SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS

I INTRODUCCION

A la fecha, nos hemos centrado en modelos uniecuacionales, esto es, aquellos que involucran sólo una ecuación de interés. En ciertas aplicaciones económicas, sin embargo, debemos trabajar con un conjunto de ecuaciones relacionadas o modelo multiecuacional. En estos apuntes nos centraremos en los métodos de estimación requeridos para tales modelos.

Veamos algunos **ejemplos** para fijar ideas:

a) Consideremos en primer término la siguiente función de consumo y la identidad de cuentas nacionales:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t \qquad (1)$$

$$Y_t \equiv C_t + Z_t \qquad (2)$$

donde C : gasto en consumo agregado
Y : ingreso nacional
Z : gasto que no representa consumo (inversión, gasto de gobierno)
u : ruido blanco

En este caso, C e Y son las variables endógenas y Z es la variable exógena. Supongamos, además, que $\mathbf{u}$~N($\mathbf{0}$, $\sigma_u^2\mathbf{I}_n$) y que $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{u}$ son independientes.

Si reemplazamos la ecuación (2) en la (1), obtenemos que:

$$C_t = \alpha + \beta(C_t + Z_t) + u_t$$

con lo cual,

$$C_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} Z_t + \frac{1}{1-\beta} u_t \qquad (3)$$

$$Y_t = C_t + Z_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} Z_t + \frac{1}{1-\beta} u_t \qquad (4)$$

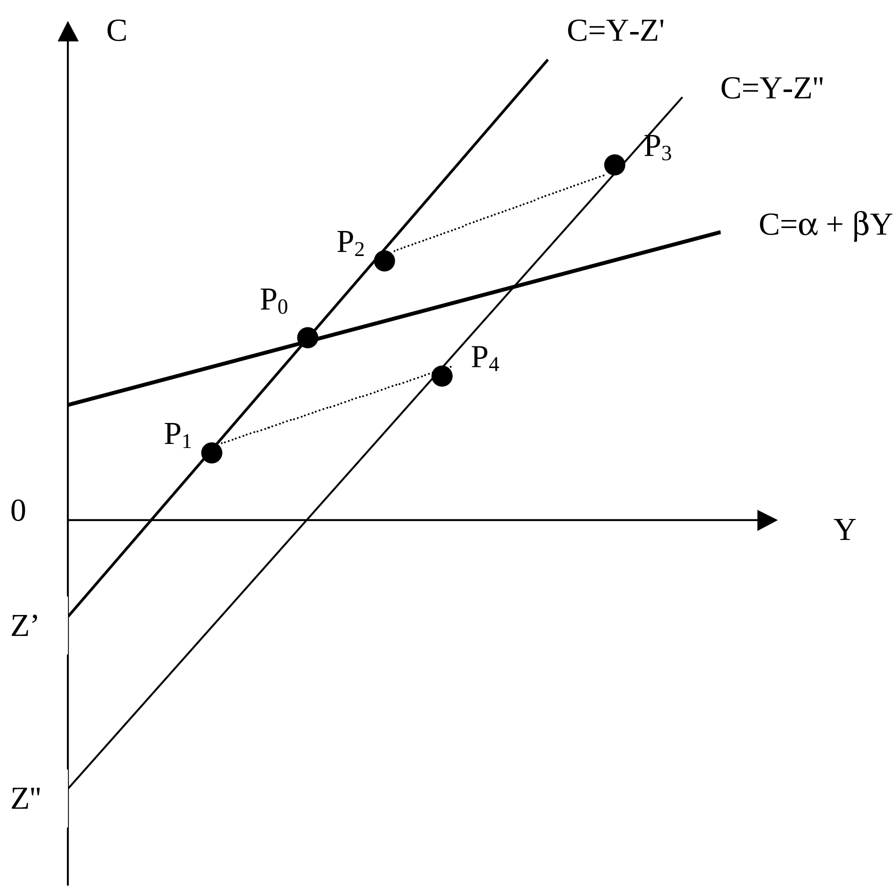
Supongamos que ignoramos la simultaneidad de las ecuaciones (1) y (2), y estimamos la propensión marginal a consumir, β, por MICO aplicados a la ecuación (1):

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \overline{Y})(C_t - \overline{C})}{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \overline{Y})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \overline{Y})C_t}{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \overline{Y})^2} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \overline{Y})u_t}{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \overline{Y})^2}$$

El problema con este estimador es que es i**nconsistente** porque Y_t está correlacionado con u_t:

$$\mathrm{Cov}(Y_t, u_t) = \mathrm{Cov}\left(\frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta}Z_t + \frac{1}{1-\beta}u_t, u_t\right) = \frac{1}{1-\beta}\sigma_u^2$$

Lo anterior se puede visualizar en el siguiente gráfico:



P_0 es el punto de equilibrio dado Z=Z' y u_t=0. Supongamos que dejamos fijo Z en Z' y que u_t toma valores positivos y negativos en un cierto rango finito. En períodos sucesivos, la economía se encontrará en el rango que va de P_1 a P_2, a largo de la recta Y-Z'. Por lo tanto, la regresión estimada de C en Y coincidiría con la recta Y-Z', si Z=Z' es constante. En dicho caso, nuestro estimador de la propensión marginal a consumir sería igual a 1, independiente del número de observaciones.

