1 Matrice

Zadatak 1.1 *Naci rang slijedecih matrica*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.2 *Odrediti vrijednost parametra* λ *tako da matrica* $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ *ima rang* 2.

Zadatak 1.3 *Rijesiti sisteme jednacina*

1.

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + (2\lambda - 1)x_2 + (\lambda - 2)x_3 + 9x_4 &= 0, \end{aligned}$$

gdje je λ *realan parametar.*

5.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= p \\
2x_1 - 17x_2 + 6x_3 + qx_4 &= 3,
\end{aligned}
$$

gdje su p i q realni parametri i u slucaju saglasnosti, rijesiti sistem.

2 Vektori

Zadatak 2.1 *Naci intenzitet vektora* $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$*, gdje su* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *poznati uzajamno normalni vektori.*

Zadatak 2.2 *Izracunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima* $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \mathbf{r}$*,* $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q} - 3\mathbf{r}$ *i* $\mathbf{c} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} + \mathbf{r}$*, gdje su* $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ *uzajamno normalni jedinicni vektori.*

Zadatak 2.3 *Dokazati da su vektori* $\mathbf{a} = \{3, -4, 2\}$*,* $\mathbf{b} = \{4, 1, -1\}$ *i* $\mathbf{c} = \{6, 11, -7\}$ *komplanarni i razloziti vektor* $\mathbf{c}$ *u pravcu vektora* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$*.*

Zadatak 2.4 *Odrediti* $\mathbf{x}$ *koje zadovoljava jednacine*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}.\mathbf{x} &= c \\
\mathbf{a} \times \mathbf{x} &= \mathbf{b},
\end{aligned}
$$

gdje su $\mathbf{a}$ $(\neq \mathbf{0})$ *i* $\mathbf{b}$ *dati vektori a* c *skalar.*

Zadatak 2.5 *Nad vektorima* $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ *i* $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$ *konstruisan je paralelogram. Ako je*

$$
|\mathbf{p}| = 2, \; |\mathbf{q}| = 3, \quad \angle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\pi}{4}.
$$

Izracunati duzinu dijagonala paralelograma i ugao izmedju njih.

Zadatak 2.6 *Dati su vektori* $\mathbf{a} = \{2k, 1, 1-k\}$*,* $\mathbf{b} = \{-1, 3, 0\}$ *i* $\mathbf{c} = \{5, -1, 8\}$*. Odrediti vrijednost realnog parametra k tako da* $\mathbf{a}$ *zaklapa jednake uglove sa vektorima* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{c}$*. Za tako nadjeno k, odrediti zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima* $\mathbf{a}$*,*$\mathbf{b}$*,*$\mathbf{c}$ *i visinu paralelopipeda koja odgovara stranici koju cine vektori* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$*.*

3 Analiticka geometrija

Zadatak 3.1 *Naci jednacinu ravni koja sadrzi tacke* $M(4,1,-2)$ *i* $N(-2,3,-5)$ *i normalna je na ravni* $3x+y-2z+5=0$.

Zadatak 3.2 *Izracunati zapreminu kocke cije dvije strane pripadaju ravnima* $2x-2y+z-1=0$ *i* $2x-2y+z+5=0$.

Zadatak 3.3 *Naci rastojanje tacke* $M(3,-1,2)$ *od prave:* $\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$.

Zadatak 3.4 *Na pravoj* $\frac{x-8}{8}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z}{0}$ *naci tacku cije je rastojanje od tacke* $N(8,2,0)$ *iznosi* 10.

Zadatak 3.5 *Naci tacku koja je simetricna tacki* $M(-1,0,-1)$ *u odnosu na ravan* $2x+y-z+7=0$.

Zadatak 3.6 *Napisati jednacinu prave koja pripada ravni* $2x+3y-z+6=0$ *i sjece pravu* $x=2t,\ y=t-2,\ z=6t+1$ *pod pravim uglom.*

Zadatak 3.7 *Data je ravan* $x+y=0$ *i prave* $p_1:\frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$ *i* $p_2:$ $\begin{cases} y=z+2 \\ x=1 \end{cases}$. *Odrediti pravu* p *paralelnu datoj ravni i koja sijece date prave u tackama cije je rastojanje* 3.

Zadatak 3.8 *Date su prave* $p:\begin{cases} x+2y+2z-3=0 \\ 3x+4y+z-(b+5)=0 \end{cases}$ *i* $q:\begin{cases} x+3y+z-4=0 \\ 2x+2y-z-4=0 \end{cases}$. *Odrediti parametar* b *tako da se prave sijeku. Odrediti presjek pravih* p *i* q *i jednacinu ravni koja ih sadrzi.*

4 Nizovi

Zadatak 4.1 *Izracunti* $\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+3^\alpha+\ldots+(2n-1)^{alpha}}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha>-1.$

Zadatak 4.2 *Izracunati* $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right], \quad p>0.$

Zadatak 4.3 *Izracunati* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{1+2+\ldots+n}\right).$

Zadatak 4.4 *Izracunati* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}.$

Zadatak 4.5 *Izracunati* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}}.$

Zadatak 4.6 *Izracunati* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n+2^{2n}+\ldots+2^{10n}}$.

Zadatak 4.7 *Dokazati da je niz* (a_n) *konvergentan:*

1. $a_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}$, *(n korjena)* $\quad a > 0$.
2. $a_{n+1} = a + {a_n}^2,\ a_0 = a,\ a \in [0, \frac{1}{4}]$.
3. $a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3},\ a_1 = 3$.

Zadatak 4.8 *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}^+,\ a > b$. *Dokazati da nizovi* $(x_n), (y_n)$ *koji zadovoljavaju sistem*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n};\ x_0 = a,\ y_0 = b$$

konvergiraju istoj granicnoj vrijednosti.