

8.1. Gegeben seien die unendlichen Reihen

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3^k}{2^{2k+1}} \right)$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+(-1)^k}{9k+101} \right)$

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

- a) 3^k steigt exponential an. Der Nenner steigt mit zunehmenden k ebenfalls, allerdings im größeren Maße. Der daraus resultierende Bruch geht für die einzelnen Glieder gegen Null. Daraus folgt, dass jeweils der Zähler und der Nenner gegen unendlich gehen, also divergieren. Die Reihensumme konvergiert gegen $3/2$.

Bsp. zum Beweis:

k	c_n
2	0,281250000000000
10	0,028156757354736
50	0,000000283160828
100	0,000000000000160

Berechnete Reihensumme für $k_{100} \approx 1,1249993629$

- b) $(-1)^k$ ist zwar alternierend, durch die Addition von hinreichend großen k wird dies allerdings nahezu kompensiert. Im Nenner sorgt $9k$ für ein stetiges Wachstum, die Add. von 101 ist auch hier für sehr große k zu vernachlässigen. Jedes Glied der Reihe konvergiert mit zunehmenden k gegen $1/9$ (siehe Bsp.). Daraus ergibt sich eine Gesamtsumme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right) = \frac{k}{9} \rightarrow \infty$$

k	c_n
2	0,025210084033614
10	0,057591623036649
50	0,092558983666062
100	0,100899100899101

Berechnete Reihensumme für $k_{100} \approx 8,396$

- 8.2. Wie müsste man die Leibnizreihe umordnen, so dass sich als Reihensumme $s=112$ ergibt? Beschreiben Sie die Vorgehensweise. Könnten Sie dieses Resultat auch für die Reihe aus Ü. 7.2. erhalten?

Man verschiebe die ersten n positiven Glieder der Leibniz-Reihe so, dass deren Partialsumme $s_n=112$ ergibt. Die verbliebenen Glieder (inkl. alle negativen) werden so umgestellt, dass diese Partialsumme gegen Null konvergiert.

Mit Hilfe von „Mathematica“ wurde für Ü. 7.2. folgender Grenzwert berechnet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k \cdot (2k)^{-2}) \rightarrow \frac{634\,871\,227}{3\,073\,593\,600}$$

Bei 7.2. ist die Umordnung nicht möglich, da die Reihensumme der positiven Glieder konvergiert.

- 8.3. Bearbeiten Sie Ü. 7.4. und untersuchen Sie zwei weitere Beispiele Ihrer Wahl.

Bsp. 1 (Ü. 7.2.):

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k \cdot (2k)^{-2}) \quad s \rightarrow \frac{634\,871\,227}{3\,073\,593\,600}$$

Bsp. 2 (Ü. 7.3.b):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+(k+3)} \right) \quad s \rightarrow \frac{11}{18}$$

Bsp. 3 (Ü. 8.1.a)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3^k}{2^{2k+1}} \right) \quad s \rightarrow \frac{9}{8}$$

Bsp. 4 (Ü. 8.1.b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+(-1)^k}{9k+101} \right) \quad s \rightarrow \frac{4\,764\,905\,321\,093\,837}{21\,990\,076\,612\,422\,464}$$

8.4. Berechnen Sie für

$$z_1 = 1 + j, \quad z_2 = 2 - 3j, \quad z_3 = 2j$$

$$z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_2}{z_1}, \quad z_3^5, \quad z_3 \cdot z_2^2, \quad z_2^{99}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + j) \cdot (2 - 3j) = 5 - 1j$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 - 3j}{1 + j} = \frac{2 - 3j}{1 + 1} j = -0,5 - 2,5j$$

$$z_3^5 = (2j)^5 = -4 \cdot (2j)^3 = -8j \cdot (2j)^2 = 16 \cdot 2j = 32j$$

$$z_3 \cdot z_2^2 = 2j \cdot (2 - 3j)^2 = (6 + 4j) \cdot (2 - 3j) = 24 - 10j$$

$$z_2^{99} = -1,375 \cdot 10^{55} - 1,2796 \cdot 10^{54} j$$

Stellen Sie z_1 und z_3 in trigonometrischer (Eulerscher) Form dar.

