Rjesenja zadataka - Parcijalni ispit II dio 11.02.2002.

Zadatak 0.1 *1. Za kvadratne matrice A i B kazemo da su slicne i pisemo $A \sim B$ ako i samo ako postoji regularna matrica T takva da je $B = T^{-1}AT$. Pokazati da su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ slicne i naci transformirajucu matricu T za koju je $B = T^{-1}AT$.*

2. Naci rang matrice u zavisnosti od parametra λ:

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

□

1. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Pomnozimo $B = T^{-1}AT$ sa T s lijeva da dobijemo $TB = AT$, odnosno

$$\begin{bmatrix} 4a + 3b & -3a - b \\ 4c + 3d & -3c - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 3c & b - 3d \\ a + 2c & b + 2d \end{bmatrix},$$

odnosno, kako su dvije matrice jednake ako i samo oko su im svi clanovi jednaki, dobivamo sistem jednacina

$$\begin{aligned} -a - c &= b \\ a - 2c - 3d &= 0 \end{aligned}$$

Kako imamo cetiri nepoznate i dvije jednacine, mozemo fiksirati dva parametra, npr. $a = \alpha, d = \beta$. Tada imamo $c = \frac{\alpha - 3\beta}{2}, b = \frac{3\beta - 3\alpha}{2}$, odnosno

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{3\beta - 3\alpha}{2} \\ \frac{\alpha - 3\beta}{2} & \beta \end{bmatrix}$$

, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, s tim da imamo uslov $3\alpha^2 - 8\alpha\beta + 9\beta^2 \neq 0$, jer $det(T) \neq 0$, jer T mora biti regularna matrica. Dakle $A \sim B$.

2. Pomocu elementarnih transformacija dobivamo

$$A \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -(\lambda + 2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 2(\lambda + 2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Kada je $\lambda = 0, \lambda = -2, \lambda = -4$, $r(A) = 3$, inace $r(A) = 4$.

■

Zadatak 0.2 *1. Pokazati relaciju:* $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$, *gdje su* $\vec{a}, \vec{b}$ *vektori i* $\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$.

2. *Neka su* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *jedinicni vektori koji obrazuju uglove* $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}, \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2}, \angle(\vec{w}, \vec{u}) = \frac{2\pi}{3}$. *Ako su* $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}; \vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$ *izracunati povrsinu paralelograma konstruisanog nad vektorima* $\vec{a}, \vec{b}$.

□

1. Kako je po definiciji $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$, kvadriranjem i primjenom osnovne trigonometrijeske indenticnosti dobivamo

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2(\angle(\vec{a}, \vec{b}))) = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2,$$

po definiciji skalarnog proizvoda vektora.

2. $\vec{a}^2 = (\vec{u} - \vec{v} + \vec{w})(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = 2 - \sqrt{2}, \vec{b}^2 = 2 + \sqrt{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$, pa na osnovu prvog dijela imamo

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

■

Zadatak 0.3 *Napisati jednacinu projekcije zajednicke normale pravih* $p : \frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3}$ *i* $q : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ *na ravan xoy.*

□

Vektor pravca zajednicke normale dat je sa $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} = (8, 4, 16)$. Uzimamo $\vec{n} = (2, 1, 4)$.

Vektori normala ravni α i β su

$$\vec{N_\alpha} = \vec{n} \times \vec{p} = (5, 34, -11), \quad \vec{N_{beta}} = \vec{n} \times \vec{q} = (-9, 6, 3),$$

tj. $\vec{N_\beta} = (-3, 2, 1)$. Jednacine ravni α i β su

$$\alpha : 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \quad \beta : -3x + 2y + z + 6 = 0.$$

Zajednicka normala n je presjek ravni α i β i ima kakonski oblik

$$n : \frac{x - \frac{5}{2}}{2} = \frac{y - \frac{3}{4}}{1} = \frac{z}{4}$$

Projekciju n' na xoy ravan ove prave n dobivamo kao pravu kroz tacku $(\frac{5}{2},\frac{3}{4},0)$ prodora prave n na xoy ravan sa vektorom pravca $\vec{n'}=(2,1,0)$, jer je to projekcija vektora $\vec{n}$ na ravan xoy, odnosno

$$n' : \frac{x-\frac{5}{2}}{2}=\frac{y-\frac{3}{4}}{1}=\frac{z}{0}$$

■

Zadatak 0.4 *Clanovi nizova* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ispunjavaju uslove :* $a_1>b_1>0$, $a_{n+1}=\frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$. *Dokazati da je:*

1. $a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n; n=1,2,\ldots$

2. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

□

1. Dokazimo nejednakost $a_n>b_n, \forall n\in\mathbb{N}$ indukcijom. Pocetni uslov $(n=1)$ je zadovoljen po postavci zadatka. Pretpostavimo da je izraz tacan za $n=k$, tj. $a_k>b_k$. Sada trebamo dokazati da je $a_{k+1}>b_{k+1}$.

$$a_{k+1}>b_{k+1} \iff \frac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k}>\frac{a_k+b_k}{2} \iff 2a_k^2+2b_k^2>a_k^2+2a_kb_k+b_k^2 \iff (a_k-b_k)^2>0,$$

sto je tacno na osnovu induktivne hipoteze. Dakle po indukciji $a_n>b_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

Pokazimo sada $a_n>a_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$.

$$a_n>a_{n+1} \iff a_n>\frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n} \iff a_n^2a_nb_n>a_n^2+b_n^2 \iff a_nb_n>b_n^2 \iff a_n>b_n,$$

sto je tacno za $\forall n\in\mathbb{N}$ po srednjoj nejednakosti vec dokazanoj.

$$b_{n+1}>b_n \iff \frac{a_n+b_n}{2}>b_n \iff a_n+b_n>2b_n \iff a_n>b_n,$$

sto je tacno za $\forall n\in\mathbb{N}$ po sredjoj nejednakosti $a_n>b_n, \forall n\in\mathbb{N}$. Dakle,

$$a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n,\ n=1,2,\ldots$$

2. Na osnovu prvog dijela zakljucujemo da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotono opadajuci i ogranicen odozdo, a niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotono rastuci ogranicen odozgo. Dakle oba niza imaju granicne vrijednosti $\lim_{n\to\infty}a_n=a, \lim_{n\to\infty}b_n=b$. Sada

$$a_n=2b_{n+1}-b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2b_{n+1}-b_n)\Rightarrow a=2b-b\Rightarrow a=b,$$

jer $\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}b_n$ i po algebri limesa.

■