FORMAS INDETERMINADAS Y
REGLA DE L'HOSPITAL

El Marqués de L'Hospital (1661-1704) fue un noble francés y matemático aficionado, quien, aparentemente, tenía empleado al matemático Johann Bernoulli. (William Dunham, Journey through Genius, Penguin Books, 1990)

1. Supone que tenemos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y sabemos que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

Y nos interesa conocer el siguiente límite:

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}} \qquad (1)$$

Puede ser que el límite exista o no, pero tenemos un problema de indeterminación en (1), del tipo $\frac{0}{0}$.

2. Otro caso tenemos cuando:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty \quad ; \quad \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$$

Ahora la indeterminación de (1) es del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3. Cuando se dan estas condiciones de indeterminación, se puede resolver el límite (si existe) aplicando la llamada Regla de L'Hospital que dice:

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad (2)$$

Siempre que f y g sean diferenciables y $g'(x) \neq 0$ en las cercanías de x = c, (posiblemente excepto en c).

Es decir, el límite de un cociente de funciones es igual al límite de sus primeras derivadas.

Si $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **resulta ser también una forma indeterminada**, la regla de L'Hospital se puede aplicar nuevamente. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}} \qquad (3)$$

Recuerda: la regla de L'Hospital se puede aplicar sucesivamente siempre y cuando se trate de formas indeterminadas.

James Stewart, Calculus, cuarta edición, Brooks/Cole, 1999, pp. 485-86.