

12.1. Die Funktion $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ mit $f(x) = e^{-x} - \sin x + \frac{1}{2}$

besitzt unendlich viele Nullstellen. Bestimmen Sie näherungsweise die kleinste Nullstelle mittels a) Halbierungsverfahren und b) Sekantenverfahren (jeweils die sechste Näherung). Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Vorbetrachtung:

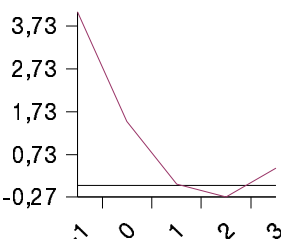
$f(x) > 1$, g.d.w. $e^{-x} + 0,5 > \sin x$

$f(x) = 0$, dann ist x Nullstelle

$f(x) < 1$, g.d.w. $e^{-x} + 0,5 < \sin x$

Wertetabelle zur Bestimmung von x_1 und x_2 :

x	f(x)
-1	4,0598
0	1,5000
1	0,0264
2	-0,2740
3	0,4087



$x_1=0$ und $x_2=\pi/2$ werden als Ausgangswerte angenommen.

Es muss eine Nullstelle dazwischen liegen.

a) Halbierungsverfahren:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_4 = \underbrace{\frac{x_3 + x_1}{2}}_{\text{für } f(x_3) > 0}, \quad x_4 = \underbrace{\frac{x_3 + x_2}{2}}_{\text{für } f(x_3) < 0}$$

Es werden iterativ die Durchschnittswerte aus zwei empirisch bestimmten Definitionswerten in der Nullstellen-Umgebung berechnet. Dabei muss je ein Ausgangswert positiv, ein anderer negativ sein.

x		f(x)
x_1	$\pi/2$	-0,29212
x_2	0,00000	1,50000
$x_3 = (x_1 + x_2)/2$	0,78540	0,24883
$x_4 = (x_1 + x_3)/2$	1,17810	-0,11602
$x_5 = (x_3 + x_4)/2$	0,98175	0,04319
$x_6 = (x_4 + x_5)/2$	1,07992	-0,04230
$x_7 = (x_5 + x_6)/2$	1,03084	-0,00102
$x_8 = (x_5 + x_7)/2$	1,00629	0,02072

b) Sekantenverfahren:

$$\frac{0 - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Bestimmen der Nullstelle durch
Sekante aus der Zweipunktgleichung.

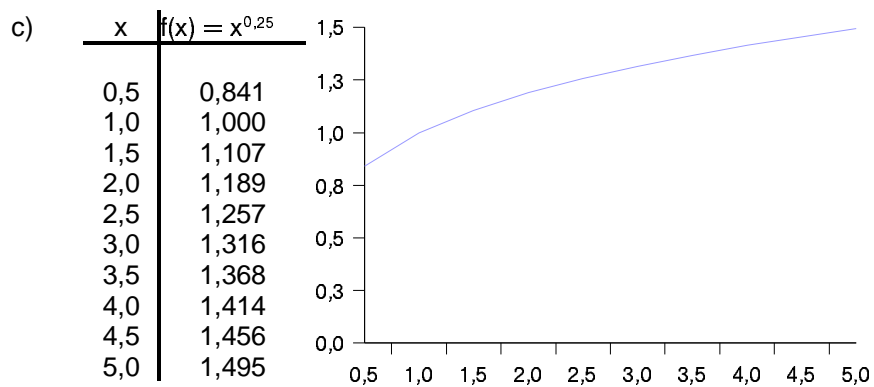
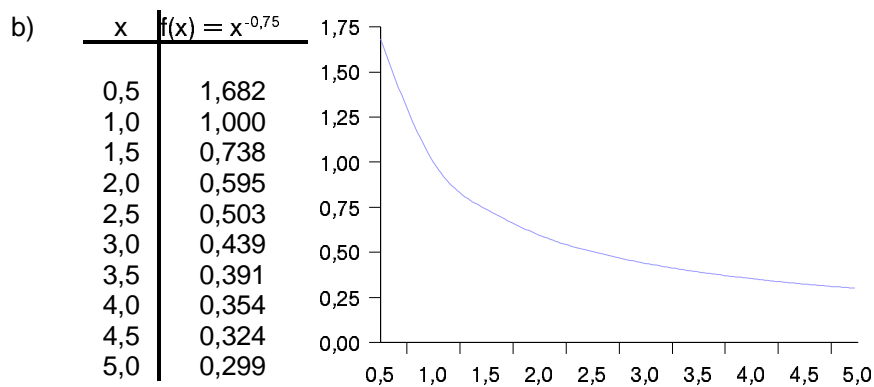
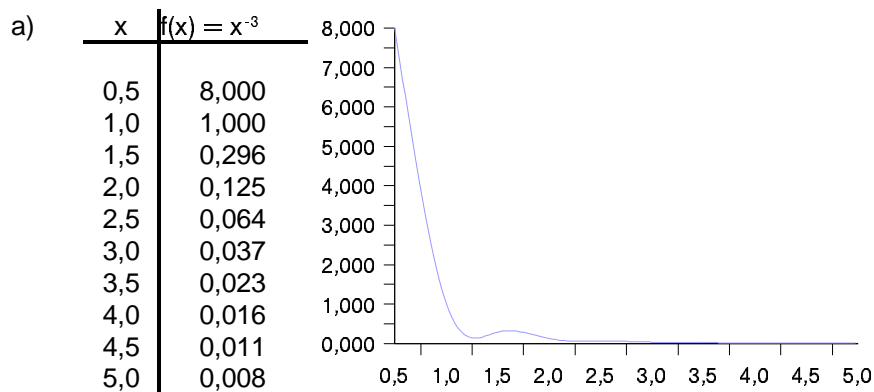
		x	f(x)
$x_3 = x_1 - \left(f(x_1) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \right)$		$\pi/2$	-0,29212
$x_4 = x_3 - \left(f(x_3) \frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)} \right)$		0	1,50000
		1,31475	-0,19886
		1,16085	-0,10393
$x_5 = x_4 - \left(f(x_4) \frac{x_2 - x_4}{f(x_2) - f(x_4)} \right)$		1,08564	-0,04691
		1,05271	-0,01978
		1,03901	-0,00810
		1,03343	-0,00328
$x_6 = x_5 - \left(f(x_5) \frac{x_2 - x_5}{f(x_2) - f(x_5)} \right)$			
$x_7 = x_6 - \left(f(x_6) \frac{x_2 - x_6}{f(x_2) - f(x_6)} \right)$			
$x_8 = x_7 - \left(f(x_7) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \right)$			