Ahora, si Z fluctuara entre Z' y Z'', las observaciones caerían en el paralelogramo $P_1P_2P_3P_4$. Una regresión de C en Y minimiza la suma de cuadrados en la dirección vertical. Por lo tanto, en el límite, la recta con pendiente igual a $\hat{\beta}_{MICO}$ va a tender a pasar a través de los puntos P_1 y P_3. La pendiente estimada será **menor** que 1 pero **mayor** que β.

b) Consideremos el caso en que ambas ecuaciones son estocásticas[1]:

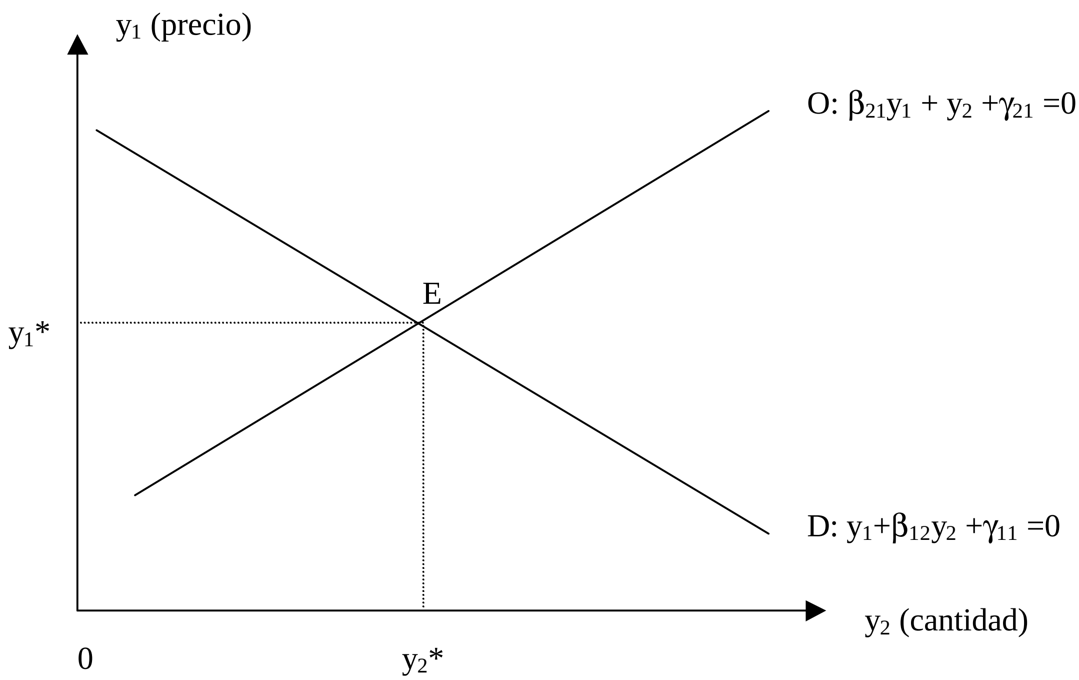
$$y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11} = u_{1t} \qquad t=1, ..., T \qquad (5)$$

$$\beta_{21}y_{1t} + y_{2t} + \gamma_{21} = u_{2t} \qquad (6)$$

Si imponemos las restricciones $\beta_{12}>0$ y $\beta_{21}<0$ y denotamos y_1 como el precio e y_2 como la cantidad, las ecuaciones (5) y (6) representarían una función de demanda y de oferta, respectivamente. A fin de que el intercepto de la recta de demanda sea positivo, debemos imponer la restricción $\gamma_{11}<0$.

Si $u_{1t}=u_{2t}=0$, el modelo podría ser representado en el siguiente gráfico, donde y_1* e y_2* representan el precio y la cantidad de equilibrio, respectivamente:

[1] En lo que sigue, denotaremos las variables endógenas con la letra 'y' y las variables exógenas con la letra 'x'.



Cuando los términos aleatorios u_{1t} y u_{2t} tomen valores distintos de cero, las curvas de oferta y demanda se desplazarán, generando una nube de puntos (y_2, y_1) alrededor del punto de equilibrio E.

¿Cómo estimar las funciones de oferta y demanda cuando sólo se conoce una nube de puntos (precio, cantidad)? Esto se conoce como el **problema de identificación**. En general, el problema de identificación se refiere a si los parámetros de una ecuación específica de un modelo de ecuaciones simultáneas pueden ser estimados.

Para investigar el problema de identificación en las ecuaciones anteriores, podemos mirar al modelo en forma reducida:

$$y_{1t} + \beta_{12} (-\beta_{21} y_{1t} - \gamma_{21} + u_{2t}) + \gamma_{11} = u_{1t}$$

(después de reemplazar la ecuación (5) en la (6)).

$$y_{1t} = \frac{1}{1-\beta_{12}\beta_{21}}(-\gamma_{11} + \beta_{12}\gamma_{21} + u_{1t} - \beta_{12} u_{2t})$$

y, por lo tanto,

$$y_{2t} = \frac{1}{1-\beta_{12}\beta_{21}}(\beta_{21}\gamma_{11} - \gamma_{21} - \beta_{21}u_{1t} + u_{2t})$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$y_{1t} = \mu_1 + v_{1t} \tag{7}$$

$$y_{2t} = \mu_2 + v_{2t} \tag{8}$$

donde:

$$\Delta = 1-\beta_{12}\beta_{21} \qquad \mu_1 = \frac{-\gamma_{11} + \beta_{12}\gamma_{21}}{\Delta} \qquad \mu_2 = \frac{\beta_{21}\gamma_{11} - \gamma_{21}}{\Delta}$$

$$v_{1t} = \frac{u_{1t} - \beta_{12}u_{2t}}{\Delta} \qquad v_{2t} = \frac{-\beta_{21}u_{1t} + u_{2t}}{\Delta}$$

Supongamos $E(\mathbf{u}_t) = \begin{pmatrix} E(u_{1t}) \\ E(u_{2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$.

De ello, $\forall$t, $E(v_{1t})=0$, $E(v_{2t})=0$,

$$E(v_{1t}^2) = \frac{\sigma_{11} + \beta_{12}^2\sigma_{22} - 2\beta_{12}\sigma_{12}}{\Delta^2} \qquad E(v_{2t}^2) = \frac{\beta_{21}^2\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\beta_{21}\sigma_{12}}{\Delta^2}$$

$$Cov(v_{1t}, v_{2t}) = E(v_{1t}, v_{2t}) = \frac{-\beta_{21}\sigma_{11} - \beta_{12}\sigma_{22} + (1+\beta_{12}\beta_{21})\sigma_{12}}{\Delta^2}$$

Se sigue de las ecuaciones (7) y (8) que:

$$\begin{aligned} &E(y_{1t})=\mu_1,\ E(y_{2t})=\mu_2,\ Var(y_{1t}) = Var(v_{1t}),\ Var(y_{2t}) = Var(v_{2t}), \\ &Cov(y_{1t}, y_{2t}) = Cov(v_{1t}, v_{2t}) \qquad \forall\ t=1, 2, \ldots, T. \end{aligned} \tag{9}$$

Para una muestra dada de y_1 e y_2, es posible estimar los parámetros de la **forma reducida** μ_1, μ_2, $Var(y_{1t})$, $Var(y_{2t})$, $Cov(y_{1t}, y_{2t})$. Sin embargo, estas expresiones son a su vez funciones de los 7 parámetros estructurales del modelo: β_{12}, β_{21}, γ_{11}, γ_{21}, σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}. Es decir, tenemos 7 incógnitas pero sólo 5 ecuaciones. De ello se deduce que los parámetros estructurales del modelo no son identificables.

