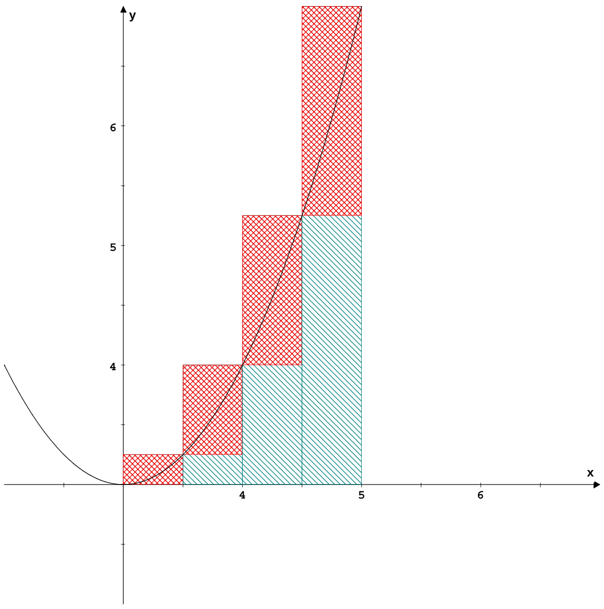
HAUSAUFGABEN:

S. 116 Nr 3,4, S.119 Nr. 3 + Online-Arbeitsblatt durcharbeiten, nicht nur lesen...
Besser zuerst durcharbeiten, danach die Aufgaben lösen.

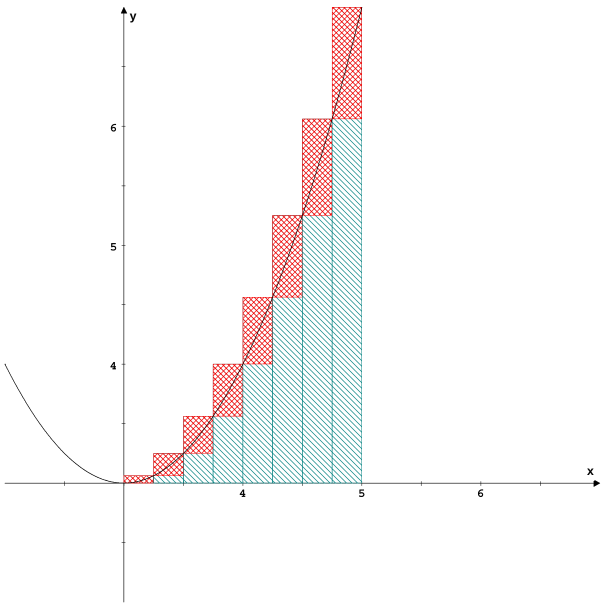
Wiederholung:

1.)Flächenberechnung mittels oberer und unterer Rechteckssummen

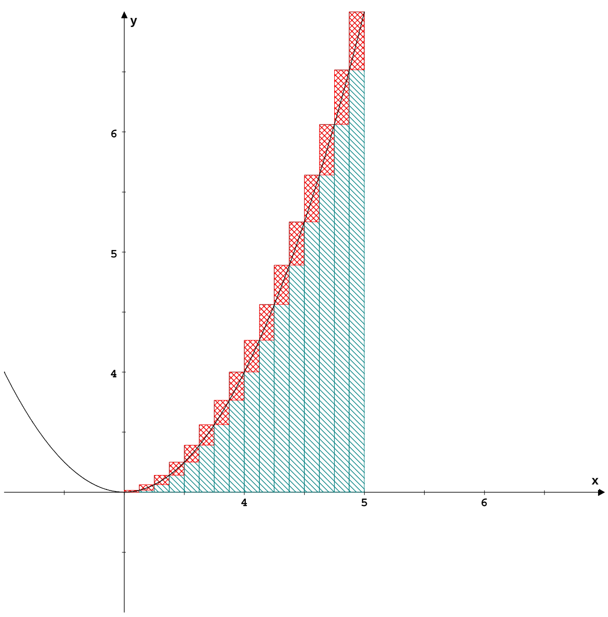
Fläche zwischen dem Schaubild von $f(x) = x^2$, der x-Achse sowie den Geraden $x = 0$ und $x = 2$



