

1 Zadaci iz indukcije

Zadatak 1.1 *Rijesiti koristeći matematičku indukciju:*

1. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

2. $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$

3. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$

4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

5. $n(2n^2 - 3n + 1) \equiv 0 \pmod{6}$

6. $11^{n+1} + 12^{2n-1} \equiv 0 \pmod{133}$

7. $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$

8. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

2 Zadaci iz binomnog obrasca

Zadatak 2.1 *Odrediti član binomnog razvoja*

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}} \right)^{21}$$

koji sadrži a i b sa jednakim stepenima.

Zadatak 2.2 *Naci član razvoja binoma $(x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^m$ koji sadrži član x^5 , ako je suma svih binomnih koeficijenata 128.*

Zadatak 2.3 *Odrediti x u izrazu*

$$\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} + x^{\ln \sqrt{x}} \right)$$

tako da treći član razvoja bude jednak 36000.

Zadatak 2.4 *Za koje $x \in \mathbb{R}$ je suma trećeg i petog člana razvoja binoma*

$$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}} \right)^n$$

jednaka 135, ako znamo da je suma binomnih koeficijenata tri posljednja člana jednaka 22.

3 Zadaci iz kompleksnih brojeva

Zadatak 3.1 *Odrediti skup tacaka kompleksne ravni odredjen sa:*

1. $|z + 1| = 1$
2. $|z + i| \leq |z - i|$
3. $|z + 4i - 3| \leq 5$

Zadatak 3.2 *Zapisati slijedece kompleksne brojeve u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku:*

1. $z = -1 - i$
2. $z = -2$
3. $z = i$

Zadatak 3.3 *Izracunati $(\sqrt{3} - i)^9$ i $\sqrt[4]{-16}$.*

Zadatak 3.4 *Zapisati u algebarskom obliku*

$$z = \frac{\sqrt{5 + 12i} - \sqrt{5 - 12i}}{\sqrt{5 + 12i} + \sqrt{5 - 12i}}$$

Zadatak 3.5 *Rijesiti jednacinu $z^6 = (1 + i)(z - 2i)^6$.*

4 Zadaci iz polinoma

Zadatak 4.1 *Napisati u obliku $P(z) = Q(z)T(z) + R(z)$, gdje su*

$$P(z) = z^5 - 4z^3 + 2z^2 + z \quad Q(z) = z^3 - 1.$$

Zadatak 4.2 *Naci najveći zajednički djelilac polinoma $P(z) = z^3 - z^2 + 2z - 1$ i $Q(z) = z^4 - z + 2$*

Zadatak 4.3 *Razviti polinom $2z^3 - 4z^2 + 3z + 9$ na linearne faktore.*

Zadatak 4.4 *Razviti slijedece racionalne funkcije na proste razlomke*

1.

$$\frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x + 2)^2(x + 4)}$$

2.

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

5 Zadaci iz sistema linearnih jednacina

Zadatak 5.1 U zavisnosti od $a \in \mathbb{R}$ riješiti sistem jednacina

$$\begin{aligned}ax + ay + (a + 1)z &= a \\ax + ay + (a - 1)z &= a \\(a + 1)x + ay + (2a - 3)z &= 1.\end{aligned}$$

Zadatak 5.2 Diskutovati rjesenja sistema u zavisnosti od realnih parametara i u slucaju rjesivosti, riješiti sistem:

1.

$$\begin{aligned}ax + y + z &= 1 \\x + ay + z &= 1 \\x + y + az &= a^2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}ax + by + z &= 1 \\x + aby + z &= b \\x + by + az &= 1.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}ax + y &= 1 \\-x + ay + z &= 1 \\y + az &= 0.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}ax + 2z &= 2 \\5x + 2y &= 1 \\x - 2y + bz &= 3.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 0 \\ \lambda x - y + 3z &= 0 \\ 3x + y + z &= 0.\end{aligned}$$

6 Zadaci iz matrica

Zadatak 6.1 Neka je $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ i neka je B matrica tipa 2×2 takva da je $AB = BA$.

1. Dokazati $B = \begin{bmatrix} a - 4b & b \\ -7b & a \end{bmatrix}$.

2. Za $a = b = 1$ odrediti A^n .

Zadatak 6.2 Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Odrediti p, q tako da je $A^3 - A^2 + pA + qI = 0$.

Zadatak 6.3 Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rijesiti matricnu jednacinu

1. $(2A - I)X = A + I$

2. $X(A + I) = 3A - I$