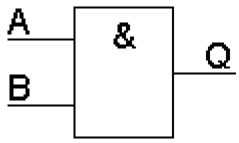
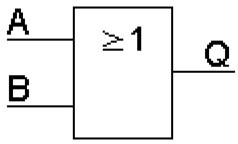
Grundlagen zum Aufbau und Test digitaler Schaltungen (2)

1. Gattertypen:

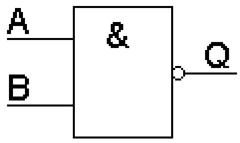
AND (UND)
Der Ausgang Q ist nur dann 1, wenn alle Eingänge 1 sind.
Der Ausgang Q ist dann 0, wenn mindestens ein Eingang 0 ist.



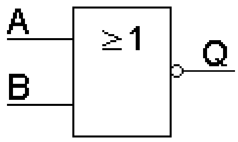
OR (ODER)
Der Ausgang Q ist dann 1, wenn mindestens ein Eingang 1 ist.
Der Ausgang Q ist nur dann 0, wenn alle Eingänge 0 sind.



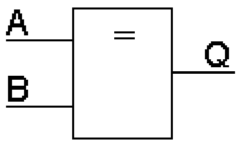
NAND (NICHT UND)
Der Ausgang Q ist 0, wenn alle Eingänge gleich 1 sind.
Der Ausgang Q ist 1, wenn mindestens ein Eingang gleich 0 ist



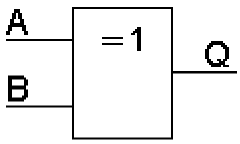
NOR (NICHT ODER)
Der Ausgang Q ist dann 1, wenn der Eingang A gleich 0 ist.
Der Ausgang Q ist dann 0, wenn der Eingang A gleich 1 ist.



EXNOR (EXKLUSIVER NOR / ÄQUIVALENZ)
Der Ausgang Q ist 0, wenn alle Einänge unterschiedlich sind.
Der Ausgang Q ist 1, wenn alle Eingänge gleich sind.



EXOR (EXKLUSIVES ODER / ANTIVALENZ)
Der Ausgang Q ist 1, wenn alle Eingänge unterschiedlich sind.
Der Ausgang Q ist 0, wenn alle Eingänge gleich sind.



2. Logische Funktionen

Inhibition:
UND−Gatter, bei dem ein oder mehrere Eingänge invertiert sind.

Implikation:
ODER−Gatter, bei dem ein oder mehrere Eingänge invertiert sind.

3. Postulate und Theoreme der Boolschen Algebra

Theorem nach DeMorgan:
− konjugierte und überstrichene Terme klammern
− bei ungerader Anzahl von Überstreichungen alle Variablen und Operatoren negieren

$$\left(\overline{x_2 x_1 x_0}\right) = \bar{x}_2+\bar{x}_1+\bar{x}_0$$

Dualitätsprinzip:

$$y_1 = x_1+x_0 \qquad y_2 = x_1 x_0$$
$$y_1 = \overline{\overline{x_1+x_0}} \qquad y_2 = \overline{\overline{x_1 x_0}}$$
$$y_1 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_0} \qquad y_2 = \overline{\bar{x}_1+\bar{x}_0}$$

Shannon−Theorem (Expansionsgesetz):

Eine logische Funktion von disjunktiv verknüpften Konjunktionen heißt disjunktive Normalform. Enthält jede Konjunktion alle Variablen, spricht man von einer kanonischen disjunktiven Normalform.

Eine log. Fkt. von konjunktiv verknüpften Konjunktionen heißt konjunktive Normalform. Enthält jede Disjunktion alle Var., spricht man von einer kanonischen konjunktiven Normalform.

$$y = x_1 \sim x_0 \qquad y = x_1 \sim \bar{x}_0$$
$$x_1 = y \sim x_0 \qquad x_1 = y \sim \bar{x}_0$$
$$x_0 = y \sim x_1 \qquad x_0 = y \sim \bar{x}_1$$

4. Rechengesetze

Kommutativität:
− Eingangsvariablen vertauschbar

$$x_i+x_j = x_j+x_i$$

Assoziativität:
− Zusammenfassen gleicher Operatoren in Klammern

$$x_i+(x_j+x_k) = (x_i+x_j)+x_k = x_i+x_j+x_k$$

Distributivität
− Ausklammern / Zusammenfassen
− Ausaddieren möglich

$$x_i+x_j \cdot x_k = (x_i+x_j)\cdot(x_i+x_k)$$

Disjunktion:

$$x_i+0 = x_i \qquad x_i+1=1$$

Konjunktion:

$$x_i \cdot 0 = 0 \qquad x_1 \cdot 1 = x_1$$

Negation:

$$\bar{\bar{x}}_i = x_i \qquad \bar{1} = 0 \qquad \bar{0} = 1$$

Vorrangregel:
− wenn keine Klammern vorhanden sind
− Negation, Konjunktion, Disjunktion

Idempotenz:

$$x_i + x_i = x_i \qquad x_i \cdot x_i = x_i$$

Adjunktivität:

$$x_i + x_i x_j = x_i \cdot 1 + x_i x_j = x_i \cdot (1 + x_j) = x_i$$

5. Vereinfachung

a)

$$y = \left(\overline{\overline{(x_0 x_1)} \cdot \overline{(x_0 + x_1)}}\right) + \left(\overline{(x_0 x_1)} + \overline{x_0 + x_1}\right)$$
$$y = \left(\overline{(\bar{x}_0 + \bar{x}_1)\, \bar{x}_0 \bar{x}_1}\right) + \left((\bar{x}_0 + \bar{x}_1) + \bar{x}_0 \bar{x}_1\right)$$
$$y = \left(\overline{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}\right) + \left(\overline{\bar{x}_0 \bar{x}_1}\right) + \bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0 \bar{x}_1$$
$$y = x_0 x_1 + (x_0 + x_1) + \bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0 \bar{x}_1$$
$$y = x_0 x_1 + \bar{x}_0 \bar{x}_1 + \underbrace{x_0 + \bar{x}_1}_{1} + \underbrace{x_1 + \bar{x}_1}_{1} = 1$$

b)

$$y = (x_0 \cdot x_1) + (\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1)$$
$$y = x_0 x_1 + \bar{x}_0 \bar{x}_1 \;\Rightarrow\; x_0 \sim x_1$$

c)

$$y = \left((x_0 x_1 + \bar{x}_0 \bar{x}_1) \cdot \bar{x}_2\right) + \overline{(x_0 x_1 + \bar{x}_0 \bar{x}_1)} \cdot x_2$$
$$y = \bar{x}_2 (x_1 x_0 + \bar{x}_1 \bar{x}_0) + x_2 \cdot \left(\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_0}\right) \cdot \left(\overline{x_1 x_0}\right)$$
$$y = \bar{x}_2 (x_1 x_0 + \bar{x}_1 \bar{x}_0) + x_2 \cdot \left((x_0 + x_1) \cdot \bar{x}_0 + \bar{x}_1\right)$$
$$y = \bar{x}_2 (x_1 x_0 + \bar{x}_1 \bar{x}_0) + x_2 (\bar{x}_1 x_0 + x_1 \bar{x}_0)$$
$$y = \bar{x}_2 (x_0 \sim x_1) + x_2 \left(\overline{x_1 \sim x_0}\right)$$
$$y = x_2 \sim (x_1 \sim x_0)$$