

Unidad 3

i.) Sistemas de Partículas

*Geburt, und Paarung, und Tod.
Das ist alles, was besteht,
wenn's um's Ganze geht:
Geburt, und Paarung, und Tod.*
T.S. ELLIOT

3.1 Sistemas de Partículas. Centro de Masas

Definimos a un **sistema de N partículas** como un conjunto de N tríadas de coordenadas (x_i, y_i, z_i) en \mathbb{R}^3 , en donde $i = 1, 2, \dots, N$, para el cual asociamos con la i -ésima tríada a la masa inercial m_i . **DEF.**

Para estudiar el comportamiento mecánico de un sistema de N partículas partimos del estudio de sus posiciones por medio de los vectores de posición $\vec{r}_i(t) = x_i(t)\hat{i} + y_i(t)\hat{j} + z_i(t)\hat{k}$. Usamos como base la segunda ley de Newton para describir el movimiento de cada partícula

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

en donde \vec{F}_i es la fuerza neta actuado sobre la partícula i -ésima y $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ es la **cantidad de movimiento lineal** o **momento** de la partícula i -ésima con masa *inercial* m_i y velocidad $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$. Otra manera de llamar al momento lineal es **ímpetu**. Este es un conjunto de $3N$ ecuaciones escalares. **DEF.**

Para el análisis subsecuente es de gran utilidad la definición del vector de posición del **centro de masas** como el lugar geométrico **DEF.**

Las definiciones mas relevantes estan marcadas en los márgenes mediante **DEF.** y los resultados u observaciones más importantes mediante **IMP.**

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \quad (3.2)$$

DEF. en donde la **masa total** del sistema es simplemente

$$M = \sum_{k=1}^N m_k. \quad (3.3)$$

La introducción del centro de masas nos va a llevar a una simplificación muy grande del problema como veremos a continuación. Como es fácil darse cuenta, las coordenadas del centro de masa no necesariamente coinciden con las coordenadas de ninguna de las partículas del sistema, aunque tal cosa pudiera suceder. Considerando masas constantes en el tiempo, obtenemos para la velocidad del centro de masas la expresión

$$\vec{v}_{C.M.} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k \quad (3.4)$$

Si ahora definimos al **momento lineal del centro de masas** como $\vec{p}_{C.M.} =$

DEF. $M\vec{v}_{C.M.}$ llegamos a que

$$\vec{p}_{C.M.} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k = \vec{P} \quad (3.5)$$

en donde \vec{P} es la suma de todos los momentos lineales de las N partículas. Así pues, concluimos que **el momento lineal del centro de masas es igual al momento lineal total para un sistema de partículas de masas constantes.**

IMP.

Si ahora sumamos las $3N$ ecuaciones del movimiento obtenemos que

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}}, \quad (3.6)$$

en donde \vec{F} es la fuerza neta que actúa sobre el sistema. Como acabamos de ver, ésta ecuación conduce a que

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}_{C.M.}, \quad (3.7)$$

la cual nos dice que *el centro de masa se comporta como una partícula puntual*

IMP. *bajo al acción de la fuerza neta \vec{F} .*

Debido a la simplicidad de la ecuación del movimiento para el centro de masa resulta conveniente introducir un sistema de coordenadas Cartesiano cuyo origen es el centro de

masas mismo. Desde un marco de referencia con origen en el centro de masas tenemos las siguientes expresiones. Para el vector de posición desde el centro de masa

$$\vec{r}_i' = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k (\vec{r}_i - \vec{r}_k) = \vec{r}_i - \vec{r}_{c.m.} \quad (3.8)$$

Para la velocidad desde el centro de masa

$$\vec{v}_i' = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_i - \vec{v}_k) = \vec{v}_i - \vec{v}_{c.m.} \quad (3.9)$$

Para el momento lineal desde el centro de masa

$$\vec{p}_i' = \frac{m_i}{M} \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_i - \vec{v}_k) = \vec{p}_i - \frac{m_i}{M} \vec{p}_{c.m.} \quad (3.10)$$

Sumando vectorialmente ahora todos los momentos individuales, obtenemos al momento total en el sistema de coordenadas del centro de masas

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N m_i m_k (\vec{v}_i - \vec{v}_k) = \vec{0}. \quad (3.11)$$

Esto es, *la cantidad de movimiento total desde el centro de masas siempre se anula*. La razón de ello es simplemente geométrica ya que no hicimos ninguna suposición dinámica adicional. IMP.

