

EXERCISES FOR SECTION 4.3

PART II

- | | | | | |
|------|----|--|---------|---|
| (9) | 1. | $\sim(\sim A \vee \sim B)$ | PR | $\therefore A \& B$ |
| | 2. | $\sim\sim A \& \sim\sim B$ | DeM 1 | |
| | 3. | $A \& \sim\sim B$ | DN 2 | |
| | 4. | $A \& B$ | DN 3 | |
| (10) | 1. | $A \& B$ | PR | $\therefore \sim(\sim A \vee \sim B)$ |
| | 2. | $A \& \sim\sim B$ | DN 1 | |
| | 3. | $\sim\sim A \& \sim\sim B$ | DN 2 | |
| | 4. | $\sim(\sim A \vee \sim B)$ | DeM 3 | |
| (12) | 1. | $G \rightarrow H$ | PR | $\therefore \sim(G \& \sim H)$ |
| | 2. | $\sim G \vee H$ | Impl 1 | |
| | 3. | $\sim G \vee \sim\sim H$ | DN 2 | |
| | 4. | $\sim(G \& \sim H)$ | DeM 3 | |
| (13) | 1. | $\sim(G \& \sim H)$ | PR | $\therefore G \rightarrow H$ |
| | 2. | $\sim G \vee \sim\sim H$ | DeM 1 | |
| | 3. | $\sim G \vee H$ | DN 2 | |
| | 4. | $G \rightarrow H$ | Impl 3 | |
| (14) | 1. | $\sim(J \vee K)$ | PR | $\therefore \sim\sim(\sim J \& \sim K)$ |
| | 2. | $\sim J \& \sim K$ | DeM 1 | |
| | 3. | $\sim\sim(\sim J \& \sim K)$ | DN 2 | |
| (16) | 1. | $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ | PR | $\therefore (A \& \sim B) \vee C$ |
| | 2. | $\sim(A \rightarrow B) \vee C$ | Impl 1 | |
| | 3. | $\sim(\sim A \vee B) \vee C$ | Impl 2 | |
| | 4. | $(\sim\sim A \& \sim B) \vee C$ | DeM 3 | |
| | 5. | $(A \& \sim B) \vee C$ | DN 4 | |
| (17) | 1. | $P \leftrightarrow Q$ | PR | $\therefore (\sim P \vee Q) \& (\sim Q \vee P)$ |
| | 2. | $(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$ | Equiv 1 | |
| | 3. | $(\sim P \vee Q) \& (Q \rightarrow P)$ | Impl 2 | |
| | 4. | $(\sim P \vee Q) \& (\sim Q \vee P)$ | Impl 3 | |

(18)	1.	$P \leftrightarrow Q$	PR	$\therefore \sim[(P \& \sim Q) \vee (Q \& \sim P)]$
	2.	$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$	Equiv 1	
	3.	$(\sim P \vee Q) \& (Q \rightarrow P)$	Impl 2	
	4.	$(\sim P \vee Q) \& (\sim Q \vee P)$	Impl 3	
	5.	$(\sim P \vee \sim\sim Q) \& (\sim Q \vee P)$	DN 4	
	6.	$(\sim P \vee \sim\sim Q) \& (\sim Q \vee \sim\sim P)$	DN 5	
	7.	$\sim(P \& \sim Q) \& (\sim Q \vee \sim\sim P)$	DeM 6	
	8.	$\sim(P \& \sim Q) \& \sim(Q \& \sim P)$	DeM 7	
	9.	$\sim[(P \& \sim Q) \vee (Q \& \sim P)]$	DeM 8	

(20)	1.	$\sim[\sim(\sim P \vee Q) \vee \sim(\sim Q \vee P)]$	PR	$\therefore P \leftrightarrow Q$
	2.	$\sim\sim((\sim P \vee Q) \& (\sim Q \vee P))$	DeM 1	
	3.	$(\sim P \vee Q) \& (\sim Q \vee P)$	DN 2	
	4.	$(P \rightarrow Q) \& (\sim Q \vee P)$	Impl 3	
	5.	$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$	Impl 4	
	6.	$P \leftrightarrow Q$	Equiv 5	

