrando a la variable de integración τ tendremos

$$\int_o^t \vec{F}\, d\tau = \int_o^t m\,\frac{d}{d\tau}\,\vec{v}(\tau)\, d\tau. \tag{2.17}$$

Como la fuerza y la masa son constantes obtenemos

$$\vec{F}\, t = m\vec{v}(t) \,-\, m\vec{v}(0), \tag{2.18}$$

y con ello

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) \,+\, \frac{\vec{F}}{m}\, t. \tag{2.19}$$

Esto es, la velocidad es una *función lineal del tiempo* con pendiente dada por la cantidad constante $\vec{F}/m$ igual a la aceleración $\vec{a}$. Es fácil comprobar que para $t = 0$, la *condición inicial* para la velocidad se satizface. ◁**IMP.**

Recordando ahora que la velocidad es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t), \tag{2.20}$$

integramos a la ecuación que hemos obtenido para la velocidad una vez más

$$\int_o^t \vec{v}(\tau)\, d\tau = \vec{r}(t) \, - \, \vec{r}(0) = \int_o^t \vec{v}(0)\, d\tau \, + \, \int_o^t \frac{\vec{F}}{m}\, \tau \, d\tau. \tag{2.21}$$

Usando ahora el resultado bien conocido que la integral de τ es $\tau^2/2$, llegamos al resultado

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) \, + \, \vec{v}(0)\, t \, + \, \frac{\vec{F}}{2m}\, t^2. \tag{2.22}$$

MP. Concluimos entonces que el vector de posición es una función cuadrática del tiempo. La segunda condición inicial se cumple adecuadamente.

Como hemos visto no fue necesario suponer que la fuerza tuviese una dirección particular. Sin embargo es claro que podemos asumir que los ejes coordenados pueden ser elegidos de tal forma que la fuerza se encuentre en dirección de uno de ellos. Supongamos entonces ahora que la fuerza constante apunta en la dirección del eje y. Con ello $\vec{F} = F\,\hat{j}$, y con ello las componentes del vector de posición serán simplemente

$$x(t) = x(0) \, + \, v_x(0)\, t, \quad y(t) = y(0) \, + \, v_y(0)\, t \, + \, \frac{F}{2m}\, t^2, \quad z(t) = z(0) \, + \, v_z(0)\, t. \tag{2.23}$$

Las componentes del vector de posición en las direcciones en las cuales las componentes de la fuerza son nulas son en general funciones lineales del tiempo. Mientras que únicamente en la dirección en la cual la componente de la fuerza es distinta de cero, la componente respectiva del vector de posición es una función cuadrática del tiempo. Las componentes de la velocidad son

$$v_x(t) = v_x(0), \quad v_y(t) = v_y(0) \, + \, \frac{F}{2m}\, t, \quad v_z(t) = v_z(0). \tag{2.24}$$

Esto es, en las direcciones para las cuales las respectivas componentes de la fuerza se anulan, las componentes de la velocidad permanecen constantes. Solamente en la dirección en la cual la componente de la fuerza es no nula se sigue que la componente respectiva de la velocidad varía linealmente con el tiempo.

Si ahora nos fijamos en las ecuaciones para $x(t)$ y para $y(t)$, nos daremos cuenta que podemos escribir primero al tiempo como función de $x(t)$

$$t = \frac{1}{v_x(0)}(x(t) \, - \, x(0)), \tag{2.25}$$

suponiendo desde luego que $v_x(0)$ es distinta de cero, cuyo caso veremos mas adelante. Por simplicidad denotaremos ahora simplemente a $x(t)$ y a $y(t)$ por x y y respectivamente y escribiremos $x_o = x(0), y_o = y(0), v_{x,o} = v_x(0)$ y a $v_{y,0} = v_y(0)$. Si ahora substituimos a t como función de x en la ecuación para $y(t)$ llegamos a la relación

$$y = y_o + \frac{v_{y,o}}{v_{x,o}}(x - x_o) + \frac{F}{2mv_{x,o}^2}(x - x_o)^2. \tag{2.26}$$

Esta es la ecuación de una **parábola** en el plano $x - y$ cuyo eje de simetría es paralelo al eje y, como se puede ver fácilmente de manera gráfica, por ejemplo. Dependiendo que la parábola este orientada hacia arriba o hacia abajo, el punto $\{x_o, y_o\}$ será el punto mínimo o bien su punto máximo. **IM**

El caso para el cual $v_{x,o} = 0$ conduce a un segmento de recta en el plano $x - y$ ya que en tal caso $x(t) = x_o$ para todo tiempo. A este movimiento se le conoce como **tiro vertical** cuando el movimiento es en el sentido positivo del eje y, y se le denomina **caída libre** cuando el movimiento es en sentido negativo de dicho eje coordenado. **DE**

2.5.2 Coordenadas Polares

En diversos problemas es importante elegir el sistema de coordenadas más adecuado. Tal situación ocurre con frecuencia cuando se analisan problemas relacionados con rotaciones ó giros. En esta sección recordamos algunos resultados bien conocidos sobre coordenadas polares en el plano $x-y$. Para ello partimos de las relaciones

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}, \qquad x = r\,cos(\phi), \quad y = r\,sen(\phi). \tag{2.27}$$

Dado que siempre podemos escribir a un vector, en nuestro caso $\vec{r}$, como el producto de su módulo r por un vector unitario, llamémosle $\hat{e}_r$. Tenemos entonces claramente que

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r, \qquad \hat{e}_r = cos(\phi)\,\hat{i} + sen(\phi)\,\hat{j}, \quad \text{con} \quad |\hat{e}_r| = 1. \tag{2.28}$$

Es fácil ver que efectivamente $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = cos^2(\phi) + sen^2(\phi) = 1$.