Hay 3 vías por cuales podemos identificar los parámetros de una o ambas ecuaciones: i) restricciones sobre los β's y los γ's; ii) restricciones sobre los parámetros de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$, y; iii) una re-especificación del modelo que incorpore variables (exógenas) adicionales.

Veamos un ejemplo de i). Supongamos que el intercepto de la ecuación de oferta es igual a cero:

$$\gamma_{21} = 0$$

La restricción anterior reduce el número de parámetros estructurales a ser estimados a 6. Sin embargo, el número de parámetros de la forma reducida sigue siendo 5. Aparentemente, los parámetros estructurales siguen siendo no identificables. No obstante, si substituimos la restricción $\gamma_{21}=0$ en las ecuaciones (9), obtenemos que:

$$\mu_1 = -\frac{\gamma_{11}}{\Delta} \qquad \mu_2 = \frac{\beta_{21}\gamma_{11}}{\Delta} \qquad \beta_{21} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Lo anterior implica que β_{21} puede ser estimado como $\hat{\beta}_{21} = -\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}$. Esto permite identificar la ecuación de oferta. Sin embargo, ello no es el caso para la ecuación de demanda.

Supongamos ahora que imponemos una restricción sobre la matriz varianza-covarianza, $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\mathrm{Var}(u_1) = \sigma_{11} = 0$$

Lo anterior implica que $\sigma_{12}=0$, puesto que u_1 no es aleatorio. Por tanto, del conjunto de ecuaciones en (9) se tiene que:

$$\mathrm{Var}(y_{1t}) = \frac{\beta_{12}^2\sigma_{22}}{\Delta^2} \qquad \mathrm{Var}(y_{2t}) = \frac{\sigma_{22}}{\Delta^2} \qquad \mathrm{Cov}(y_{1t}, y_{2t}) = -\frac{\beta_{12}\sigma_{22}}{\Delta^2}$$

Con lo cual la pendiente de la curva de demanda viene dada por:

$$\beta_{12} = \sqrt{\frac{Var(y_{1t})}{Var(y_{2t})}} = -\frac{Cov(y_{1t}, y_{2t})}{Var(y_{2t})} = -\frac{Var(y_{1t})}{Cov(y_{1t}, y_{2t})}$$

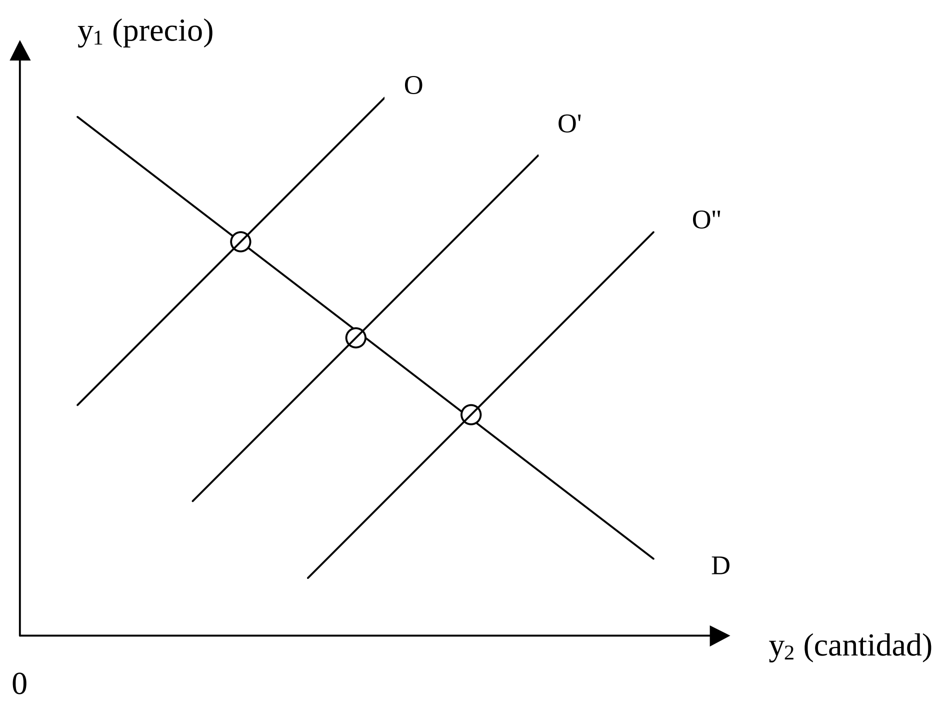
A fin de identificar el intercepto de la curva de demanda, tomamos valor esperado a ambos lados de la ecuación (5):

$$E(y_{1t}) + \beta_{12}\, E(y_{2t}) + \gamma_{11} = E(u_{1t})$$

esto es,

$$\gamma_{11} = -\mu_1 - \beta_{12}\, \mu_2$$

Por lo tanto, hemos identificado los parámetros de la curva de demanda. Intuitivamente, los movimientos de la curva de oferta permitirán identificar la curva de demanda, dado que esta última es determinística ($Var(u_{1t})=0$, $\forall$ t):



II IDENTIFICACION: EL CASO GENERAL

Asumamos un modelo lineal que contiene G ecuaciones, cada una con T observaciones. La i-ava ecuación se puede escribir como:

$$\beta_{i1}\, y_{1t} + \beta_{i2}\, y_{2t} + ... + \beta_{iG} y_{Gt} + \gamma_{i1} x_{1t} + \gamma_{i2}\, x_{2t} + \, ... \, + \gamma_{ik} x_{kt} = u_{it} \qquad (10)$$

$$i=1, 2, ..., G; \; t=1, 2, ..., T$$

Las variables y_i, i=1, ..., G, denotan variables **endógenas** en t. Las variables x_i, i=1,...,k, en tanto, son variables **exógenas** o **predeterminadas** (valores corrientes o rezagos), que pueden incluir rezagos de las y's.