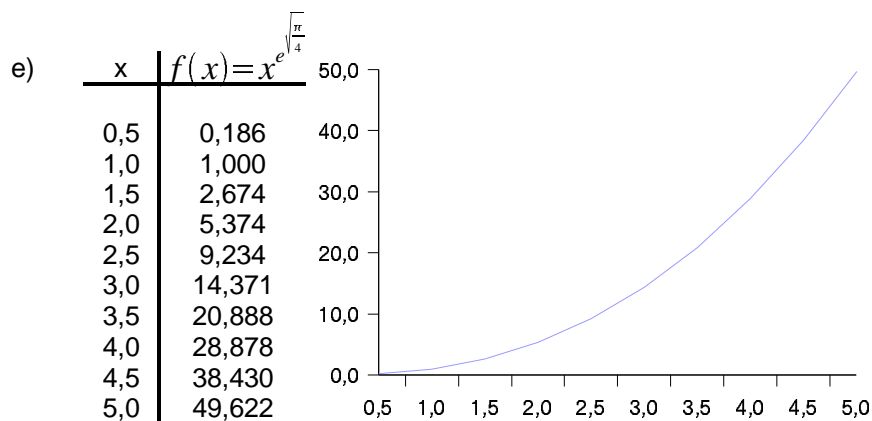
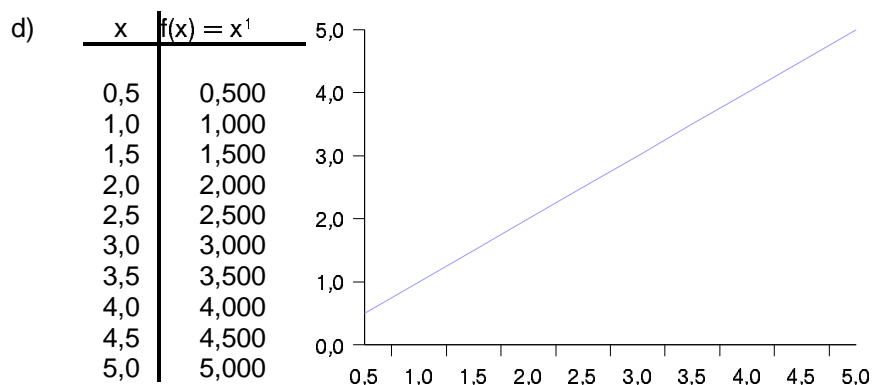
Schlussfolgerung:

Wie unschwer zu erkennen ist, lässt sich m.H. des
Sekantenverfahrens eine genauere Berechnung der Nullstellen
durchführen, bzw. die Iterationsschritte sind bei gleicher
Genauigkeit weniger.

