

- 13.1. Bestimmen Sie nach Definition die erste Ableitung von  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  mit  $f(x) = x^3 + 2x - 3$  an der Stelle  $x_0$  und speziell für  $x_0 = 4$ .

Was sagt der Wert  $f'(x_0)$  aus?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 2x - 3 - (x_0^3 + 2x_0 - 3)}{x - x_0} &= \frac{x^3 + 2x - x_0^3 - 2x_0}{x - x_0} = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} + \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= x^2 + x_0x + x_0^2 + 2 \rightarrow x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 + 2 = 3x_0^2 + 2 = f'(x) \end{aligned}$$

$$x \rightarrow 4 = 3^2 + 2 = x \rightarrow 50$$

Die Funktion  $f'(x)$  gibt die Geradengleichung der Tangente am Punkt  $(x_0 / f(x_0))$  an und beschreibt damit den Anstieg des Graphen an dieser Stelle.

- 13.2. Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  mit  $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{für } 2 < x \leq 5 \end{cases}$ .

- Bestimmen Sie die Grenzwerte von  $f$  soweit vorhanden an den Stellen  $x = 0,5$ ;  $1$ ;  $2$  und  $4$ .
- Untersuchen Sie  $f$  auf Stetigkeit im Intervall  $[0;5]$ .
- Skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .
- Ist  $f$  an der Stelle  $x = 1$  differenzierbar?

a)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad f(1) = 1 \quad f(2) = 4 \quad f(4) = 3$

Die Stelle  $x = 0,5$  stellt keinen Grenzwert dar, denn es gilt

$$\forall_{\epsilon > 0} \left( \exists_{\delta(\epsilon) > 0} \left( \forall_{|x - \delta| < \delta(\epsilon)} (|f(x) - f(\delta)| < \epsilon) \right) \right)$$

Im Punkt  $(1;1)$  ändert der Graph seinen Verlauf von einer Gerade in eine Parabel.

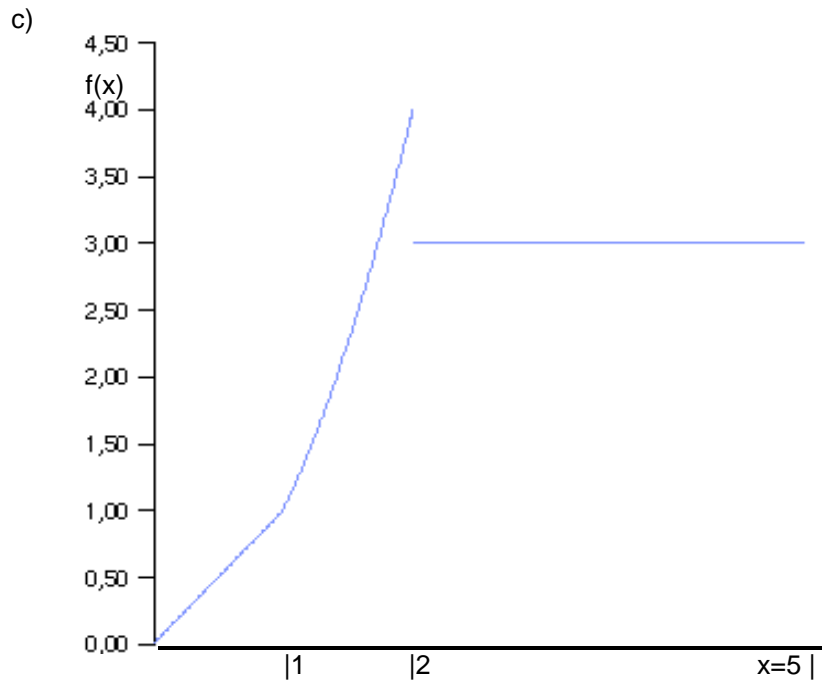
Die Umgebung um  $x=2$  ist interessant zu untersuchen, da es zwar für jedes beliebige  $x$  einen Funktionswert gibt, aber trotzdem eine Sprungstelle vorhanden ist.

In dieser  $U(\epsilon)$  ändert sich der Funktionsgraph und verläuft parallel zur Abszisse in  $f(x) = 3$ .

Da sich in  $[2;5]$  die Funktionswerte nicht ändern, gibt es auch keinen dedizierten Grenzwert.