El modelo en (10) se puede expresar matricialmente como:

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t \qquad t=1, 2, ..., T \qquad (11)$$

donde
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & ... & \beta_{1G} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & ... & \beta_{2G} \\ ... & ... & ... & ... \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & ... & \beta_{GG} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & ... & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & ... & \gamma_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & ... & \gamma_{Gk} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ ... \\ y_{Gt} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ ... \\ x_{kt} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ ... \\ u_{Gt} \end{pmatrix}$$

Asumiremos que **B** es invertible. De lo contrario, existirían ecuaciones en el sistema que serían combinaciones lineales de las restantes. Por lo tanto, el modelo en **forma reducida** viene dado por:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\, \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \qquad t=1, 2, ..., T \qquad (12)$$

donde $\Pi_{Gxk} = -\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{\Gamma}$ $\qquad$ $\mathbf{v}_t = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{u}_t$.

El problema de identificación: Del modelo en forma reducida, **a lo más** podremos estimar los elementos de la matriz Π y los de la matriz varianza-covarianza de los v's. Sin embargo, estamos interesados en los **parámetros estructurales** de las matrices **B** y Γ.

A fin de lograr la identificación de los parámetros estructurales, requeriremos de información adicional. Típicamente, dicha información toma la forma de restricciones en los elementos de las matrices **B** y Γ y, a veces, en los elementos de la matriz varianza covarianza de los errores u's.

2.1 Restricciones en los Coeficientes Estructurales

El modelo estructural en (11) puede ser escrito como:

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_t = (\mathbf{B} \quad \Gamma)\begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{x}_t \end{pmatrix} = \mathbf{u}_t \qquad t=1, 2,..., T \tag{13}$$

donde $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{B} \quad \Gamma)_{\mathrm{Gx(G+k)}}$, matriz de todos los coeficientes estructurales:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2G} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GG} & \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{Gk} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{z}_t \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{x}_t \end{pmatrix}_{\mathrm{(G+k)x1}}$, vector de observaciones de todas las variables en t, t=1,.., T.

Consideremos la identificación de la primera ecuación. El procedimiento de identificación es equivalente para el resto de las ecuaciones. Sea α_1 la primera fila de **A**. Entonces la primera ecuación estructural puede ser escrita como:

$$\alpha_1 \mathbf{z}_t = \mathbf{u}_{1t} \qquad \alpha_1\text{, vector 1x (G+k)}$$

La mayoría de las restricciones son de exclusión. Por ejemplo, supongamos que la variable y_3 no aparece en la primera ecuación. Es decir, $\beta_{13}=0$. Esta restricción se puede escribir como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots & \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1k}\end{pmatrix}}_{\alpha_1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\ldots\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}=0$$

Por ejemplo, si, además, $\beta_{11}=\beta_{12}$, tenemos que :

$$\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots & \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\ldots\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}=0$$

Las restricciones anteriores se pueden resumir como:

$$\alpha_1 \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \tag{14}$$

donde $\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\\1 & 0\\\ldots & \ldots\\0 & 0\\\ldots & \ldots\\0 & 0\end{pmatrix}_{(G+k)x2}$.

Además de las restricciones en (14), existen relaciones entre los coeficientes estructurales y los de la forma reducida:

$$\mathbf{B\Pi} + \mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$$

o $$\mathbf{AW} = \mathbf{0}$$

con $$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{I}_k \end{pmatrix}_{(G+k)\,x\,k} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \ldots & \pi_{1k} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \ldots & \pi_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi_{G1} & \pi_{G2} & \ldots & \pi_{Gk} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

De lo anterior, las restricciones sobre los coeficientes estructurales de la primera ecuación son:

$$\alpha_1 \mathbf{W} = \mathbf{0} \tag{15}$$

Combinando (4) y (15), tenemos:

$$\alpha_{1\ 1x\,(G+k)}\ (\mathbf{W} \quad \mathbf{\Phi})_{(G+k)\ x\,(k+r)} = \mathbf{0}_{\ 1\,x\,(k+r)} \tag{16}$$

donde $\mathbf{\Phi}$ es una matriz (G+k) x r.

Si los elementos de $\mathbf{\Pi}$ (esto es, los parámetros de la forma reducida) son conocidos, (16) es un sistema de k+r ecuaciones en G+k incógnitas. Al menos deben existir G+k ecuaciones linealmente independientes para resolver el sistema. Si el rango de la matriz ($\mathbf{W} \quad \mathbf{\Phi}$) fuera G+k, entonces la solución al sistema sería $\alpha_1=\mathbf{0}$, y cualquier combinación lineal de ésta.

Por lo tanto, a fin de tener una solución única y distinta de la solución trivial ($\alpha_1=\mathbf{0}$), imponemos la siguientes restricciones:

$\beta_{11} = 1$ **Normalización** (17 a)

(esto es, el coeficiente asociado a y_1 es igual a 1)

rango($\mathbf{W\ \ \Phi}$) $= G + k - 1$ **Condición de Rango** (17 b)

Las condiciones (17 a) y (17 b) son <u>necesarias y suficientes</u> para la identificación de la primera ecuación (y, en general, para identificar cualquier ecuación).