3.2 Conservación de la Cantidad de Movimiento

Para simplificar el análisis, separamos a la fuerza neta en la suma de las fuerzas \vec{F}_{ext} cuyo origen se encuentra fuera del sistema, a las que llamaremos **fuerzas externas**, y las fuerzas \vec{F}_{int} cuyos orígenes se encuentran en cualquiera de las partículas del sistema, a las que llamaremos **fuerzas internas** DEF.

$$\vec{F} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} \quad (3.12)$$

Ahora haremos dos suposiciones razonables acerca de la fuerzas internas. Primero supondremos que las fuerzas internas son solamente entre parejas de partículas, esto es, no consideraremos ni fuerzas de tres ó más partículas, como tampoco “autofuerzas” o fuerzas de una partícula sobre sí misma. Con ésta suposición podemos escribir que

$$\vec{F}_{int} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,int} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}, \quad \vec{F}_{ii} = \vec{0}. \quad (3.13)$$

Seguidamente supondremos que las todas las fuerzas entre parejas de partículas satisfacen la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad (3.14)$$

en donde \vec{F}_{ij} es la fuerza que la partícula i -ésima experimenta debido a la partícula j -ésima, o dicho de otro modo, la fuerza que la partícula j -ésima ejerce sobre la partícula i -ésima. Con ésta segunda suposición obtenemos que la fuerza neta interna se anula exactamente dado que por cada término \vec{F}_{ij} hay un término $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ y su suma se cancela

$$\vec{F}_{int} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{ij} + \cdots + \vec{F}_{ji} + \cdots + \vec{F}_{N-1,N} = \vec{0}. \quad (3.15)$$

Esto nos lleva a

$$\vec{F}_{ext} = \dot{\vec{p}}_{C.M.} \quad (3.16)$$

Si la fuerza neta externa se anula, el miembro izquierdo de esta ecuación se anula y obtenemos $\dot{\vec{p}}_{C.M.} = \vec{0}$. Ó sea que la cantidad de movimiento total se conserva

$$\vec{P} = \text{constante}. \quad (3.17)$$

Este importante resultado es conocido como el **principio de conservación de**

IMP. **la cantidad de movimiento.** Será utilizado constantemente en este curso. A los sistemas para los cuales la fuerza neta externa se anula se les denomina comúnmente

DEF. *sistemas aislados.*

3.3 Momento Angular

Usando como base a las ecuaciones de movimiento es posible deducir varios resultados de gran importancia, ya vimos al principio de conservación de la cantidad de movimiento. Multiplicando ahora vectorialmente (*producto cruz*) con el vector de posición a las ecuaciones del movimiento, obtenemos

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{x,i} & F_{y,i} & F_{z,i} \end{vmatrix} = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.18)$$

En donde definimos al producto $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, como la **torca** ó **momento** asociado a la fuerza \vec{F} aplicada en el punto \vec{r} . Estas ecuaciones no contienen ninguna información adicional a la ya contenida en las ecuaciones del movimiento.

