5.3. Autómatas de pila y LIC (Parte I)

En el tercer ejemplo de la sección 5.2, se mencionó que los modelos de autómata de pila AFPD y AFPN no son computacionalmente equivalentes, pero el modelo AFPN corresponde a los lenguajes independientes del contexto. Este es un resultado análogo al Teorema de Kleene y en esta sección consideraremos la primera parte de dicha correspondencia.

5.3.1 Teorema. *Dada una GIC G, existe un AFPN M tal que $L(G) = L(M)$.*

<u>*Demostración*</u>: Dada la gramática $G = (\Sigma, V, S, P)$ se define el autómata:
$M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Gamma, s_0, \Delta)$ estableciendo:

$$\begin{array}{l} Q = \{q_0, q_1, q_2\} \\ F = \{q_2\} \\ \Gamma = \Sigma \cup V \cup \{s_0\} \end{array}$$

La función de transición Δ se define de la siguiente manera:

$$\Delta(q_0, \lambda, s_0) = \{(q_1, Ss_0)\} \quad \text{(coloca el símbolo } S \text{ en el tope de la pila)}$$

Para cada variable $A \in V$,

$$\Delta(q_1, \lambda, A) = \{(q_1, w) : A \to w \text{ es una producción de la gramática } G\}.$$

Para cada símbolo terminal $a \in \Sigma$,

$$\begin{array}{rcl} \Delta(q_1, a, a) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\ \Delta(q_1, \lambda, s_0) & = & \{(q_2, s_0)\} \end{array}$$

El autómata M está diseñado de tal forma que si $S \Rightarrow w$ es una derivación a izquierda en la gramática G, entonces existe un procesamiento

$$(q_0, w, s_0) \overset{*}{\vdash} (q_2, \lambda, s_0)$$

que simula la derivación.

Recíprocamente, puede demostrarse que si $(q_0, w, s_0) \overset{*}{\vdash} (q_2, \lambda, s_0)$ entonces $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ en la gramática G.

Obsérvese que el autómata M tiene *siempre* tres estados.

Ejemplo Sea G la gramática:

$$G : \begin{cases} S \to aAbS \mid bBa \mid \lambda \\ A \to aA \mid a \\ B \to bB \mid b \end{cases}$$

Según la construcción indicada arriba, el autómata M está dado por:

$M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Gamma, s_0, \Delta)$ donde

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2\} \\ F &= \{q_2\} \\ \Gamma &= \{a, b, S, A, B, s_0\} \end{aligned}$$

La función de transición Δ está dada por:

$$\begin{array}{lcl} \Delta(q_0, \lambda, s_0) & = & \{(q_1, Ss_0)\} \\ \Delta(q_1, \lambda, S) & = & \{(q_1, aAbS), (q_1, bBa), (q_1, \lambda)\} \\ \Delta(q_1, \lambda, A) & = & \{(q_1, aA), (q_1, a)\} \\ \Delta(q_1, \lambda, B) & = & \{(q_1, bB), (q_1, b)\} \\ \Delta(q_1, a, a) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\ \Delta(q_1, b, b) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\ \Delta(q_1, \lambda, s_0) & = & \{(q_2, s_0)\} \end{array}$$

Podemos ilustrar la correspondencia entre derivaciones en G y procesamientos en M con la palabra $aabbba$, la cual tiene la siguiente derivación a izquierda:

$$S \Rightarrow aAbS \Rightarrow aabS \Rightarrow aabbBa \Rightarrow aabbba$$

El autómata M simula esta derivación de la palabra $aabbba$ así:

$$\begin{array}{rcl} (q_0, aabbba, s_0) & \vdash & (q_1, aabbba, Ss_0) \vdash (q_1, aabbba, aAbSs_0) \vdash (q_1, abbba, AbSs_0) \\ & \vdash & (q_1, abbba, abSs_0) \vdash (q_1, bbba, bSs_0) \vdash (q_1, bba, Ss_0) \\ & \vdash & (q_1, bba, bBas_0) \vdash (q_1, ba, Bas_0) \vdash (q_1, ba, bas_0) \\ & \vdash & (q_1, a, as_0) \vdash (q_1, \lambda, s_0) \vdash (q_2, \lambda, s_0) \end{array}$$

Ejemplo La siguiente gramática G genera los palíndromes de longitud par sobre $\Sigma = \{a, b\}$, es decir, el lenguaje $L = \{ww^{-1} : w \in \Sigma^*\}$ del tercer ejemplo de la sección 5.2.

$$S \to aSa \mid bSb \mid \lambda$$

Siguiendo el procedimiento del Teorema 5.3.1 podemos construir un AFPN que acepta L; este autómata es diferente del exhibido en el tercer ejemplo de la sección 5.2.

$M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Gamma, s_0, \Delta)$ donde

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2\} \\ F &= \{q_2\} \\ \Gamma &= \{a, b, S, s_0\} \end{aligned}$$

La función de transición Δ está dada por:

$$\begin{array}{lcl} \Delta(q_0, \lambda, s_0) & = & \{(q_1, Ss_0)\} \\ \Delta(q_1, \lambda, S) & = & \{(q_1, aSa), (q_1, bSb), (q_1, \lambda)\} \\ \Delta(q_1, a, a) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\ \Delta(q_1, b, b) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\ \Delta(q_1, \lambda, s_0) & = & \{(q_2, s_0)\} \end{array}$$

Ejercicio Construir un AFPN M que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$G : \begin{cases} S \to Aba \mid AB \mid \lambda \\ A \to aAS \mid a \\ B \to bBA \mid \lambda \end{cases}$$

Encontrar una derivación a izquierda en G de la palabra $w = aaababa$ y procesar luego la palabra w con el autómata M, simulando la derivación.

Ejercicio Construir un AFPN M que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$G : \begin{cases} S \to ASA \mid AaA \mid aa \\ A \to AbA \mid \lambda \end{cases}$$

Encontrar una derivación a izquierda en G de la palabra $w = bab$ y procesar luego la palabra w con el autómata M, simulando la derivación.