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{j \frac{\pi}{4}}$$

$$z_3 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot e^{j \frac{\pi}{2}}$$

Werte 8

k	3^k	$2^{(2k+1)}$	Bruch
2	9	32	0,28125
3	27	128	0,21094
4	81	512	0,15820
5	243	2048	0,11865
6	729	8192	0,08899
7	2187	32768	0,06674
8	6561	131072	0,05006
9	19683	524288	0,03754
Summe			0,858032

k	-1^k	$k + (-1)^k$	$9k$	$9k+101$	Bruch	
0	1	1	0	101	0,00990	
1	-1	0	9	110	0,00000	
2	1	3	18	119	0,02521	
3	-1	2	27	128	0,01563	
4	1	5	36	137	0,03650	
5	-1	4	45	146	0,02740	0,1146296848
10	1	11	90	191	0,05759	
100	1	101	900	1001	0,10090	
1000	1	1001	9000	9101	0,10999	
						0,1111111111

EZahl 8

k	3^k	$2^{(2k+1)}$
2	9	32
3	27	128
4	81	512
5	243	2048
6	729	8192
7	2187	32768
8	6561	131072
9	19683	524288
10	59049	2097152
11	177147	8388608
12	531441	33554432
13	1594323	134217728
14	4782969	536870912
15	14348907	2147483648
16	43046721	8589934592
17	129140163	34359738368
18	387420489	137438953472
19	1162261467	549755813888
20	3486784401	2199023255552
21	10460353203	8796093022208
22	31381059609	35184372088832
23	94143178827	140737488355328
24	282429536481	562949953421312
25	847288609443	2,25E+015
26	2541865828329	9,01E+015
27	7625597484987	3,60E+016
28	22876792454961	1,44E+017
29	68630377364883	5,76E+017
30	205891132094649	2,31E+018
31	617673396283947	9,22E+018
32	1853020188851840	3,69E+019
33	5559060566555520	1,48E+020
34	16677181699666600	5,90E+020
35	50031545098999700	2,36E+021
36	150094635296999000	9,44E+021
37	450283905890997000	3,78E+022
38	1350851717672990000	1,51E+023
39	4052555153018980000	6,04E+023
40	12157665459056900000	2,42E+024
41	36472996377170800000	9,67E+024
42	109418989131512000000	3,87E+025
43	328256967394537000000	1,55E+026
44	984770902183611000000	6,19E+026
45	2954312706550830000000	2,48E+027
46	8862938119652500000000	9,90E+027
47	26588814358957500000000	3,96E+028
48	79766443076872500000000	1,58E+029
49	239299329230618000000000	6,34E+029
50	717897987691853000000000	2,54E+030
51	2153693963075560000000000	1,01E+031
52	6461081889226670000000000	4,06E+031
53	1938324566768000000000000	1,62E+032
54	5814973700304010000000000	6,49E+032

EZahl 8

55	1744492110091200000000000000	2,60E+033
56	5233476330273610000000000000	1,04E+034
57	1570042899082080000000000000	4,15E+034
58	4710128697246240000000000000	1,66E+035
59	1413038609173870000000000000	6,65E+035
60	4239115827521620000000000000	2,66E+036
61	1271734748256490000000000000	1,06E+037
62	3815204244769460000000000000	4,25E+037

1,1249993629

Bruch

0,2812500000
0,2109375000
0,1582031250
0,1186523438
0,0889892578
0,0667419434
0,0500564575
0,0375423431
0,0281567574
0,0211175680
0,0158381760
0,0118786320
0,0089089740
0,0066817305
0,0050112979
0,0037584734
0,0028188551
0,0021141413
0,0015856060
0,0011892045
0,0008919034
0,0006689275
0,0005016956
0,0003762717
0,0002822038
0,0002116528
0,0001587396
0,0001190547
0,0000892910
0,0000669683
0,0000502262
0,0000376697
0,0000282522
0,0000211892
0,0000158919
0,0000119189
0,0000089392
0,0000067044
0,0000050283
0,0000037712
0,0000028284
0,0000021213
0,0000015910
0,0000011932
0,0000008949
0,0000006712
0,0000005034
0,0000003775
0,0000002832
0,0000002124
0,0000001593
0,0000001195
0,0000000896

EZahl 8

0,0000000672
0,0000000504
0,0000000378
0,0000000283
0,0000000213
0,0000000159
0,0000000120
0,0000000090
1,1249999731

k

0	0,0099009900990099
1	0,0000000000000000
2	0,0252100840336134
3	0,0156250000000000
4	0,0364963503649635
5	0,0273972602739726
6	0,0451612903225806
7	0,0365853658536585
8	0,0520231213872832
9	0,0439560439560440
10	0,0575916230366492
11	0,0500000000000000
12	0,0622009569377990
13	0,0550458715596330
14	0,0660792951541850
15	0,0593220338983051
16	0,0693877551020408
17	0,0629921259842520
18	0,0722433460076046
19	0,0661764705882353
20	0,0747330960854092
21	0,0689655172413793
22	0,0769230769230769
23	0,0714285714285714
24	0,0788643533123028
25	0,0736196319018405
26	0,0805970149253731
27	0,0755813953488372
28	0,0821529745042493
29	0,0773480662983425
30	0,0835579514824798
31	0,0789473684210526
32	0,0848329048843188
33	0,0804020100502513
34	0,0859950859950860
35	0,0817307692307692
36	0,0870588235294118
37	0,0829493087557604
38	0,0880361173814898
39	0,0840707964601770
40	0,0889370932754881
41	0,0851063829787234
42	0,0897703549060543
43	0,0860655737704918
44	0,0905432595573441
45	0,0869565217391304
46	0,0912621359223301
47	0,0877862595419847
48	0,0919324577861163
49	0,0885608856088561
50	0,0925589836660617
51	0,0892857142857143
52	0,0931458699472759