Si ahora sumamos sobre el subíndice i

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (3.19)$$

En esta ecuación τ es la torca total y hemos utilizado que el producto cruz de dos vectores paralelos, en este caso \vec{v}_i y $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, se anula $\vec{v}_i \times \vec{p}_i = \vec{0}$. Aquí es conveniente definir al **momento angular** de una partícula puntual por medio del vector

DEF.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \quad (3.20)$$

y al **momento angular total** de un sistema de partículas como la suma vectorial siguiente

DEF.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i. \quad (3.21)$$

Separando ahora a las fuerzas en fuerzas externas y fuerzas internas (binarias solamente) que actúan sobre la partícula i -ésima $\vec{F}_{i,int} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{i,j}$, encontramos que

$$\vec{\tau}_{ext} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} = \dot{\vec{L}}. \quad (3.22)$$

Si ahora separamos la suma doble en dos sumas, una para $i < j$ y otra para $i > j$ y usamos que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ obtenemos

$$\vec{\tau}_{ext} + \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j} = \dot{\vec{L}}. \quad (3.23)$$

Ahora notemos que si el vector $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ es paralelo a la fuerza $\vec{F}_{i,j}$, esto es, *si el vector que une a la partícula i -ésima con la j -ésima es paralelo a la fuerza entre ambas partículas*, entonces su producto cruz se anula y llegamos a que

IMP.

$$\vec{\tau}_{ext} = \dot{\vec{L}}. \quad (3.24)$$

Por lo cual, si la torca neta externa se anula la derivada con respecto al tiempo del momento angular total se anula $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$, obteniendo como resultado al llamado **principio de conservación de la cantidad de movimiento angular**

IMP.

$$\vec{L} = \text{constante}, \quad (3.25)$$

para un sistema aislado.

El momento angular total medido desde un marco de referencia con origen en el centro de masas se calcula partiendo de la definición y de las expresiones para los vectores de posición y de momento lineal ec.(??) y ec.(??), obteniéndose

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{L}'_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i = \vec{L} - \vec{L}_{c.m.}, \quad (3.26)$$

en donde el momento angular del centro de masas está definido como $\vec{L}_{c.m.} = \vec{r}_{c.m.} \times M\vec{v}_{c.m.} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{P}$, siendo \vec{P} el momento lineal total.

La torca total vista desde el sistema del centro de masas se calcula igualmente, resultando

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{\tau}'_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau} - \vec{\tau}_{c.m.}, \quad (3.27)$$

con $\vec{\tau}_{c.m.} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{F}_{ext}$.

3.4 Energía y Trabajo

Definamos al trabajo para un sistema de partículas como a la suma de los trabajos inviduales

DEF.

$$W = \sum_{i=1}^N \int_{A_i}^{B_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i. \quad (3.28)$$

En donde la trayectoria de integración une a las coordenadas iniciales $A = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ al tiempo t_A con las coordenadas finales $B = \{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ al tiempo t_B . Usando ahora las ecuaciones del movimiento $\vec{F}_i = m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i$ y que $(\frac{d}{dt} \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v_i^2$, llegamos a

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} (v_i^2) dt = E_{cin}(B) - E_{cin}(A) = \Delta_{A \rightarrow B} E_{cin}. \quad (3.29)$$

IMP.

en donde llamamos a $\Delta_{A \rightarrow B} E_{cin}$ *el cambio en la energía cinética de A a B*, y $E_{cin}(A)$, $E_{cin}(B)$ son las energías cinéticas totales en los puntos A y B. Hemos definido a la energía cinética de un sistema de partículas por medio de la suma de las energías cinéticas de todas las partículas que constituyen al sistema

$$E_{cin} = \sum_{i=1}^N E_{cin,i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (3.30)$$

Ahora separemos a la fuerza neta en fuerzas internas e externas (solo entre parejas de partículas). Ello nos lleva a la definición de trabajo interno W_{int} y trabajo externo W_{ext}

$$W_{int} = \sum_{i < j} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}, \quad W_{ext} = \sum_{i=1}^N \int_A^B \vec{F}_{i,ext} \cdot d\vec{r}_i. \quad (3.31)$$