- b) Im Intervall  $[0 ; 0,5]$  ist die Funktion stetig. Es gibt keine Unstetigkeitsstellen (Polstellen, h-Sonden, Sprungstellen usw.). Ferner gilt die Definition der Stetigkeit:

„Eine in der Umgebung von  $x=\delta$  und in  $\delta$  selbst definierte Funktion  $f(x)$  heißt an dieser Stelle stetig, wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \delta} f(x)$  existiert und gleich dem Funktionswert  $f(x)$  ist, wenn also  $\lim_{x \rightarrow \delta} f(x) = f(\delta)$  gilt.“  
 „Kleine Enzyklopädie Mathematik“,  
 VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1969



Im Intervall  $[0;1]$  ergibt sich bei dieser Funktion eine Gerade mit  $f(x) = x$ , danach geht der Funktionsgraph in eine Parabel über, die bei  $x=2$  aufhört. An dieser Stelle ist eine Unstetigkeitsstelle, eine Sprungstelle. Der Graph verläuft in  $[2;5]$  parallel zur Abszisse mit den Funktionswerten  $f(x) = 3$ .

- d) Die Funktion lässt sich in  $x=1$  differenzieren, da der Grenzwert von beiden Seiten gleich ist.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

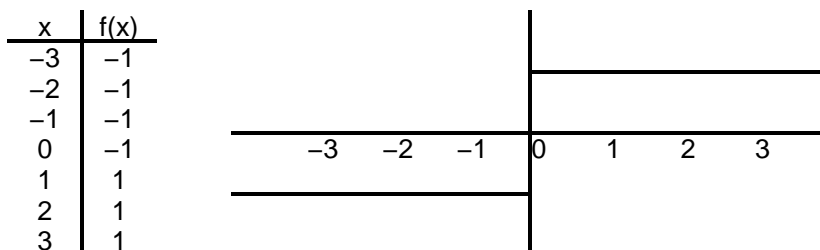
$$x \rightarrow x_0: 2x_0 = f'(x_0) \quad x_0 = 1: f'(x_0) = 2$$

- 13.3. Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 = f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,  $f(0) = -1$ .

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, untersuchen Sie auf Stetigkeit und skizzieren Sie den Graphen.

Die Funktion ist definiert für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , da es für alle  $x$  einen Funktionswert gibt, im Falle  $x=0$  jedoch ein uneigentlicher Grenzwert vorliegt.

Im bestimmten Definitionsbereich ist die Funktion stetig. Die Lücke des Graphen für  $x=0$  stellt eine Sprungstelle dar, da diese jedoch nicht zu  $D(x)$  gehört, fällt diese Unstetigkeitsstelle weg.



- 13.4. Bestimmen Sie die ersten sechs Ableitungen von  $f(x) = \sqrt{1+3x}$  an der Stelle  $x=0$ .  
Wie oft ist  $f$  in  $U(0)$  differenzierbar?

$$f(x) = (1+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+3x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot (1+3x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{27}{8} \cdot (1+3x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{1215}{16} \cdot (1+3x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^V(x) = \frac{1215 \cdot 7}{16 \cdot 2} \cdot (1+3x)^{-\frac{9}{2}} \cdot 3 = \frac{25515}{32} \cdot (1+3x)^{-\frac{9}{2}}$$

$$f^{VI}(x) = \frac{-25515}{32} \cdot \frac{9}{2} \cdot (1+3x)^{-\frac{11}{2}} \cdot 3 = \frac{-688905}{64} \cdot (1+3x)^{-\frac{11}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+3x)^{11}}}$$

$$f'(0) = 1,5$$

$$f''(0) = -\frac{9}{4}$$

$$f'''(0) = \frac{81}{8}$$

$$f^{IV}(0) = -\frac{1215}{16}$$

$$f^V(0) = \frac{25515}{32}$$

$$f^{VI}(0) = -\frac{688905}{64}$$

f ist in  $U(0)$  unbegrenzt differenzierbar, da es sich um eine rekursive Bildungsvorschrift handelt.

Die Beträge dieser als alternierende Reihe auffassbaren Funktionswerte gehen mit zunehmenden Ableitungsgrad gegen Unendlich.

13.5. Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke mit dem Flächeninhalt 60.

- a) Wieviele solche Dreiecke gibt es?
  - b) Wieviele solche Dreiecke gibt es mit einer Gesamtsumme der Kantenlängen von 45?
  - c) Wieviele solche Dreiecke gibt es mit ganzzahligen Kantenlängen?
- 
- a) Alle Punkte des Funktionsgraphen zu  $f(x) = \frac{120}{x}$  erfüllen die Gleichung für den Flächeninhalt  $A = \frac{xy}{2}$  ( $A=60$ ),  
 $x=0$  ist jedoch nicht möglich, da es dann kein Dreieck mehr wäre ☺
  - b) – keine Lösung gefunden –
  - c) Es gibt keine Dreiecke mit einem Flächeninhalt von 60 und Kantenlänge  $u=45$  (empirisch ermittelt).