Ahora bien, estamos interesados en la descripción del movimiento de una partícula en el plano $x - y$ como función del tiempo. El vector de posición $\vec{r}(t)$ depende en general del tiempo y por ende su módulo $r(t)$ y su dirección determinada por $\hat{e}_r(t)$ dependerán lógicamente también del tiempo. Para escribir las ecuaciones del movimiento necesitamos primero evaluar las dos primeras derivadas de $\vec{r}$ con respecto al tiempo. Calculamos pués, usando la regla de Leibniz,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r, \qquad \dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\phi}\,(-sen(\phi)\,\hat{i} + cos(\phi)\,\hat{j}). \tag{2.29}$$

En donde hemos escrito por ejemplo $\dot{\phi} = d\phi/dt$, etcétera.

Llamaremos **velocidad angular** al vector $\vec{\omega}$ cuyo módulo (signado) está dado por la **DEF.**

rapidez angular $\omega = \dot{\phi}$. La dirección de $\vec{\omega}$ será perpendicular al plano $x-y$ en este caso. El vector que aparece entre paréntesis en la última ecuación y que definimos como

$$\hat{e}_\phi = -sen(\phi)\,\hat{i} + cos(\phi)\,\hat{j}, \tag{2.30}$$

es también un vector unitario, esto es $\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = 1$. Más aún, este vector es **ortogonal** al
MP. vector unitario $\hat{e}_r$ en la dirección de $\vec{r}$, ya que $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = 0$. Notese también que tendremos que $\hat{i} = cos(\phi)\hat{e}_r - sen(\phi)\hat{e}_\phi$ y que $\hat{j} = sen(\phi)\hat{e}_r + cos(\phi)\hat{e}_\phi$. Con ello podemos concluir que la velocidad tendrá usualmente una componente $\dot{r}(t)$ en la dirección del vector de posición mas una componente transversal o perpendicular a dicho vector dada por $r\,\dot{\phi}(t)$. Vemos así que

$$\dot{\hat{e}}_r = \omega\,\hat{e}_\phi, \quad \text{y} \quad \dot{\hat{e}}_\phi = -\omega\,\hat{e}_r, \tag{2.31}$$

y que

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\omega\,\hat{e}_\phi. \tag{2.32}$$

Nótese que $\vec{v}(t)$ **NO** es igual a $\dot{r}\,\hat{e}_r$, lo cual sólo puede ocurrir para cuando la rapidez angular se anula, $\omega = 0$, que corresponde a un movimiento en la dirección radial.

Finalmente, necesitamos obtener a la aceleración que estará dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\,\omega^2)\,\hat{e}_r + (2\omega\,\dot{r} + r\,\alpha)\,\hat{e}_\phi, \tag{2.33}$$

EF. con la **aceleración angular** $\vec{\alpha}$ definida como aquel vector cuyo módulo (con signo) está dado por la derivada temporal de la rapidez angular $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$. El término $\ddot{r}\hat{e}_r$ es llamado aceleración radial, el término $-r\,\omega^2\hat{e}_r$ **aceleración centrípeta** , el término $2\omega\,\dot{r}\hat{e}_\phi$ es llamado **aceleración de Coriolis** y el término $r\alpha\hat{e}_\phi$ es la **aceleración transversal**.

Llamamos al **movimiento circular** si el radio se mantiene constante $r(t) = r$ y por tanto $\dot{r}(t) = 0$. En este caso tendremos entonces

$$\vec{v}(t) = r\,\omega\,\hat{e}_\phi, \quad \vec{a}(t) = -r\,\omega^2\,\hat{e}_r + r\,\alpha\,\hat{e}_\phi. \tag{2.34}$$

Hablamos de **movimiento circular uniforme** si $r(t)$ es constante y además $\dot{\omega} = \alpha = 0$, esto es ω es constante y por tanto la aceleración angular se anula. Por lo que las relaciones se simplifican en

$$\vec{v}(t) = r\,\omega\,\hat{e}_\phi, \quad \vec{a}(t) = -r\,\omega^2\,\hat{e}_r. \tag{2.35}$$

2.6 Nociones de Cálculo Diferencial e Integral Útiles

Nos serán de utilidad las siguientes relaciones

$$\frac{dc}{dt} = 0, \quad \frac{dt}{dt} = 1, \quad \frac{dt^2}{dt} = 2t,$$

$$\int_{t_0}^{t} c\,dt = c(t - t_0), \quad \int_{t_0}^{t} c\,t\,dt = \frac{c}{2}\,(t^2 - t_0^2),$$

en la cuales c es una constante arbitraria. Estas expresiones pueden obtenerse de la definición de derivada dada más arriba en términos de un límite y entendiendo a la **integral definida** de una función f como el cálculo de su *antiderivada*, esto es de la función g menos la misma función g evaluada en límite inferior t_0 que al ser derivadas nos dan f.
Finalmente, se utilizan las relaciones

$$\frac{d\,\cos(\omega\,t)}{dt} = -(\alpha\,t + \omega)\sin(\omega\,t), \quad \frac{d\,\sin(\omega\,t)}{dt} = (\alpha\,t + \omega)\cos(\omega\,t),$$

con $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ que para $\omega =$constante se simplifican como

$$\frac{d\,\cos(\omega\,t)}{dt} = -\omega\sin(\omega\,t), \quad \frac{d\,\sin(\omega\,t)}{dt} = \omega\cos(\omega\,t),$$

Todas estas expresiones son fáciles de obtener aplicando directamente la definición de derivada mediante el proceso de límite, o bien entendiendo a la operación de integración mediante el concepto de *antiderivación*, esto es, como la operación inversa a la de la derivada, suponinedo obviamente la existencia de ambas para las funciones de que se trate.