(21)	1.	$\sim[(H \vee J) \vee (J \rightarrow K)]$	PR	$\therefore (\sim H \& \sim J) \& (J \& \sim K)$
	2.	$\sim[(H \vee J) \vee (\sim J \vee K)]$	Impl 1	
	3.	$\sim(H \vee J) \& \sim(\sim J \vee K)$	DeM 2	
	4.	$(\sim H \& \sim J) \& \sim(\sim J \vee K)$	DeM 3	
	5.	$(\sim H \& \sim J) \& (\sim\sim J \& \sim K)$	DeM 4	
	6.	$(\sim H \& \sim J) \& (J \& \sim K)$	DN 5	

(22)	1.	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	PR	
		$\therefore [A \rightarrow ((B \rightarrow C) \& (C \rightarrow B))] \& [((B \rightarrow C) \& (C \rightarrow B)) \rightarrow A]$		
	2.	$(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \& ((B \leftrightarrow C) \rightarrow A)$	Equiv 1	
	3.	$[A \rightarrow ((B \rightarrow C) \& (C \rightarrow B))] \& [(B \leftrightarrow C) \rightarrow A]$	Equiv 2	
	4.	$[A \rightarrow ((B \rightarrow C) \& (C \rightarrow B))] \& [((B \rightarrow C) \& (C \rightarrow B)) \rightarrow A]$	Equiv 3	

PART III

(24)	1.	$A \rightarrow B$	PR	
	2.	$A \& C$	PR	$\therefore B$
	3.	A	CE 2	
	4.	B	MP 1,3	

(25)	1.	$A \rightarrow B$	PR	
	2.	$A \rightarrow \sim B$	PR	
	3.	A	PR	$\therefore \sim A$
	4.	$\sim B$	MP 2,3	
	5.	$\sim A$	MT 1,4	

(26)	1.	$\sim A \vee B$	PR	
	2.	$\sim C \vee \sim B$	PR	
	3.	A	PR	$\therefore \sim C$
	4.	$A \rightarrow B$	Impl 1	
	5.	B	MP 3,4	
	6.	$\sim\sim B$	DN 5	
	7.	$C \rightarrow \sim B$	Impl 2	
	8.	$\sim C$	MT 6,7	
(28)	1.	$\sim(P \& Q)$	PR	
	2.	P	PR	$\therefore \sim Q$
	3.	$\sim P \vee \sim Q$	DeM 1	
	4.	$\sim\sim P \rightarrow \sim Q$	Impl 3	
	5.	$P \rightarrow \sim Q$	DN 4	
	6.	$\sim Q$	MP 2,5	
(29)	1.	$\sim(P \& Q)$	PR	
	2.	Q	PR	$\therefore \sim P$
	3.	$\sim P \vee \sim Q$	DeM 1	
	4.	$\sim\sim P \rightarrow \sim Q$	Impl 3	
	5.	$P \rightarrow \sim Q$	DN 4	
	6.	$\sim\sim Q$	DN 2	
	7.	$\sim P$	MT 5,6	
(30)	1.	$\sim H \leftrightarrow \sim J$	PR	
	2.	H	PR	$\therefore J$
	3.	$(\sim H \rightarrow \sim J) \& (\sim J \rightarrow \sim H)$	Equiv 1	
	4.	$\sim J \rightarrow \sim H$	CE 3	
	5.	$\sim\sim H$	DN 2	
	6.	$\sim\sim J$	MT 4,5	
	7.	J	DN 6	
(31)	1.	H	PR	
	2.	J	PR	
	3.	$K \rightarrow (\sim H \vee \sim J)$	PR	$\therefore \sim K$
	4.	$H \& J$	CI 1,2	
	5.	$\sim\sim H \& J$	DN 4	
	6.	$\sim\sim H \& \sim\sim J$	DN 5	
	7.	$\sim(\sim H \vee \sim J)$	DeM 6	
	8.	$\sim K$	MT 3,7	