Neuntel 8

53	0,0899653979238754
54	0,0936967632027257
55	0,0906040268456376
56	0,0942148760330579
57	0,0912052117263844
58	0,0947030497592295
59	0,0917721518987342
60	0,0951638065522621
61	0,0923076923076923
62	0,0955993930197269
63	0,0928143712574850
64	0,0960118168389956
65	0,0932944606413994
66	0,0964028776978417
67	0,0937500000000000
68	0,0967741935483871
69	0,0941828254847645
70	0,0971272229822161
71	0,0945945945945946
72	0,0974632843791722
73	0,0949868073878628
74	0,0977835723598435
75	0,0953608247422680
76	0,0980891719745223
77	0,0957178841309824
78	0,0983810709838107
79	0,0960591133004926
80	0,0986601705237515
81	0,0963855421686747
82	0,0989272943980930
83	0,0966981132075472
84	0,0991831971995333
85	0,0969976905311778
86	0,0994285714285714
87	0,0972850678733032
88	0,0996640537513998
89	0,0975609756097561
90	0,0998902305159166
91	0,0978260869565217
92	0,1001076426264800
93	0,0980810234541578
94	0,1003167898627240
95	0,0983263598326360
96	0,1005181347150260
97	0,0985626283367557
98	0,1007121057985760
99	0,0987903225806452
100	0,1008991008991010
101	0,0990099009900990
102	0,1010794896957800
103	0,0992217898832685
104	0,1012536162005790
105	0,0994263862332696
106	0,1014218009478670
107	0,0996240601503759

Neuntel 8

108	0,1015843429636530
109	0,0998151571164510
110	0,1017415215398720
111	0,1000000000000000
112	0,1018935978358880
113	0,1001788908765650
114	0,1020408163265310
115	0,1003521126760560
116	0,1021834061135370
117	0,1005199306759100
118	0,1023215821152190
119	0,1006825938566550
120	0,1024555461473330
121	0,1008403361344540
122	0,1025854879065890
123	0,1009933774834440
124	0,1027115858668860
125	0,1011419249592170
126	0,1028340080971660
127	0,1012861736334410
128	0,1029529130087790
129	0,1014263074484940
130	0,1030684500393390
131	0,1015625000000000
132	0,1031807602792860
133	0,1016949152542370
134	0,1032899770466720
135	0,1018237082066870
136	0,1033962264150940
137	0,1019490254872560
138	0,1034996276991810
139	0,1020710059171600
140	0,1036002939015430
141	0,1021897810218980
142	0,1036983321247280
143	0,1023054755043230
144	0,1037938439513240
145	0,1024182076813660
146	0,1038869257950530
147	0,1025280898876400
148	0,1039776692254010
149	0,1026352288488210
150	0,1040661612680910
151	0,1027397260273970
152	0,1041524846834580
153	0,1028416779431660
154	0,1042367182246130
155	0,1029411764705880
156	0,1043189368770760
157	0,1030383091149270
158	0,1043992120814180
159	0,1031331592689300
160	0,1044776119402990
161	0,1032258064516130
162	0,1045542014111610

Neuntel 8

163	0,1033163265306120
164	0,1046290424857320
165	0,1034047919293820
166	0,1047021943573670
167	0,1034912718204490
168	0,1047737135771850
169	0,1035758323057950
170	0,1048436541998770
171	0,1036585365853660
172	0,1049120679199510
173	0,1037394451145960
174	0,1049790041991600
175	0,1038186157517900
176	0,1050445103857570
177	0,1038961038961040
178	0,1051086318261890
179	0,1039719626168220
180	0,1051714119697850
181	0,1040462427745660
182	0,1052328924669350
183	0,1041189931350110
184	0,1052931132612410
185	0,1041902604756510
186	0,1053521126760560
187	0,1042600896860990
188	0,1054099274958170
189	0,1043285238623750
190	0,1054665930425180
191	0,1043956043956040
192	0,1055221432476760
193	0,1044613710554950
194	0,1055766107200870
195	0,1045258620689660
196	0,1056300268096510
197	0,1045891141942370
198	0,1056824216675520
199	0,1046511627906980
200	0,1057338243029980
1000	0,1099879134161080
10000	0,1109976581835940
100000	0,1110997543608990
1000000	0,1111099753213880

8,30595