En la práctica, verificar la condición de rango es tedioso porque requiere construir la matriz Π. Por lo tanto, en una primera etapa uno chequea las <u>condiciones necesarias</u> para la identificación. Si éstas no se satisfacen, claramente la ecuación no está identificada. Si se satisfacen, debemos chequear la condición de rango. ¿Cuáles son las condiciones necesarias? Dado que ($\mathbf{W\ \ \Phi}$) tiene k+r columnas, para que se dé la condición de rango tiene que ser el caso que:

$$k + r \geq G + k - 1$$

esto es, que haya al menos tantas ecuaciones como incógnitas. La condición anterior de reduce a:

$r \geq G - 1$ **Condición de Orden** (18)

Es decir, el número de restricciones impuestas a priori a la ecuación no debe ser inferior al número de ecuaciones en el modelo menos 1.

Si hay sólo **restricciones de exclusión**, la condición de orden es:

El número de variables excluidas de la ecuación debe ser al menos tan grande como el número de ecuaciones en el modelo menos 1.

Finalmente, podemos expresar r como:

$$r = \underbrace{G - g}_{\text{No. de Variables Endógenas Excluidas}} + \underbrace{k - k_i}_{\text{No. de Variables Exógenas Excluidas}}$$

Entonces la **condición de orden** se reduce a:

$k - k_i \geq g - 1$

Esto es, el número de variables **predeterminadas excluidas** de la ecuación i-ava debe ser al menos tan grande como el número de variables **endógenas incluidas** (en la ecuación i-ava) menos 1.

Se puede demostrar que la condición de rango en (17 b) es equivalente a:

$$\text{rango}(\mathbf{A}\,\boldsymbol{\Phi}) = G - 1 \qquad (19)$$

donde **A** es G x (G+k) y **Φ** es (G+k) x r. Dado que la matriz **A Φ** sólo involucra los coeficientes estructurales, es más sencillo verificar su rango. En particular, se tiene:

- $r = G - 1$ la ecuación está exactamente identificada
- $r > G - 1$ la ecuación está sobre-identificada[2]
- $r < G - 1$ la ecuación no está identificada

Ejemplo

Supongamos un sistema de dos ecuaciones:

$$\beta_{11}\, y_{1t} + \beta_{12}\, y_{2t} + \gamma_{11}\, x_{1t} + \gamma_{12}\, x_{2t} = u_{1t}$$

$$\beta_{21}\, y_{1t} + \beta_{22}\, y_{2t} + \gamma_{21}\, x_{1t} + \gamma_{22}\, x_{2t} = u_{2t}$$

Supongamos que imponemos las restricciones:

$\gamma_{12} = 0$ $\gamma_{21} = 0$ restricciones de exclusión

[2] Esto es, hay más restricciones que las necesarias para la identificación.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

Para la primera ecuación, se tiene que $\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, se tiene:

$\text{rango}(\mathbf{A\Phi}) = \text{rango}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} = 1$, el cual es igual a G−1. Por lo tanto, la primera ecuación está identificada. Para la segunda ecuación, $\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces $\text{rango}(\mathbf{A\Phi}) = \text{rango}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ 1 \end{pmatrix} = 1$. En consecuencia, también está identificada.

Alternativamente, podemos utilizar la fórmula en (17 b) para la primera ecuación:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto es
$$\begin{aligned} \beta_{11}\pi_{11} + \beta_{12}\pi_{21} + \gamma_{11} &= 0 \\ \beta_{11}\pi_{12} + \beta_{12}\pi_{22} + \gamma_{12} &= 0 \\ \gamma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Normalizando β_{11}=1, $\beta_{12} = -\dfrac{\pi_{12}}{\pi_{22}}$, $\gamma_{11} = \dfrac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{22}}$.

III ESTIMACION DE ECUACIONES SIMULTANEAS

3.1 Mínimos Cuadrados Indirectos

Este método es factible para una ecuación que está exactamente identificada. El primer caso consiste en estimar los coeficientes del modelo reducido por MICO ecuación por ecuación. Luego obtenemos los parámetros del modelo estructural a partir de las relaciones algebraicas entre éstos y los del modelo reducido.

El modelo estructural en t puede representarse como:

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t = u_t \tag{20}$$

con $\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \dots \\ y_{Gt} \end{pmatrix}_{Gx1}$ $\quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \dots \\ x_{kt} \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \dots \\ u_{Gt} \end{pmatrix}$ $\quad$ t=1, 2, ..., T

Sea[3] $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1' \\ \mathbf{y}_2' \\ \dots \\ \mathbf{y}_T' \end{pmatrix}_{TxG}$ $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ \dots \\ \mathbf{x}_T' \end{pmatrix}_{Txk}$ $\quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{u}_2' \\ \dots \\ \mathbf{u}_T' \end{pmatrix}_{Txk}$

Dado T observaciones, el modelo estructural puede ser escrito como:

$$\mathbf{Y}\mathbf{B}' + \mathbf{X}\mathbf{\Gamma}' = \mathbf{U} \tag{21}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\,\mathbf{\Pi}' + \mathbf{V}$$

donde $\mathbf{\Pi}' = -\mathbf{\Gamma}'(\mathbf{B}')^{-1}$, $\mathbf{V} = \mathbf{U}(\mathbf{B}')^{-1}$. Entonces

$$\hat{\mathbf{\Pi}}' = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{22}$$

[3] Por ejemplo, $\mathbf{y}_1' = (y_{11}\ y_{21}\ \dots\ y_{G1})$, $\mathbf{x}_1' = (x_{11}\ x_{21}\ \dots\ x_{k1})$, $\mathbf{u}_1' = (u_{11}\ u_{21} \dots u_{G1})$.

Supongamos que estamos interesados en una ecuación en particular, la cual representaremos como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}_1 \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{y}$ es Tx1, $\mathbf{Y}_1$ es T x (g–1), $\boldsymbol{\beta}$ es (G–1) x 1, $\mathbf{X}$ es T x k_1, γ es $\mathbf{k}_1$ x 1, $\mathbf{u}$ es T x 1.

La ecuación anterior puede ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

O, alternativamente, como $\begin{pmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \\ \mathbf{0} \\ -\gamma \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{u}$

donde $\mathbf{Y}_2$ y $\mathbf{X}_2$ son matrices de G–g y k–k_i variables endógenas y predeterminadas, respectivamente, excluidas de la ecuación en cuestión.