(32)	1.	$\sim(\sim A \vee \sim B)$	PR	
	2.	$(\sim\sim A \& B) \rightarrow C$	PR	$\therefore B \& C$
	3.	$\sim\sim A \& \sim\sim B$	DeM 1	
	4.	$\sim\sim A \& B$	DN 3	
	5.	C	MP 2,4	
	6.	B	CE 4	
	7.	B & C	CI 5,6	
(34)	1.	$(O \vee P) \rightarrow Q$	PR	
	2.	$\sim(Q \vee R)$	PR	$\therefore \sim O$
	3.	$\sim Q \& \sim R$	DeM 2	
	4.	$\sim Q$	CE 3	
	5.	$\sim(O \vee P)$	MT 1,4	
	6.	$\sim O \& \sim P$	DeM 5	
	7.	$\sim O$	CE 6	
(35)	1.	$\sim[(P \& \sim Q) \vee (Q \& \sim R)]$	PR	
	2.	P	PR	$\therefore R$
	3.	$\sim(P \& \sim Q) \& \sim(Q \& \sim R)$	DeM 1	
	4.	$\sim(P \& \sim Q)$	CE 3	
	5.	$\sim(Q \& \sim R)$	CE 3	
	6.	$\sim P \vee \sim\sim Q$	DeM 4	
	7.	$\sim Q \vee \sim\sim R$	DeM 5	
	8.	$P \rightarrow \sim\sim Q$	Impl 6	
	9.	$Q \rightarrow \sim\sim R$	Impl 7	
	10.	$P \rightarrow Q$	DN 8	
	11.	Q	MP 2,10	
	12.	$Q \rightarrow R$	DN 9	
	13.	R	MP 11,12	
(36)	1.	$\sim[F \& \sim(\sim G \vee H)]$	PR	
	2.	$(G \rightarrow H) \rightarrow F$	PR	$\therefore F \leftrightarrow (G \rightarrow H)$
	3.	$\sim F \vee \sim\sim(\sim G \vee H)$	DeM 1	
	4.	$F \rightarrow \sim\sim(\sim G \vee H)$	Impl 3	
	5.	$F \rightarrow (\sim G \vee H)$	DN 4	
	6.	$F \rightarrow (G \rightarrow H)$	Impl 5	
	7.	$[F \rightarrow (G \rightarrow H)] \& [(G \rightarrow H) \rightarrow F]$	CI 2,6	
	8.	$F \leftrightarrow (G \rightarrow H)$	Equiv 7	

(37)	1.	$\sim(F \rightarrow G)$	PR	$\therefore \sim(F \rightarrow \sim H)$
	2.	$\sim F \leftrightarrow \sim H$	PR	
	3.	$(\sim F \rightarrow \sim H) \& (\sim H \rightarrow \sim F)$	Equiv 2	
	4.	$\sim H \rightarrow \sim F$	CE 3	
	5.	$\sim(\sim F \vee G)$	Impl 1	
	6.	$\sim\sim F \& \sim G$	DeM 5	
	8.	$\sim\sim F$	CE 6	
	9.	$\sim\sim H$	MT 4,8	
	10.	$\sim\sim F \& \sim\sim H$	CI 8,9	
	11.	$\sim(\sim F \vee \sim H)$	DeM 10	
	12.	$\sim(F \rightarrow \sim H)$	Impl 11	
(38)	1.	$\sim\sim A$	PR	$\therefore \sim R$
	2.	$A \rightarrow (B \& C)$	PR	
	3.	$R \leftrightarrow \sim B$	PR	
	4.	A	DN 1	
	5.	$B \& C$	MP 2,4	
	6.	B	CE 5	
	7.	$\sim\sim B$	DN 6	
	8.	$(R \rightarrow \sim B) \& (\sim B \rightarrow R)$	Equiv 3	
	9.	$R \rightarrow \sim B$	CE 8	
	10.	$\sim R$	MT 7,9	
(40)	1.	$\sim[(W \rightarrow X) \vee (X \rightarrow W)]$	PR	$\therefore (W \& \sim W) \& (X \& \sim X)$
	2.	$\sim(W \rightarrow X) \& \sim(X \rightarrow W)$	DeM 1	
	3.	$\sim(\sim W \vee X) \& \sim(X \rightarrow W)$	Impl 2	
	4.	$\sim(\sim W \vee X) \& \sim(\sim X \vee W)$	Impl 3	
	5.	$(\sim\sim W \& \sim X) \& \sim(\sim X \vee W)$	DeM 4	
	6.	$(\sim\sim W \& \sim X) \& (\sim\sim X \& \sim W)$	DeM 5	
	7.	$\sim\sim W \& \sim X$	CE 6	
	8.	$W \& \sim X$	DN 7	
	9.	$\sim\sim X \& \sim W$	CE 6	
	10.	$X \& \sim W$	DN 9	
	11.	W	CE 8	
	12.	$\sim X$	CE 8	
	13.	X	CE 10	
	14.	$\sim W$	CE 10	
	15.	$W \& \sim W$	CI 11,14	
	16.	$X \& \sim X$	CI 12,13	
	17.	$(W \& \sim W) \& (X \& \sim X)$	CI 15,16	
(41)	1.	$\sim(\sim M \vee \sim L)$	PR	$\therefore \sim(L \rightarrow K)$
	2.	$M \rightarrow \sim(P \rightarrow \sim Q)$	PR	
	3.	$K \rightarrow \sim(P \& Q)$	PR	