La suma corre sobre todos los subíndices $i = 1, \dots, N$ y $j = 1, \dots, N$ bajo la condición $i < j$. Además, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, es el vector de posición de la partícula j -ésima respecto a la i -ésima. A continuación supondremos que *todas las fuerzas internas son conservativas*, esto es, que pueden ser escritas como menos el gradiente de potenciales escalares $U_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla} U_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) = -\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y_{ij}} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right) U_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}). \quad (3.32)$$

Esta ecuación es equivalente a decir que el trabajo asociado con estas fuerzas no depende de la trayectoria de integración, sino únicamente de los límites de integración, ya que

$$\int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = - \int_A^B \left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{ij}} dx_{ij} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_{ij}} dy_{ij} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_{ij}} dz_{ij} \right) = - \int_A^B dU_{ij} = \Delta U_{ij}. \quad (3.33)$$

Con ello tendremos finalmente

$$W_{int} = - \sum_{i < j} \{ U_{ij}(x_{ij}(t_B), y_{ij}(t_B), z_{ij}(t_B)) - U_{ij}(x_{ij}(t_A), y_{ij}(t_A), z_{ij}(t_A)) \}. \quad (3.34)$$

Con lo cual tendremos al siguiente resultado conocido como **teorema del trabajo y la energía** para un sistema de partículas

DEF.

$$W_{ext} = \Delta_{A \rightarrow B} E_{int}. \quad (3.35)$$

En donde

$$E_{int} = E_{cin} + U_{int}, \quad (3.36)$$

es la **energía interna** del sistema, siendo $U_{int} = \sum_{i < j} U_{ij}$ la energía potencial total del sistema. Así pues, el trabajo efectuado por las fuerzas externas U_{ext} es igual al cambio en la energía interna del sistema.

DEF.

Si adicionalmente, todas las fuerzas externas son también conservativas, esto es, nos permiten escribir

$$W_{ext} = - \sum_{i=1}^N U_{i,ext}(x(t_B), y(t_B), z(t_B)) - U_{i,ext}(x(t_A), y(t_A), z(t_A)) = -\Delta_{A \rightarrow B} U_{ext}, \quad (3.37)$$

en la que U_{ext} es la energía potencial total externa. Entonces, tendremos que

$$\Delta_{A \rightarrow B} E = 0, \quad (3.38)$$

en donde $E = E_{cin} + U_{int} + U_{ext}$ es la energía total del sistema. Este resultado es conocido como el **principio de conservación de la energía** y es fundamental en Física, dado que las interacciones de la naturaleza más importantes conocidas son conservativas.

IMP.

3.5 Impulso

Dado que en general la manera en que una fuerza actúa sobre un sistema de partículas puede ser bastante complicada, resulta adecuado definir a la fuerza promedio que es ejercida sobre un cuerpo. Para ello partimos de la ecuación de movimiento y la integramos entre los tiempos t_1 y t_2 en que queremos analizar la interacción

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p}. \quad (3.39)$$

Del lado derecho tenemos simplemente el cambio en el momento lineal ó ímpetu. A la cantidad del lado izquierdo se le denomina el **impulso** y lo escribimos como

DEF.

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \quad (3.40)$$

Claramente las unidades físicas del impulso son las mismas que las del momento lineal. A las fuerzas que son ejercidas durante un pequeño intervalo de tiempo se les denomina **fuerzas impulsivas**. Ahora bien, si queremos definir a la **fuerza promedio** $\langle \vec{F} \rangle$

DEF.

ejercida en el intervalo (t_1, t_2) nos bastará con dividir al impulso por el tiempo transcurrido $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\vec{J}}{\Delta t}. \quad (3.41)$$

3.6 Coordenadas polares

En diversos problemas es importante elegir el sistema de coordenadas más adecuado. Tal situación ocurre con frecuencia cuando se analizan problemas relacionados con rotaciones ó giros. En esta sección recordamos algunos resultados bien conocidos para el estudiante sobre coordenadas polares en el plano $x - y$. Para ello partimos de las relaciones