Sabemos, además, que la ecuación debe satisfacer la siguiente relación entre los coeficientes de las formas estructural y reducida:

$$\Pi' \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

donde Π' es k x G, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ es G x 1, $\begin{pmatrix} \gamma \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ es k x 1.

Sabemos que $\hat{\mathbf{\Pi}}' = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$. Por lo tanto,

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{\beta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

o $$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\begin{pmatrix}\mathbf{y} & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{\beta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

lo que se reduce a:

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1\hat{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})\begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Dado que $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2)$, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\begin{cases} (\mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_1)\hat{\beta}_{\mathrm{mci}} + (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1)\hat{\gamma}_{\mathrm{mci}} = \mathbf{X}_2'\mathbf{y} \\ \\ (\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1)\hat{\beta}_{\mathrm{mci}} + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2)\hat{\gamma}_{\mathrm{mci}} = \mathbf{X}_1'\mathbf{y} \end{cases} \tag{23}$$

Este es un sistema de k ecuaciones con $g-1+k_1$ incógnitas. Dado que la ecuación bajo consideración está exactamente identificada, $k-k_1=g-1$, se deduce que hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, $k=g-1+k_1$. Por lo tanto, la solución para $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ es única:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{\mathrm{mci}} \\ \hat{\gamma}_{\mathrm{mci}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_2'\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

El procedimiento anterior es equivalente al **método de variables instrumentales**. La ecuación estructural analizada es:

$\mathbf{y} = \mathbf{Y}_1\,\beta + \mathbf{X}_1\,\gamma + \mathbf{u}$

De la discusión de las secciones anteriores, sabemos que $\mathbf{Y}_1$ está correlacionado con $\mathbf{u}$. Por lo tanto, MICO aplicado a la ecuación anterior proporcionará estimadores **inconsistentes**. Sin embargo, dado que $\mathbf{X}_2$ no está correlacionada con $\mathbf{u}$, pero sí lo está con $\mathbf{Y}_1$ (ello se desprende del modelo en forma reducida), podemos utilizar ($\mathbf{X}_2$ $\mathbf{X}_1$) como instrumentos de ($\mathbf{Y}_1$ $\mathbf{X}_1$):

$$\hat{\delta}_{\text{vi}} = (\mathbf{Z}_1'\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\mathbf{Z}_1'\mathbf{y} \tag{24}$$

donde $\hat{\delta}_{\text{vi}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{\text{vi}} \\ \hat{\gamma}_{\text{vi}} \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{Z}_1=(\mathbf{X}_2\ \mathbf{X}_1) \quad \tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{X}_1)$.

La solución en (24) es claramente idéntica a (23).

3.2 Mínimos Cuadrados en Dos Etapas (MC2E)

En la práctica no es común encontrar ecuaciones que están exactamente identificadas. Mínimos cuadrados en dos etapas es un método de estimación ampliamente utilizado que sirve para ecuaciones que están exactamente identificadas o sobreidentificadas.

Consideremos nuevamente la ecuación[4]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}_1 \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{u}$$

MICO aplicado a la ecuación anterior entregará estimadores inconsistentes. Lo que hace MC2E es reemplazar $\mathbf{Y}_1$ por $\hat{\mathbf{Y}}_1$, donde este último es computado como:

$$\hat{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1$$

Es decir, en una primera etapa se corre una regresión de cada variable $\mathbf{Y}_1$ en todas las variables predeterminadas del modelo.

En una segunda etapa, se corre una regresión de $\mathbf{y}$ en $\hat{\mathbf{Y}}_1$ y $\mathbf{X}_1$:

---

[4] Sabemos que la condición necesaria para la identificación es que $k - k_1 \geq g - 1$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{mc2e} \\ \hat{\gamma}_{mc2e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 & \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Notemos que $\text{plim}\left(\frac{1}{T}\hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{u}\right) = \text{plim}\left(\frac{1}{T}\mathbf{Y}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)$

$$= \text{plim}\left(\frac{\mathbf{Y}_1'\mathbf{X}}{T}\right)\text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{T}\right)^{-1}\text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{u}}{T}\right) = \mathbf{0}$$

En este caso, MC2E también puede ser interpretado como un método de variables instrumentales, donde la matriz de instrumentos para $(\mathbf{Y}_1\ \mathbf{X}_1)$ es $(\hat{\mathbf{Y}}_1\ \mathbf{X}_1)$.

3.3 Mínimos Cuadrados en Tres Etapas (MC3E)

Supongamos la ecuación estructural:

$\mathbf{y}_i = \mathbf{Y}_i\,\beta_i + \mathbf{X}_i\,\gamma_i + \mathbf{u}_i$ $\qquad$ $E(\mathbf{u}_i\,\mathbf{u}_i') = \sigma_{ii}\,\mathbf{I}$ $\qquad$ $i=1, 2, ..., g$

Sea $\mathbf{Z}_i = (\mathbf{Y}_i\ \mathbf{X}_i)$ $\qquad$ $\delta_i = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \tilde{\mathbf{a}}_i \end{pmatrix}$

Notemos que el estimador de MC2E se puede escribir como:[5]

$$\hat{\delta}_{i,mc2e} = (\mathbf{Z}_i'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i)^{-1}\mathbf{Z}_i'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_i \tag{28}$$

Si premultiplicamos la ecuación estructural por $\mathbf{X}'$ obtenemos:

$\mathbf{X}'\mathbf{y}_i = \mathbf{X}'\,\mathbf{Z}_i\,\delta_i + \mathbf{X}'\mathbf{u}_i$

---

[5] Se puede llegar a este resultado notando que $\hat{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_i$ y que $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_i$.

Supongamos que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}=\mathbf{PP}'$ y premultipliquemos el modelo por $\mathbf{P}'$:

$$\mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{y}_i = \mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i\,\boldsymbol{\delta}_i + \mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{u}_i$$

Sea $\mathbf{w}_i = \mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{y}_i$, $\mathbf{W}_i = \mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{u}_i$. Entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{W}_i\,\boldsymbol{\delta}_i + \mathbf{v}_i \qquad (29)$$

donde $E(\mathbf{v}_i\,\mathbf{v}_i') = E(\mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{u}_i.\mathbf{u}_i'\,\mathbf{X}\,\mathbf{P}) = \sigma_{ii}\,\mathbf{P}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\,\mathbf{P} = \sigma_{ii}\,\mathbf{I}_T$.