12.2. Skizzieren Sie die Graphen je einer Potenzfunktion f mit $f(x) = x^a$, $x > 0$.

- a) $a < -1$ c) $0 < a < 1$ e) $1 < a$
 b) $-1 < a < 0$ d) $a = 1$





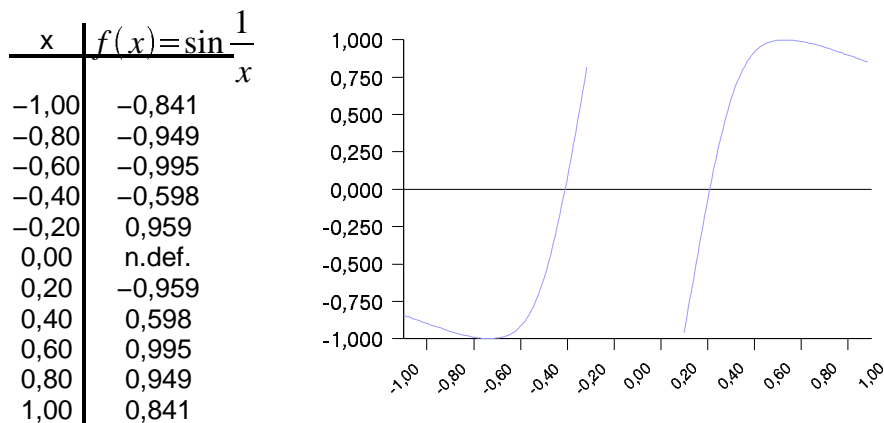
12.3. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($D(f)=?$) für x_0

keinen Grenzwert besitzt. Skizzieren Sie den Graphen in $U_4(0)$

(Hinweis: Wählen Sie geeignete Nullfolgen aus).

Die Funktion $\sin x$ ist periodisch, $1/x$ konvergiert bei $x \rightarrow \infty$ gegen Null. An der Stelle $x=0$ ist $1/x$ nicht definiert. Es existiert demzufolge kein y -Wert, bei dem $x=0$ ist.

Wertetabelle:



- 12.4. Ein Bäcker liefert Lebkuchen mit einem Soll-Durchmesser von 90mm. Der Backvorgang ist so gestaltet, dass der Lebkuchendurchmesser als normalverteilte Zufallsgröße angesehen werden kann mit dem Soll als Erwartungswert und $\sigma = 3$ mm.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- die Abweichung vom Soll nicht größer als 3,6 mm und
- ein zufällig herausgegriffener Lebkuchen einen Durchmesser von mehr als 97 mm hat?

$$N = 0,9 \text{ [dm]}, \sigma = 0,03 \text{ [dm]}$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & p(0,0864 < X < 0,0936) = F(0,0936) - F(0,0864) \\ & p(X) = \Phi\left(\frac{0,0936 - 0,09}{0,03}\right) - \Phi\left(\frac{0,0864 - 0,09}{0,03}\right) \\ & p(X) = \Phi(0,12) - \Phi(-0,12) \quad p(X) = \Phi(0,12) - 1 + \Phi(0,12) \\ & p(X) = 0,5517 - 1 + 0,5517 = 0,1034 \approx 0,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & p(X > 0,097) = 1 - p(X < 0,097) \\ & p(X) = 1 - \Phi\left(\frac{0,097 - 0,09}{0,03}\right) = 0,7\bar{6} \\ & p(X) = \Phi(0,7\bar{6}) = 0,7967 \approx 0,8 \end{aligned}$$

Die berechneten Ergebnisse sind Näherungswerte, da 0,12 bzw. 0,76 nicht in der Gaußverteilungs-Tabelle stehen. Genauere Ergebnisse ließen sich durch Interpolation ermitteln.

- 12.5. Weihnachtsmänner sollen zu 50% mit einer Rute ausgestattet sein. Vielleicht sollten Sie sich auf folgende Situation einstellen:
Zu Ihnen kommen in diesem Jahr gleich zwei Weihnachtsmänner. Bei einem wurde schon eine Rute gesehen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass noch eine zweite Rute auf Sie zu kommt?

Die Weihnachtsmänner kommen unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von je 50% mit einer Rute. Dass beide eine haben, wird demzufolge mit $p=0,25$ (25%) auftreten.

$$p(X) = 0,5^2 = 0,25$$

Da der Erste schon eine Rute hat, kommt es nur noch darauf an, ob auch der Zweite mit einer kommt

$$p(X) = 0,5$$