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}, \quad x = r \cos(\phi), \quad y = r \sen(\phi). \quad (3.42)$$

Dado que siempre podemos escribir a un vector, en nuestro caso \vec{r} como el producto de su módulo r por un vector unitario, llamémosle \hat{e}_r . Tenemos entonces claramente que

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad \hat{e}_r = \cos(\phi) \hat{i} + \sen(\phi) \hat{j}, \quad \text{con } |\hat{e}_r| = 1. \quad (3.43)$$

Es fácil ver que efectivamente $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = \cos^2(\phi) + \sen^2(\phi) = 1$.

Ahora bien, estamos interesados en la descripción del movimiento de una partícula en el plano $x - y$ como función del tiempo. El vector de posición $\vec{r}(t)$ depende en general del tiempo y por ende su módulo $r(t)$ y su dirección determinada por $\hat{e}_r(t)$ dependerán lógicamente también del tiempo. Para escribir las ecuaciones del movimiento de cada partícula necesitamos primero evaluar las dos primeras derivadas de \vec{r} con respecto al tiempo. Calculamos pues, usando la regla de Leibniz,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r, \quad \dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\phi} (-\sen(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j}). \quad (3.44)$$

En donde hemos escrito por ejemplo $\dot{\phi} = d\phi/dt$, etcétera.

DEF.

Llamaremos **velocidad angular** al vector $\vec{\omega}$ cuyo módulo (signado) está dado por

la rapidez angular $\omega = \dot{\phi}$. El vector que aparece entre paréntesis en la última ecuación y que definimos como

$$\hat{e}_\phi = -\text{sen}(\phi)\hat{i} + \text{cos}(\phi)\hat{j}, \quad (3.45)$$

es también un vector unitario, esto es $\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = 1$. Más aún, este vector es **ortogonal** al vector unitario \hat{e}_r en la dirección de \vec{r} , ya que $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = 0$. Notese también que $\hat{i} = \text{cos}(\phi)\hat{e}_r - \text{sen}(\phi)\hat{e}_\phi$ y que $\hat{j} = \text{sen}(\phi)\hat{e}_r + \text{cos}(\phi)\hat{e}_\phi$. Con ello podemos concluir que la velocidad tendrá usualmente una componente $\dot{r}(t)$ en la dirección del vector de posición mas una componente transversal o perpendicular a dicho vector dada por $r\dot{\phi}(t)$. Vemos así que

$$\dot{\hat{e}}_r = \omega \hat{e}_\phi, \quad \text{y} \quad \dot{\hat{e}}_\phi = -\omega \hat{e}_r, \quad (3.46)$$

y que

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \omega \hat{e}_\phi. \quad (3.47)$$

Nótese que $\vec{v}(t)$ **NO** es igual a $\dot{r} \hat{e}_r$, lo cual sólo puede ocurrir para cuando la rapidez angular se anula, $\omega = 0$.

Finalmente, necesitamos obtener a la aceleración que estará dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2) \hat{e}_r + (2\omega\dot{r} + r\alpha) \hat{e}_\phi, \quad (3.48)$$

con la **aceleración angular** $\vec{\alpha}$ definida como aquel vector cuyo módulo (con signo) está dado por la derivada temporal de la rapidez angular $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$. El término $-r\omega^2\hat{e}_r$ es llamado **aceleración centrípeta**, el término $2\omega\dot{r}\hat{e}_\phi$ es llamado **aceleración de Coriolis** y el término $r\alpha\hat{e}_\phi$ es la **aceleración transversal**. DEF.