El estimador MICO aplicado a la ecuación (30) es equivalente a MC2E:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_i = (\mathbf{W}_i'\mathbf{W}_i)^{-1}\mathbf{W}_i'\mathbf{w}_i = (\mathbf{Z}_i'\mathbf{XPP}'\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i)^{-1}\mathbf{Z}_i'\mathbf{XPP}'\mathbf{X}'\mathbf{y}_i$$

$$= (\mathbf{Z}_i'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i)^{-1}\mathbf{Z}_i'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_i \qquad (30)$$

Si reunimos las G ecuaciones estructurales tenemos:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{w}_1\\ \mathbf{w}_2\\ \dots\\ \mathbf{w}_G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{W}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{0}\\ \dots & \dots. & \dots & \dots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{W}_G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\delta}_1\\ \boldsymbol{\delta}_2\\ \dots\\ \boldsymbol{\delta}_G\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\\ \dots\\ \mathbf{v}_G\end{pmatrix}$$

o $\quad \mathbf{w} = \mathbf{W}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{v}$

donde $E(\mathbf{vv}') = \begin{pmatrix}\sigma_{11}\mathbf{I} & \sigma_{12}\mathbf{I} & \dots & \sigma_{1G}\mathbf{I}\\ \sigma_{21}\mathbf{I} & \sigma_{22}\mathbf{I} & \dots & \sigma_{2G}\mathbf{I}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{G1}\mathbf{I} & \sigma_{G2}\mathbf{I} & \dots & \sigma_{GG}\mathbf{I}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I} \equiv \mathbf{V}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1G}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2G}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \dots & \sigma_{GG}\end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I}$$

Un estimador de la matriz **V** puede ser construido con los residuos de los estimadores MC2E:

$$\hat{\mathbf{V}}^{-1} = \hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{I} \qquad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_i{}'\hat{\mathbf{u}}_j}{T} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_j{}'\hat{\mathbf{u}}_i}{T} = \hat{\sigma}_{ji}$$

donde los errores estimados provienen de los estimadores MC2E.

El estimador MC3E está dado por:

$$\hat{\delta}_{mc3e} = (\mathbf{W}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{w} \qquad (31)$$

cuya varianza asintótica (estimada) está dada por:

$$\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(\hat{\delta}_{mc3e}) = (\mathbf{W}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{W})^{-1} \qquad (32)$$

Notemos que MC2E es equivalente a MC3E si:

(i) $\sigma_{ij} = 0, \forall\ i \neq j$
(los errores de las ecuaciones <u>no</u> están correlacionados contemporáneamente).

(ii) Todas las ecuaciones están exactamente identificadas.
(En este caso, $\mathbf{X'Z}_i$ y $\mathbf{W}_i = \mathbf{P'X'Z}_i$ son matrices k x k, invertibles).

3.4 Máxima Verosimilitud con Información Completa (MVIC)

Supongamos nuevamente el modelo lineal de ecuaciones simultáneas con G variables endógenas:

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t \qquad t=1, 2,..., T$$

donde $E(\mathbf{u}_t) = \mathbf{0}$ $\quad E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = \mathbf{\Sigma}$

Si los G errores en t siguen una distribución normal multivariada, se tiene:

$$f(\mathbf{u}_t) = (2\pi)^{-G/2}|\mathbf{\Sigma}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}_t{}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{u}_t\right) \qquad (33)$$

Si, además, los componentes del vector $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2\ \ ...\mathbf{u}_T)'$ no están correlacionados serialmente, la distribución conjunta de los **u**'s viene dada por:

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_T) = \prod_{t=1}^{T} f(\mathbf{u}_t) = (2\pi)^{-TG/2} |\mathbf{\Sigma}|^{-T/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{u}_t{}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{u}_t \right)$$

La función de verosimilitud de la muestra viene dada por:

$$L = (2\pi)^{-TG/2} |\mathbf{B}|^{T} |\mathbf{\Sigma}|^{-T/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t)' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t) \right) \tag{34}$$

dado que $\mathbf{u}_t = \mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t$, t=1, .., T, $\left|\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{y}_t}\right| = |\hat{\mathbf{A}}|$, jacobiano de la transformación.

Los estimadores MVIC provienen de maximizar (34) con respecto a los elementos de las matrices **B**, **Γ** y **Σ**.

Es importante señalar que los estimadores MC3E y MVIC son asintóticamente equivalentes. Por lo tanto, se recomienda utilizar MC3E por su mayor simpleza computacional.

4 APLICACIÓN: MODELO MACROECONOMICO DE KLEIN[6]

El modelo de Klein incluye tres ecuaciones de comportamiento y tres identidades. Las ecuaciones de comportamiento son las siguientes:

Consumo $C = \alpha_0 + \alpha_1\Pi + \alpha_2(W_1+W_2) + \alpha_3\,\Pi_{-1} + u_1$

Inversión $I = \beta_0 + \beta_1\Pi + \beta_2\,\Pi_{-1} + \beta_3 K_{-1} + u_2$

Demanda por Trabajo $W_1 = \gamma_0 + \gamma_1(Y+T-W_2) + \gamma_2(Y+T-W_2)_{-1} + \gamma_3 t + u_3$

donde C = consumo
Π= ganancias
W_1= salario sector privado
W_2= salario sector público
I = inversión
G= gasto de gobierno
K= *stock* de capital
Y= ingreso nacional
T= impuestos indirectos
t = variable de tendencia (años)

Las identidades son las siguientes:

$Y+T=C+I+G$ $\quad Y=W_1 + W_2 + \Pi$ $\quad K = K_{-1} + I$

En total, el modelo incluye 6 variables endógenas (C, I, W_1, Y, Π, K) y 8 predeterminadas o exógenas (constante, G, W_2, T, Π_{-1}, K_{-1}, $(Y+T-W_2)_{-1}$, t). Las tres ecuaciones de comportamiento están sobreidentificadas. A continuación se muestra un programa escrito en TSP 4.4 para la estimación de los parámetros del modelo, mediante MC2E y MC3E. Tal como esperaríamos, el método de MC3E conduce a estimadores más eficientes. Las magnitudes de algunos parámetros presentan variaciones relativamente grandes. Sin embargo, ello no es sorprendente porque se trata de una muestra relativamente pequeña. Como sabemos, en términos asintóticos, MC2E y MC3E son consistentes, pero este último método de estimación es más eficiente.

