

## 9.1. Wandeln Sie die Zahlen

a)  $1.01101$  b)  $0.010\overline{01}$  (Dualbruchdarstellung)

c)  $1.3756$  d)  $0.1631\overline{7}$  (Dezimalbruchdarstellung)

in Brüche ganzer Zahlen um.

Hinweis: Schreiben Sie zunächst a) .. d) als Summe von Potenzen von 2 bzw. 10 und verwenden Sie Aussagen über die geometr. Reihe.

a)  $1.01101 \text{ (dual)} = \frac{45}{32} = 1,40625 \text{ (dezimal)}$

$$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}$$

$$0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5}$$

b)  $0.010\overline{01} \text{ (dual)} = \frac{729}{2500} \approx 0,2916... \text{ (dezimal)}$

$$0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}$$

$$0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$$

c)  $1.011... \text{ (dual)} \approx \frac{3439}{2500} = 1,3756 \text{ (dezimal)}$

$$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} ...$$

$$1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$$

Auch bei einer Reihensumme bis  $2^{-100}$  kann keine genaue Lösung gefunden werden. Sie konvergiert gegen 1,3756.

d)  $0.00101... \text{ (dual)} = \frac{1\,631\,777}{10\,000\,000} \approx 0,1631\overline{7} \text{ (dezimal)}$

$$0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 0011100$$

$$0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + k \cdot 10^{-4} + \sum_{k=5}^{\infty} (7 \cdot 10^{-k})$$

9.2. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der unendlichen Reihe

$$\sum_k c_k = \frac{1}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3-1}} - \frac{1}{\sqrt{3+1}} + \frac{1}{\sqrt{4-1}} - \frac{1}{\sqrt{4+1}} \pm \dots$$

$$\sum_k c_k = \frac{1}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} \pm \dots = \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1} + 1}{k + \sqrt{k} - \sqrt{k-1}}$$

$$\sum_k c_k = \frac{2}{k-1} = 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{k-1} \right) \quad \frac{1}{k-1} > \frac{1}{k}$$

Wie unschwer zu erkennen ist, divergieren die Quotienten  $\frac{1}{k-1}$  und  $\frac{1}{k}$ . Wenn die Summe aus  $\frac{1}{k}$  divergiert, folgt daraus, dass dann die Summe aus  $\frac{1}{k-1}$  erst recht divergiert.

Eine Konvergenz ist deswegen nicht festzustellen.

9.3. Berechnen und skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene:

a)  $\sqrt[4]{-1}$       b)  $\sqrt[3]{27j}$       c)  $\sqrt{1-j}$

d)  $\sqrt[5]{1}$       e)  $(1+j)^2$

Hinweis: Verwenden Sie die Eulersche Darstellung.  
Die Ausdrücke in a)...d) sind mehrwertig!

a)  $z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{j^2} = \sqrt[2]{j} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{j}$   
 $y \cdot r = \sqrt{1} \quad , \quad x=0 \quad , \quad r = \sqrt{1} = \sqrt{1} e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2})}$

b)  $z = \sqrt[3]{27j} \quad , \quad y = \sqrt[3]{27} \quad , \quad x=0 \quad , \quad r = \sqrt[3]{27} = 3$   
 $z = 3 \cdot e^{j(\frac{\pi}{3 \cdot 2} + \frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{3})}$

c) – keine Lösung gefunden –

d)  $z = \sqrt[5]{1}$  ,  $r = \sqrt[5]{1} = 1$  ,  $x = \sqrt[5]{1}$  ,  $x = r \cdot \cos \phi$  ,  $\cos \phi = \frac{x}{r} = 2 \cdot \pi$

$$z = \sqrt[5]{1} \cdot e^{j(\frac{2\pi}{5} + \frac{k \cdot 2\pi}{5})}$$

e)  $(1 + j)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot j + j^2 = 1 + 2j - 1 = 2j = z$

9.4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

- a) aus einem Skatspiel einen König zufällig zu ziehen,
- b) im Skat bei einem „ohne 4“ zwei Buben zu finden,
- c) beim Würfeln mit 2 Würfeln die Augenzahl 5 zu erreichen?

- a) Ein König wird mit der Wahrscheinlichkeit von 1:8 gezogen, genau wie jedes andere Zeichen. Es sind 4 Könige in den 32 Karten enthalten.

$$p(A) = \frac{4}{32} = 0,125 \quad , \quad A = \text{König}$$

- b) Es wird davon ausgegangen, dass 3 Spieler je 10 Karten halten und die zwei Restkarten als Skat liegenbleiben. Dass diese beiden Karten gerade zwei Buben sind, tritt mit einer Wahrscheinlichkeit ein, die sich wie folgt berechnen lässt::

$$p(\emptyset) = 0 \quad , \quad p(\Omega) = 1$$

$$p(A) = \frac{2 \cdot 4}{32} = 0,25 \quad , \quad p(A) = 2 \text{ Buben}$$

- c) Die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln die Augenzahl 5 zu erzielen kann wie folgt berechnet werden:

Würfel 1	Würfel 2
1	4
2	3
3	2
4	1

$$p(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0, \bar{1}$$

$$p(5) = 1:9$$

Es gibt insgesamt 36 mögliche Permutationen (von den Paaren 1/1 bis 6/6) mit 2 Würfeln. Davon erfüllen nur vier die Vorgabe. Da alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sind, tritt die Augenzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 4:36 bzw. 1:9 auf.

Wir haben die Berechnungen durch ein kleines Experiment bewiesen, indem wir mit zwei Würfeln je 1000x gewürfelt haben:

Ereignis	Anzahl		p(A)
	Würfel 1	Würfel 2	
1	156	155	0,1555
2	189	183	0,1860
3	167	186	0,1765
4	188	153	0,1705
5	153	154	0,1535
6	147	169	0,1580

$$\sum_i p(A_i) = 1$$