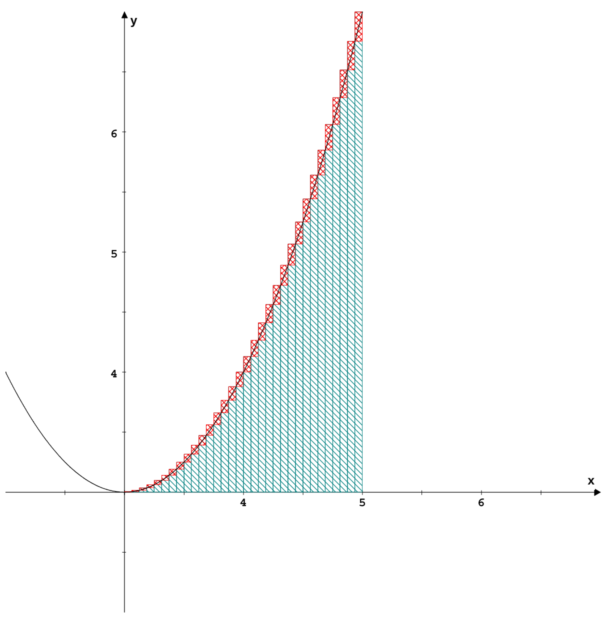
Unterteilung des Intervalls [0;2]
in $n = 4$ Teilintervalle: U_4 und O_4



Unterteilung des Intervalls [0;2]
in $n = 8$ Teilintervalle: U_8 und O_8



Unterteilung des Intervalls [0;2]
in $n = 16$ Teilintervalle: U_{16} und O_{16}



Unterteilung des Intervalls [0;2]
in $n = 32$ Teilintervalle: U_{32} und O_{32}

2.)Das Integral

Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und a, b $\in$ I mit a < b. Für jedes n $\in$ IN^* sei S_n eine Zerlegungssumme mit $S_n = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \ldots + h \cdot f(x_n)$ und $h = \frac{b-a}{n}$.

Dann heißt der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ das **Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b.**

Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx}$ *lies:* **Integral von f(x) dx von a bis b.**

<u>Bezeichnungen:</u> f(x) heißt Integrandenfunktion oder kurz Integrand, x heißt Integrationsvariable, a heißt untere Integrationsgrenze, b heißt obere Integrationsgrenze, dx heißt Differenzial.

3.) Die Integralfunktion

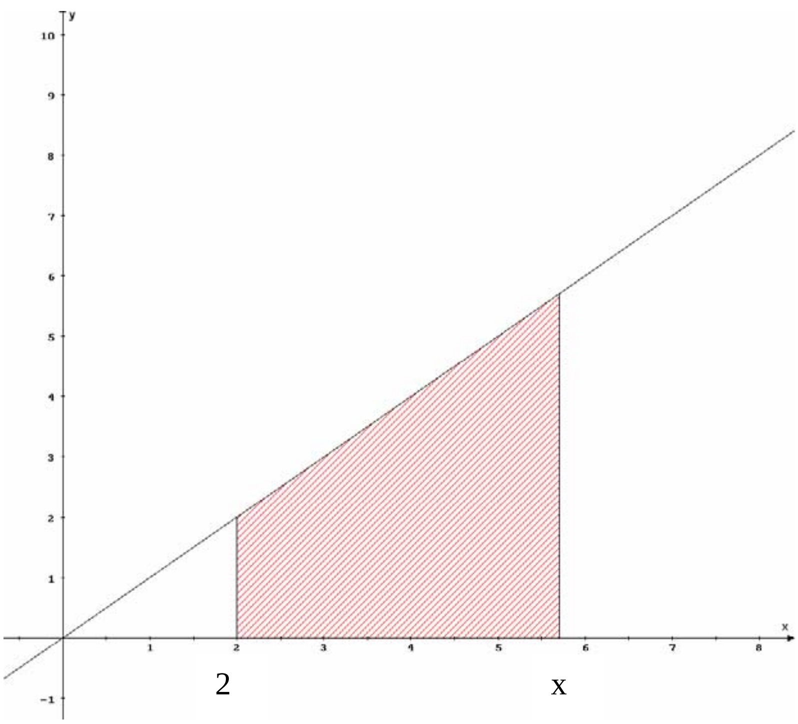
<u>**Definition :**</u> Die Funktion f: t $\to$ f(t) sei in einem Intervall I stetig und a $\in$ I sei fest.