[6] Este ejemplo se encuentra en *Econometric Models and Economic Forecasts*, R. Pindyck y D. Rubinfield.

Programa

```
OPTIONS CRT;
SUPRES @W ;
?
FREQ A;
LOAD ;
SMPL 20,40 ; GENR K = K1(+1);
SMPL 41,41 ; GENR K = K(-1) + I;
SMPL 20,41 ;
GENR TX=YT-Y ;              ? Impuestos Indirectos
GENR TM=YEAR-1931 ;         ? Tendencia
GENR W = W1+W2 ;            ?  Salarios totales
GENR E = Y+TX-W2 ;          ? PGB menos salarios sector público
?
PARAM A1-A12;
?
?  Ecuaciones de Comportamiento
?
FRML CON   CX = A1 +  A2*P +  A3*P(-1) +  A4*(W1+W2) ;
FRML INV    I = A5 +  A6*P +  A7*P(-1) +  A8*K(-1) ;
FRML WAGES W1 = A9 + A10*(Y+TX-W2) + A11*(Y(-1)+TX(-1)-W2(-1)) + A12*TM ;
?
?  Identidades
?
SMPL 20,41 ;
IDENT I4    Y = CX + I + G - TX;  GENR I4;
IDENT I5    P = Y - W1 - W2;      GENR I5;
IDENT KAP   K = K(-1)+I ;
?
LIST KENDOG CX I W1 Y P K;                        ? Variables endógenas
LIST IVS C TM G TX P(-1) K(-1) E(-1) W2;          ? Variables exógenas
LIST KEQ CON INV WAGES I4 I5 KAP;                 ? Ecuaciones del modelo

SMPL 21,41 ;
?
?   Estimación vía MC2E  (2SLS)
?
2SLS (INST=IVS) CX C P P(-1) W ;
2SLS (INST=IVS) I C P P(-1) K(-1) ;
2SLS (INST=IVS) W1 C E E(-1) TM ;
?
?    Estimación vía MC3E (3SLS).
?
3SLS (INST=IVS) CON INV WAGES ;
?
STOP ; END ;
?
NOPRINT;
SMPL 20 41 ;
```

```
? Datos de  consumo, inversión, gasto de gobierno, ingreso antes de impuestos, stock de capital rezagado,
?ganancias, salarios sector privado, salarios del gobierno, PGB;

LOAD YEAR CX I G YT K1 P W1 W2 Y ;
1920 39.8  2.7  4.6 47.1 180.1 12.7 28.8 2.2 43.7
1921 41.9  -.2  6.6 48.3 182.8 12.4 25.5 2.7 40.6
1922 45.0  1.9  6.1 53.0 182.6 16.9 29.3 2.9 49.1
1923 49.2  5.2  5.7 60.1 184.5 18.4 34.1 2.9 55.4
1924 50.6  3.0  6.6 60.2 189.7 19.4 33.9 3.1 56.4
1925 52.6  5.1  6.5 64.2 192.7 20.1 35.4 3.2 58.7
1926 55.1  5.6  6.6 67.3 197.8 19.6 37.4 3.3 60.3
1927 56.2  4.2  7.6 68.0 203.4 19.8 37.9 3.6 61.3
1928 57.3  3.0  7.9 68.2 207.6 21.1 39.2 3.7 64.0
1929 57.8  5.1  8.1 71.0 210.6 21.7 41.3 4.0 67.0
1930 55.0  1.0  9.4 65.4 215.7 15.6 37.9 4.2 57.7
1931 50.9 -3.4 10.7 58.2 216.7 11.4 34.5 4.8 50.7
1932 45.6 -6.2 10.2 49.6 213.3  7.0 29.0 5.3 41.3
1933 46.5 -5.1  9.3 50.7 207.1 11.2 28.5 5.6 45.3
1934 48.7 -3.0 10.0 55.7 202.0 12.3 30.6 6.0 48.9
1935 51.3 -1.3 10.5 60.5 199.0 14.0 33.2 6.1 53.3
1936 57.7  2.1 10.3 70.1 197.7 17.6 36.8 7.4 61.8
1937 58.7  2.0 11.0 71.7 199.8 17.3 41.0 6.7 65.0
1938 57.5 -1.9 13.0 68.6 201.8 15.3 38.2 7.7 61.2
1939 61.6  1.3 14.4 77.3 199.9 19.0 41.6 7.8 68.4
1940 65.0  3.3 15.4 83.7 201.2 21.1 45.0 8.0 74.1
1941 69.7  4.9 22.3 96.9 204.5 23.5 53.3 8.5 85.3
 ; END ;
```

Resultados Estimación Modelo de Klein

		MC2E		**MC3E**	
Ecuación	Variable	Coeficiente	Error Estándar	Coeficiente	Error Estándar
Consumo	Constante	16.555	1.468	16.443	1.303
	Π	0.0173	0.131	0.1263	0.108
	Π_{-1}	0.2162	0.119	0.163	0.100
	W_1+W_2	0.8101	0.044	0.789	0.038
Inversión	Constante	20.278	8.383	28.507	6.834
	Π	0.150	0.192	–0.023	0.163
	Π_{-1}	0.616	0.181	0.764	0.154
	K_{-1}	–0.158	0.040	–0.196	0.033
Demanda por Trabajo	Constante	1.500	1.276	1.811	1.115
	$Y+T-W_2$	0.438	0.039	0.399	0.032
	$(Y+T-W_2)_{-1}$	0.147	0.043	0.183	0.034
	tendencia (t)	0.130	0.032	0.150	0.028