Finalizamos esta sección calculando al momento angular para el movimiento de una partícula en el plano $x - y$. Obtenemos que

$$\vec{L}(t) = m \vec{r} \times \vec{v} = m(r \hat{e}_r) \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \omega \hat{e}_\phi) = m r^2 \omega \hat{k}, \quad (3.49)$$

dado que tenemos que $\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi = \hat{k}$, así como $\hat{e}_r \times \hat{e}_r = \vec{0}$. Esto es, *el momento angular es perpendicular al plano del movimiento*. En esta última fórmula reconocemos al modulo (con signo) de la velocidad angular ω multiplicado por el vector unitario \hat{k} . Por ello, se define a la **velocidad angular** como el vector $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ con $\omega = \dot{\phi}$ y siendo \hat{k} un vector unitario que apunta en la dirección instantánea del eje de rotación. Si además definimos a la constante $I = mr^2$ (conocida como momento principal de inercia), tendremos para la partícula puntual IMP.

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (3.50)$$

En el caso de un movimiento en el plano $x - y$ es claro que dicha dirección es la del eje z . En tal caso, en coordenadas cartesianas tenemos que $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ y que $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$, con lo que ahora DEF.

$$\vec{L} = m(xv_y - yv_x)\hat{k}. \quad (3.51)$$

Pero como $v_x = \dot{r}\cos(\phi) - r\omega\sin(\phi)$, y $v_y = \dot{r}\sin(\phi) + r\omega\cos(\phi)$, este resultado coincide con el anterior dado por la ec.(??).

3.7 Colisiones

Entendemos por una **colisión** ó *impacto* a una interacción entre dos cuerpos cuya duración es muy corta. Además pensamos que el sistema formado por los dos cuerpos durante la colisión está aislado, por lo que todas las fuerzas actuando son internas. Si además (como hemos supuesto para la demostración de la conservación de la cantidad de movimiento lineal total) suponemos ahora que todas las fuerzas internas son binarias y satisfacen la tercer ley de Newton, entonces **en una colisión se conservará la cantidad de movimiento total**. Esto es $\Delta\vec{P} = \vec{0}$. Esta será la parte mas importante para resolver problemas simples de colisiones para sistemas aislados. Si consideramos a dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con momentos iniciales \vec{p}_{1i} y \vec{p}_{2i} antes de la colisión y momentos finales \vec{p}_{1f} y \vec{p}_{2f} después de la colisión, tendremos

IMP.

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}. \quad (3.52)$$

Ahora bien, consideraremos dos tipos de colisiones. A aquellas colisiones para las cuales la energía cinética se conserva, $\Delta E_{cin} = 0$, las llamaremos **colisiones elásticas** y a aquellas para las cuales la energía cinética **no** se conserva las llamaremos **colisiones**

DEF.

inelásticas.

Para colisiones elásticas tenemos entonces la condición adicional

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}. \quad (3.53)$$

Consideraremos aquí solamente un tipo de colisiones inelásticas: llamaremos **colisiones completamente inelásticas** aquellas colisiones inelásticas para las cuales los dos cuerpos quedan unidos después de la colisión. A estas colisiones también se les denomina *impactos plásticos*. En tal caso, no se conserva la energía cinética pero el problema es aún más sencillo por que al final tenemos solamente a un cuerpo de masa $M = m_1 + m_2$ y momento \vec{P}_f . Por la conservación del momento lineal se seguirá que

DEF.

$$m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = M\vec{P}_f, \quad (3.54)$$

que nos bastará para resolver este caso.

Finalmente, para problemas en *una sola dimensión*, las ecuaciones anteriores se simplifican notoriamente. La ec.(??) expresada en términos de las velocidades es equivalente a

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}). \quad (3.55)$$

A la condición de conservación de la energía cinética para colisiones elásticas la podemos reescribir de la siguiente forma

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \quad (3.56)$$

Por lo que dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones se llega a

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}, \quad (3.57)$$

la cual junto con la ec.(??) nos permite escribir

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{M}v_{1i} + \frac{2m_2}{M}v_{2i}, \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{M}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{M}v_{2i}. \quad (3.58)$$