5.2. Autómatas de pila no deterministas (AFPN)

Un **autómata finito de pila no determinista** (AFPN), esta definido por:

$$M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Gamma, s_0, \Delta)$$

el cual consta de los mismos siete parámetros de un AFPD, pero la función de transición Δ es de la forma:

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \lambda) \times \Gamma \rightarrow \wp_f(Q \times \Gamma^*).$$

donde $\wp_f(Q \times \Gamma^*)$ es el conjunto de subconjuntos finitos de $(Q \times \Gamma^*)$.

$$\Delta(q, a, s) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_k, \gamma_k)\}.$$

Su significado es: al leer el símbolo a sobre la cinta de entrada, la cabeza lectora o control finito, pasa (aleatoriamente) a uno de los estados p_i y se mueve a la derecha. Sobre la pila hace lo siguiente: borra el símbolo s que está en el tope y escribe la palabra γ_i (palabra que pertenece a Γ^*).

En el modelo AFPN las transiciones $\lambda, \Delta(q, \lambda, s)$, no tiene restricción alguna.

El lenguaje aceptado por un AFPN M se define como:

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* : \text{existe por lo menos un cómputo } (q_0, w, s_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \beta), p \in F\}.$$

Es decir, una palabra w es aceptada si existe por lo menos un procesamiento de w desde la configuración inicial hasta una configuración de aceptación.

Ejemplo Diseñar un AFPN que acepte el lenguaje $\{a^i b^i : i \geq 0\}$, sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Definimos un autómata similar al utilizado en el primer ejemplo de la sección 5.1, pero con un estado menos.

$M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Gamma, s_0, \Delta)$, está dado por:

$$\begin{array}{l} \Sigma = \{a, b\} \\ \Gamma = \{s_0, A, B\} \\ Q = \{q_0, q_1\} \\ F = \{q_1\} \end{array}$$

y la función de transición está dada por:

$$\begin{array}{rcl} \Delta(q_0, a, s_0) & = & \{(q_0, As_0)\} \\ \Delta(q_0, a, A) & = & \{(q_0, AA)\} \\ \Delta(q_0, b, A) & = & \{(q_0, \lambda)\} \\ \Delta(q_0, \lambda, s_0) & = & \{(q_1, s_0)\} \end{array}$$

En este autómata el no-determinismo se presenta por la presencia simultánea de $\Delta(q_0, a, s_0)$ y $\Delta(q_0, \lambda, s_0)$.

Ejemplo Diseñar un AFPN que acepte el lenguaje de todas las palabras sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que tiene igual número de a's que de b's.

$M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Gamma, s_0, \Delta)$ donde

$$\begin{array}{l} \Sigma = \{a, b\} \\ \Gamma = \{s_0, A, B\} \\ Q = \{q_0, q_1\} \\ F = \{q_1\} \end{array}$$

y la función de transición está dada por:

$$\begin{array}{lcl} \Delta(q_0, a, s_0) & = & \{(q_0, As_0)\} \\ \Delta(q_0, b, s_0) & = & \{(q_0, Bs_0)\} \\ \Delta(q_0, a, A) & = & \{(q_0, AA)\} \\ \Delta(q_0, b, B) & = & \{(q_0, BB)\} \\ \Delta(q_0, a, B) & = & \{(q_0, \lambda)\} \\ \Delta(q_0, b, A) & = & \{(q_0, \lambda)\} \\ \Delta(q_0, \lambda, s_0) & = & \{(q_1, s_0)\} \end{array}$$

Al igual que en ejemplo anterior, el no-determinismo se presenta únicamente por la presencia simultánea de $\Delta(q_0, a, s_0)$ y $\Delta(q_0, \lambda, s_0)$.

Ejemplo Diseñar un AFPN que acepte el lenguaje $L = \{ww^{-1} : w \in \Sigma^*\}$, donde $\Sigma = \{a, b\}$.

Observación: No es difícil ver que L es el lenguaje de los palíndromes de longitud par. Se puede demostrar (aunque no es fácil) que no existe ningún AFPD que acepte este lenguaje. Esto muestra que los AFPD y AFPN no son computacionalmente equivalentes, en contraste con los modelos AFD y AFN, que si lo son.

IDEA. Modificar el autómata del tercer ejemplo de la sección 5.1, permitiendo, a través del no determinismo, que el autómata "adivine" cuál es la palabra.

$M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Gamma, s_0, \Delta)$, donde

$$\begin{array}{l} \Sigma = \{a, b\} \\ \Gamma = \{s_0, A, B\} \\ Q = \{q_0, q_1, q_2\} \\ F = \{q_2\} \end{array}$$

y la función de transición está dada por:

$$
\begin{array}{lcl}
\Delta(q_0, a, s_0) & = & \{(q_0, As_0)\} \\
\Delta(q_0, b, s_0) & = & \{(q_0, Bs_0)\} \\
\Delta(q_0, \lambda, s_0) & = & \{(q_2, s_0)\} \quad \text{(para aceptar } \lambda\text{)} \\
\Delta(q_0, a, A) & = & \{(q_0, AA), (q_1, \lambda)\} \\
\Delta(q_0, a, B) & = & \{(q_0, AB)\} \\
\Delta(q_0, b, A) & = & \{(q_0, BA)\} \\
\Delta(q_0, b, B) & = & \{(q_0, BB), (q_1, \lambda)\} \\
\Delta(q_1, a, A) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\
\Delta(q_1, b, B) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\
\Delta(q_1, \lambda, s_0) & = & \{(q_2, s_0)\}
\end{array}
$$

Ejercicios Diseñar AFPD's o AFPN's que acepten los siguientes lenguajes:

1. $L = \{a^i b^j : i \neq j\}$, sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
2. $L = \{a^{2i} b^{3i} : i, j \geq 0\}$, sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
3. $L = \{a^i b^j c^k : i + k = j\}$, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$.
4. $L = \{a^i c^j b^i : i, j \geq 0\}$, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$.
5. $L = \{a^i b^j : i \leq j \leq 2i\}$, sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
6. El lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen el doble número de a's que de b's.