Rjesenja zadataka- Grupa B 01.02.2002.

Zadatak 0.1 *Pokazati da svaka kvadratna matrica* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *zadovoljava jednacinu* $A^2 - tr(A)A + det(A)E = 0$*, gdje je* $tr(A) = a + d$*,* $det(A) = ad - bc$*,* E *je jedinicna matrica formata* 2×2 *i* 0 *nula matrica formata* 2×2*. Na osnovu ovoga izracunati* $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{142}$.

□

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix},\ tr(A)A = \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 - tr(A)A + det(A)E = \begin{bmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd+0 \\ ac+cd-ac-cd+0 & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz prethodne jednacine je $A^2 = tr(A)A - det(A)E$ pa je za datu matricu $A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = 16E$. Kako je $A^{142} = (A^2)^{71}$, slijedi da je $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{142} = \begin{bmatrix} 16^{71} & 0 \\ 0 & 16^{71} \end{bmatrix} = 16^{71}E$.

■

Zadatak 0.2 *Koristeci neki od kriterija konvergencije ispitati konvergenciju reda:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{2n} \right)^n$$

□

Koristicemo Cauchy-ev korjeni kriterij konvergencije. Opsti clan reda je $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{2n} \right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{2n} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{2n}$$

Ako obiljezimo sa $x_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}$ i $y_n = 2n$ vidimo da je niz y_n monotono rastuci i da je $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Dakle zadovoljeni su uslovi Stolz-ove teoreme, tj. vazi

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2} = \frac{1}{2},$$

Kako je $q = \frac{1}{2} < 1$, na osnovu Cauchy-evog korjenog kriterija zakljucujemo da je red konvergentan.

■

Zadatak 0.3 *Neka je* $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

(a) Ispitati i nacrtati grafik funmcije $f(x)$.

(b) Pokazati da $y = f(x)$ *ima inverznu funkciju* $y = f^{-1}(x)$. *Naci* $f^{-1}(x)$ *i provjeriti da li je* $f(x) + f^{-1}(x) = 0, \ \forall x > 0$. *Naci najkrace rastojanje izmedju grafika* $y = f(x)$ *i* $y = f^{-1}(x)$.

(c) Naci duzinu luka krive $y = f(x)$ *od tacke* $M_1(1, y_1)$ *do tacke* $M_2(2, y_2)$.

□

(a)
1. $D_f = (0, +\infty)$
2. Funkcija nije ni parna ni neparna.
3. Kako je $\frac{e^x-1}{e^x+1} < 1 (\neq 1) \Rightarrow f(x) \neq 0, \ \forall x \in D_f$, tj. funkcija nema nula.
4. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, funkcija ima desnu vertikalnu asimptotu $x = 0$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, funkcija ima desnu horizontalnu asimptotu $y = 0$. Nema kose asimptote.
5. $y' = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y \nearrow$. Funkcija nema ekstrema.
6. $y'' = -2\frac{e^{2x}+1}{(e^{2x}-1)^2} \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow y \bigcap$.

(b) Na osnovu (a)(5.) ($f(x)$ je strogo monotona funkcija), postoji inverzna funkcija date funkcije. Izracunavanjem x-a iz $y = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$ dobijamo $f^{-1}(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$. Na osnovu osobine logaritma ($\ln \frac{1}{X} = -\ln X$), $f^{-1}(x) = -\ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$, pa je ocigledno $f(x) + f^{-1}(x) = 0$.

Kako su funkcija i njoj inverzna funkcija simetricne u odnosu na pravu $y = x$, na osnovu grafa funkcije $f(x)$ jasno je da su tacke koje odrazavaju najkrace rastojanje izmedju $f(x)$ i $f^{-1}(x)$ nalaze na pravoj $y = -x$. Dakle:

$$d = \sqrt{4x^2 + 4(f(x))^2}, \text{gdje je } x = \ln(1+\sqrt{2}), y = \ln \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

(c) $l = \int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx = \ln(e + e^{-1})$.

■

Zadatak 0.4 *Provjeriti jednakost:* $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$, *ako je* $z = x^n \cos \frac{y}{x^2}$.

□

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} \cos \frac{y}{x^2} + x^{n-3} y \sin \frac{y}{x^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^{n-2} \sin \frac{y}{x^2}.$$

Jednakost je ocigledna.

■

Zadatak 0.5 *Naci zapreminu tijela ogranicenog povrsima:* $z = 6 - x^2 - y^2$; $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

□

Uvedimo cilindricne koordinate: $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$. Presjek datih povrsi je dat sa $\rho^2 + \rho - 6 = 0$, odakle se dobija da je $\rho = 2$ (rjesenje $\rho = -3$ otpada zbog uslova $\rho \geq 0$). Sada je

$$V = \int\int\int_K |J| d\rho d\phi dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 \rho d\rho \int_\rho^{6-\rho^2} dz = \frac{32\pi}{3}.$$

■