

7.1. Gegeben seien die unendlichen Reihen

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1+k}{1020+k} \right) \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{12}{10+k^2} \right)$$

Bestimmen Sie jeweils die ersten 6 Partialsummen, untersuchen Sie auf Konvergenz und schätzen Sie ggf. den Grenzwert ab.

- a) Die Glieder dieser unendlichen Reihe konvergieren zum Grenzwert  $g = \infty$ .  
Eine aus „unendlich vielen Summanden gebildete Summe“ geht gegen „unendlich“. Die Reihe ist also konvergent gegen einen imaginären Grenzwert.. Für hinreichend große  $k$  ist der Quotient aus Zähler und Nenner nahezu Eins, die Summe dieser Glieder also  $= k$ . Der Einfluss von 1 im Zähler und 1020 im Nenner nimmt mit zunehmendem  $k$  immer mehr ab.

Bsp:

$$\begin{array}{llll} s_0 & = & 1/_{1020} & = 9,803 \cdot 10^{-4} \\ s_1 & = & 1/_{1020} + 2/_{1021} & = 29,39 \cdot 10^{-4} \\ s_2 & = & 1/_{1020} + 2/_{1021} + 3/_{1022} & = 58,746 \cdot 10^{-4} \\ s_3 & = & \dots & = 97,847 \cdot 10^{-4} \\ s_4 & = & \dots & = 146,675 \cdot 10^{-4} \\ s_5 & = & \dots & = 205,212 \cdot 10^{-4} \\ & & & \Rightarrow \text{monoton wachsend} \end{array}$$

- b) Die einzelnen Glieder der Reihe gehen gegen Null, da mit wachsendem  $k$  der Nenner immer größer wird. Die Reihe geht gegen unendlich, da aus „unendlich“ vielen positiven Werten die Summe gebildet wird.

Bsp:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{12}{10} + \frac{12}{11} + \frac{12}{14} + \frac{12}{19} + \frac{12}{26} + \frac{12}{35} + \dots + \frac{10}{k^2} \right)$$

$$\begin{array}{ll} s_0 = c_0 & = 1,2 \\ s_1 = c_0 + c_1 & = 2,29 \\ s_2 = c_0 + c_1 + c_2 & = 3,148 \\ s_3 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 & = 3,779 \\ s_4 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & = 4,241 \\ s_5 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 & = 4,584 \end{array}$$

- 7.2. Berechnen Sie für  $\sum (c_k)$  mit  $c_k = (-1)^k(2^k - 2)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  die Partialsumme  $s_{11}$ , untersuchen Sie auf Konvergenz und schätzen Sie ggf. den Fehler von  $s_{11}$  gegenüber dem Grenzwert ab. Begründung?

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{2^2 \cdot k^2} = (-1)^k \cdot \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4} \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \right)$$

Für die Betrachtung der Konvergenz ist  $\frac{1}{4}$  eine Konstante und somit unerheblich. Der zweite Ausdruck,  $-1^k$ , ist alternierend. Einzig relevant ist  $\frac{1}{k^2}$ . Dies wird mit zunehmenden  $k$  kleiner (konvergiert gegen Null). Die Glieder der Reihe konvergieren somit alle gegen Null, jedoch je nach  $k$  besitzen sie ein wechselndes Vorzeichen.

Für das Leibniz-Kriterium gilt:

$$|c_1| \geq |c_2| \geq \dots \geq |c_k| \geq |c_{k+1}| \geq 0, \quad c_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{erfüllt})$$

$$-c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot (2k)^{-2} \quad (\text{erfüllt})$$

Fehlerabschätzung:

Diese ist nicht möglich, da der Abstand von  $s$  zu  $s_k$  nicht kleiner als das letzte Glied  $c_k$  ist.

$$|s_k - s| > s_{k+1} - s_k = c_{k+1}$$

7.3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a)  $1 + 2a + a^2 + 2a^3 + a^4 + 2a^5 + \dots$  für  $a = -\left(\frac{1}{2}\right)$  und  $a = \frac{3}{2}$

b)  $\sum_{k \geq 1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$

bestimmen Sie ggf. die Reihensumme.

$$\begin{aligned} \text{a) für } a = -\left(\frac{1}{2}\right) : \quad & 1 + 2a + a^2 + 2a^3 + a^4 + 2a^5 + \dots \\ &= 1 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^5 + \dots \\ &= 1 - 1 + \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + (-1) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + (-1) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Wie unschwer zu erkennen ist, lassen sich die einzelnen Glieder wegekürzen und wir erhalten als Reihensumme Null.

für  $a = \frac{3}{2}$  :  $1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 + \dots$

Die Reihe wächst streng monoton, es gibt keinen Grenzwert. Die Reihensumme wäre unendlich groß.

b)  $\sum_{k \geq 1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{(1 \cdot 4)} + \frac{1}{(2 \cdot 5)} + \dots$

$$s_k = \frac{1}{(1 \cdot 4)} + \frac{1}{(2 \cdot 5)} + \dots + \frac{1}{k(k+3)}$$

(keine Lösung gefunden)

- 7.4. Zusatz: Es wurde angenommen, dass n Punkte auf einer Gerade liegen. Bei einem Beweis durch vollständige Induktion kann nicht davon ausgegangen werden, dass n+1 Punkte ebenfalls auf der Gerade liegen. Ein solcher Beweis ist im Ansatz falsch, da in der Voraussetzung der zu beweisende Induktionsschluss liegt (Rekursivität).