

- 11.1. Vergleichen Sie die Definitionen der Verteilungsfunktion in versch. Büchern. Geben Sie die Literaturstellen (mind. 3) an.

„[...] In der graphischen Darstellung muss die Fläche zwischen der Kurve  $f(x)$  und der Abszissenachse die Größe 1 haben.

Die Verteilungsfunktion für die stetige Zufallsgröße  $X$  wird dann durch

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{erklärt, dabei gilt:}$$

$$F(-\infty) = 0 \quad ; \quad F(+\infty) = 1 \quad . \text{ [...]“}$$

„Kleine Enzyklopädie Mathematik“,  
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig (1969)

„[...] Wenn es nun für eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Z$  auch möglich ist, eine Funktion  $d(Z)$  so anzugeben, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(Z) dZ = 1 \quad , \text{ sowie } \quad P(Z \leq a) = \int_{-\infty}^a d(Z) dZ \quad , \quad \forall_{a \in Z}$$

dann heißt eine solche Funktion  $d$  Dichtefunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte. [...]“

„Weltbild Kolleg – Abiturwissen Mathematik“  
Weltbild Verlag, Augsburg, 1992

„Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion über  $\mathbb{R}$  und  $P$  das zugehörige W-Maß über  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq y$  gilt dann

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}} : P((-\infty, x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

$$F(x) = P([-\infty, x]) = \sum_{t \in T} f(t) 1(t \leq x)$$

„Grundkurs Stochastik“  
Teubner, Stuttgart, 1995

„[...] Eine Zufallsvariable  $X$ , die nur endlich oder abzählbar viele „diskret“ liegende Werte  $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$  mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_m = P(X=x_m) \quad (0 \leq p_m \leq 1, \sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1, m=1,2,\dots)$$

annimmt, nennt man eine Zufallsvariable vom diskreten Typ, kurz eine diskrete Zufallsvariable. Die auftretenden Summen müssen absolut-konvergent sein. Man spricht von einer diskreten Verteilung und die Verteilungsfunktion

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x_m \leq t} P(X=x_m)$$

ist eine an den Sprungstellen rechtsseitig stetige monoton wachsende Treppenfunktion mit

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1.$$

„Mathematik für Fachhochschulen“  
Carl Hanser Verlag, München/Wien, 1999

11.2. Gegeben sei  $\{a_m\}$  rekursiv durch

$$a_{m+1} = \frac{1}{2} \left( a_m + \frac{3}{a_m} \right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & a_1 = 1, \\ \text{b)} & a_1 = 8. \end{array}$$

Berechnen Sie jeweils die ersten 7 Glieder, schließen Sie (evtl. über Monotonie und Beschränkung) auf Konvergenz und versuchen Sie unter Kenntnis (bzw. Annahme) der Konvergenz m.H. der Grenzwertsätze eine Aussage über die Grenzwerte zu erhalten.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & a_1 = 1 \\ & a_2 = \frac{1}{2}(4) = 2 \\ & a_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{2} + \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{4} \\ & a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{7}{4} + \frac{3 \cdot 4}{7} \right) = \frac{97}{56} \approx 1,732143 \\ & a_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{97}{56} + \frac{3 \cdot 56}{97} \right) = \frac{18817}{5432 \cdot 2} \approx 1,732051 \\ & a_6 = \frac{1}{2} \left( \frac{18817}{5432 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 5432 \cdot 2}{18817} \right) \approx 1,732051 \\ & a_7 \approx \frac{1}{2} \left( 1,732051 + \frac{3}{1,732051} \right) \approx 1,732051 \\ & a_n = \frac{1}{2} \left( \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = 3^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Wie unschwer zu erkennen ist, konvergieren die Glieder gegen Wurzel aus 3. Dabei lässt sich der Grenzwert als Produkt auffassen: Der Grenzwert von  $\frac{1}{2}$  und der Grenzwert des Terms in der Klammer bilden den „Gesamt-Grenzwert“ für  $a_n$ .

b)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 8 \\
 a_2 &= \frac{1}{2} \left( 8 + \frac{3}{8} \right) = \frac{67}{16} \approx 4,1875 \\
 a_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{67}{16} + \frac{3 \cdot 16}{67} \right) \approx 2,451\,959 \\
 a_4 &\approx \frac{1}{2} \left( 2,451\,959 + \frac{3}{2,451\,959} \right) \approx 1,837\,735 \\
 a_5 &\approx \frac{1}{2} \left( 1,837\,735 + \frac{3}{1,837\,735} \right) \approx 1,735\,090 \\
 a_6 &\approx \frac{1}{2} \left( 1,735\,090 + \frac{3}{1,735\,090} \right) \approx 1,732\,054 \\
 a_7 &\approx \frac{1}{2} \left( 1,732\,054 + \frac{3}{1,732\,054} \right) \approx 1,732\,054 \\
 a_{m+1} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Auch diese Reihe konvergiert gegen Wurzel aus 3 (gleicher Grund wie bei 11.2.a).

11.3. Bestätigen Sie den Erwartungswert für die Poissonverteilung ausgehend von der Definition.

Binomialverteilung:

$$p_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Spezialfall Poissonverteilung:

$$\begin{aligned}
 n \rightarrow \infty \quad , \quad n \cdot p = \lambda \quad , \quad p = \frac{\lambda}{n} \quad , \quad p \rightarrow 0 \\
 p_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \\
 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{n!}{m!(n-m)!}\right)}_1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n}}\right)^m}_1 = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 \\
 = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

- 11.4. Angenommen, im Hörsaal 9 fällt im Semester durchschnittlich 2x die hintere Tafel aus (und die Anzahl der Ausfälle kann als poisson-verteilt angesehen werden (d.h.  $\lambda = 2$ ). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- höchstens ein Ausfall und
  - mehr als zwei Ausfälle
- dieser Tafel im Semester vorkommen? Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit  $p(m)$  für  $\lambda = 2$ .

a)

$$\begin{aligned}
 \lambda = 2 \quad , \quad m = 1 \\
 p(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \\
 p(m \leq 1) = p(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 2e^{-2} \approx 0,2706
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \lambda = 2 \quad , \quad m = 3 \dots \infty \\
 p(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \\
 p(m \geq 2) = \sum_{m=3}^{\infty} p_m \approx 0,135
 \end{aligned}$$