> Dann heißt die Funktion J_a mit $\mathbf{J_a(x)} = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in I$
>
> **Integralfunktion** von f zur unteren festen Grenze a.

Die Integralfunktion ordnet jeder Stelle x den Wert des Integrals zu.
Beachte:

- $\left.\int_a^x f(t)dt\right\}$ Integralfunktion, $f(t)$: Integrandenfunktion
- $J_a(x)$ ist auch für x $\leq$ a definiert.

Beispiel: Gegeben sei f(x) = x. Bestimme einen Funktionsterm für die Integralfunktion $J_2(x)$.



$J_2(x)$ entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Schaubild von f über [2;x]. Man erhält sie als Differenz zweier Dreiecke:

$J_2(x) = J_0(x) - J_0(2)$
$\quad = 0{,}5 * x * x - 0{,}5 * 2 * 2$
$\quad = 0{,}5 * x^2 - 2$

Neues:

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Bisher haben wir lediglich zu einer Funktion f(t) die Integralfunktion $J_a(x)$ aufgestellt. Unser Ziel ist es nun, eine Regel zu finden, mit der man zu einer gegebenen Integrandenfunktion f(t) die Integralfunktion $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ bestimmen kann. Dazu wollen wir zunächst anhand von Beispielen Integralfunktion und Integrandenfunktion miteinander vergleichen:

a) f(t) = t; a = 0

$$J_0(x) = \int_0^x (t)dt$$
$$= \frac{1}{2} \cdot x^2$$ (Flächeninhalt ist Dreieck, siehe Beispielrechnung oben)

b) f(t) = 4; a = -2

$$J_{-2}(x) = J_0(x) - J_0(-2)$$
$$= \int_{-2}^x 4dt$$ (Flächeninhalt ist Rechteck)
$$= x * 4 - (-2) * 4$$
$$= 4x + 8$$

Es fällt auf: ***Bildet man die Ableitung der Integralfunktion, so erhält man die Integrandenfunktion!***

Bildet man die Ableitung der Integralfunktion J_a mit $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, so erhält man die Integrandenfunktion f, d.h. es gilt: $J_a'(x) = f(x)$

$$f(x) \xrightarrow{\text{nach x integrieren}} \int_a^x f(t)\,dt$$
$$f(x) \xleftarrow{\text{nach x differenzieren}} \int_a^x f(t)\,dt$$

Satz: Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist die Funktion f stetig, so ist die Integralfunktion J_a mit $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und die Ableitung ist gleich der Integrandenfunktion f, d.h. es gilt:

$$J_a'(x) = f(x)$$

Man sagt dann: J_a ist eine **Stammfunktion** zu der Funktion f.

Definition: Eine differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f über dem Intervall [a;b], falls gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

für alle x aus [a;b].

Beispiele:

Gib drei mögliche Stammfunktionen F_1, F_2 und F_3 an.

a) $f(x) = x^2$

$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$, da $F_1'(x) = x^2$; $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}$, da $F_2'(x) = x^2$; $F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{5}$, da $F_3'(x) = x^2$

b) $f(x) = 3x + 4$

$F_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$, da $F_1'(x) = 3x + 4$; $F_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{47}{11}$, da $F_2'(x) = 3x + 4$;

$F_3(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x - \sqrt{45}$, da $F_3'(x) = 3x + 4$

c) $f(x) = \sin(x)$

$F_1(x) = -\cos(x)$, da $F_1'(x) = \sin(x)$; $F_2(x) = -\cos(x) + 3$, da $F_2'(x) = \sin(x)$;

$F_3(x) = -\cos(x) - 7$, da $F_3'(x) = \sin(x)$