	4.	$\sim\sim M \ \& \ \sim\sim L$	DeM 1	
	5.	$\sim\sim M$	CE 4	
	6.	M	DN 5	
	7.	$\sim(P \rightarrow \sim Q)$	MP 2,6	
	8.	$\sim(\sim P \vee \sim Q)$	Impl 7	
	9.	$\sim\sim P \ \& \ \sim\sim Q$	DeM 8	
	10.	$P \ \& \ \sim\sim Q$	DN 9	
	11.	$P \ \& \ Q$	DN 10	
	12.	$\sim\sim(P \ \& \ Q)$	DN 11	
	13.	$\sim K$	MT 3,12	
	14.	$\sim\sim L$	CE 4	
	16.	$\sim\sim L \ \& \ \sim K$	CI 13,14	
	17.	$\sim(\sim L \vee K)$	DeM 16	
	18.	$\sim(L \rightarrow K)$	Impl 17	
(42)	1.	$(P \vee Q) \rightarrow S$	PR	
	2.	$\sim Q \ \& \ R$	PR	
	3.	$\sim(R \rightarrow Q) \rightarrow \sim(L \rightarrow S)$	PR	$\therefore \sim P$
	4.	$\sim Q$	CE 2	
	5.	R	CE 2	
	6.	$R \ \& \ \sim Q$	CI 4,5	
	7.	$\sim\sim R \ \& \ \sim Q$	DN 6	
	8.	$\sim(\sim R \vee Q)$	DeM 7	
	9.	$\sim(R \rightarrow Q)$	Impl 8	
	10.	$\sim(L \rightarrow S)$	MP 3,9	
	11.	$\sim(\sim L \vee S)$	Impl 10	
	12.	$\sim\sim L \ \& \ \sim S$	DeM 11	
	13.	$\sim S$	CE 12	
	14.	$\sim(P \vee Q)$	MT 1,13	
	15.	$\sim P \ \& \ \sim Q$	DeM 14	
	16.	$\sim P$	CE 15	
(43)	1.	$(J \rightarrow K) \rightarrow (L \rightarrow M)$	PR	
	2.	$L \ \& \ \sim M$	PR	
	3.	$N \rightarrow K$	PR	$\therefore \sim(N \vee K)$
	4.	$\sim\sim L \ \& \ \sim M$	DN 2	
	5.	$\sim(\sim L \vee M)$	DeM 4	
	6.	$\sim(L \rightarrow M)$	Impl 5	
	7.	$\sim(J \rightarrow K)$	MT 1,6	
	8.	$\sim(\sim J \vee K)$	Impl 7	
	9.	$\sim\sim J \ \& \ \sim K$	DeM 8	
	10.	$\sim K$	CE 9	
	11.	$\sim N$	MT 3,10	
	12.	$\sim N \ \& \ \sim K$	CI 10,11	
	13.	$\sim(N \vee K)$	DeM 12	

(44)	1.	$(A \ \& \ \sim B) \vee (C \ \& \ \sim D)$	PR	
	2.	$A \rightarrow B$	PR	$\therefore \sim(\sim D \rightarrow \sim C)$
	3.	$\sim(A \ \& \ \sim B) \rightarrow (C \ \& \ \sim D)$	Impl 1	
	4.	$(\sim A \vee \sim \sim B) \rightarrow (C \ \& \ \sim D)$	DeM 3	
	5.	$(\sim A \vee B) \rightarrow (C \ \& \ \sim D)$	DN 4	
	6.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \ \& \ \sim D)$	Impl 5	
	7.	$C \ \& \ \sim D$	MP 2,6	
	8.	$\sim D$	CE 7	
	9.	C	CE 7	
	10.	$\sim D \ \& \ C$	CI 8,9	
	11.	$\sim D \ \& \ \sim \sim C$	DN 10	
	12.	$\sim(D \vee \sim C)$	DeM 11	
	13.	$\sim(\sim D \rightarrow \sim C)$	Impl 12	