MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Nota elaborada por Alcides José Lasa con base en Edward T. Dowling, Introduction to Mathematical Economics, McGraw-Hill, 3° edición, 2001.

Se tiene una función $f(x)$ continuamente continuamente diferenciable hasta el orden n en sus números críticos y queremos encontrar sus máximos o mínimos locales o bien sus puntos de inflexión.

Procedimiento:

1. Encontrar el o los números críticos de la función igualando a cero la primera derivada. Se hace $f'(x) = 0$ y se encuentra el o los valores de la variable independiente que producen esa igualdad. Los denominamos x^*.

2. Se calcula la segunda derivada (la derivada de la derivada) y se evalúa en los números críticos encontrados en el punto anterior. Se pueden tener las siguientes posibilidades:

(a) $f''(x^*) < 0$ → el punto crítico es un máximo de $f(x)$

(b) $f''(x^*) > 0$ → el punto crítico es un mínimo de $f(x)$

(c) $f''(x^*) = 0$ → no podemos obtener ninguna conclusión.

3. Si se da el caso (c), continuamos haciendo las derivadas sucesivas hasta encontrar una derivada tal que, **evaluada en el punto crítico**, sea distinta de cero. Ahora tenemos los siguientes casos posibles:

(a) Si el orden de la derivada es un número impar, por ejemplo, $f''', f^5, etc.$, entonces el punto crítico es un punto de inflexión (un punto en el que la gráfica cambia de cóncava desde abajo a cóncava desde arriba (también llamada convexa) o viceversa. También se puede verificar que se trata de un punto de inflexión si comprobamos que $f''(x)$ cambia de signo para valores cercanos inferiores o superiores a x^*.

(b) Si el orden de la derivada es un número par, por ejemplo, $f^4, f^6, etc.$, entonces el punto crítico es un máximo o un mínimo. Si el valor de la derivada es menor que cero, entonces es un máximo y si es mayor que cero tenemos un mínimo.

Ejemplos:
(1)
$$y = f(x) = (x-10)^4$$

$$f'(x) = 4(x-10)^3$$

Igualando a cero: $f'(x) = 4(x-10)^3 = 0$

Encontramos que el número crítico es $x^* = 10$
Hacemos la segunda derivada:

$$f''(x) = 12(x-10)^2$$

Evaluamos esta derivada en su número crítico y tenemos:
$$f''(x) = 12(10-10)^2 = 0$$

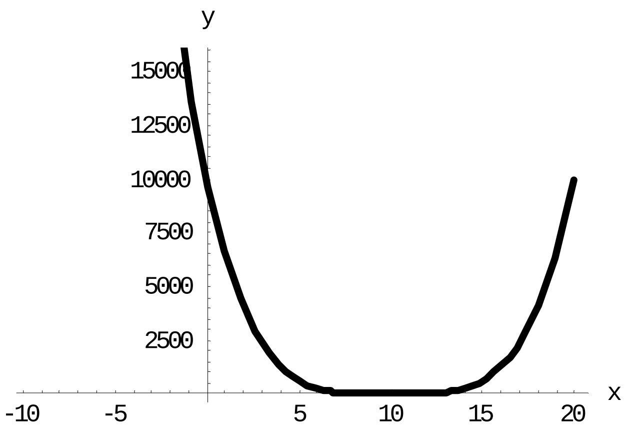
Continuamos haciendo las derivadas de orden más alto:

$f'''(x) = 24(x-10)$ y tenemos que: $f'''(10) = 24(10-10) = 0$

$$f^4(x) = 24 > 0$$

Conclusión: Puesto que el orden de la derivada para la cual encontramos que es distinta de cero es par (4), la función $y = f(x) = (x-10)^4$ tiene un mínimo en $x = 10$, porque esta derivada evaluada en el punto crítico es mayor que cero.

Grafica de la función $y = f(x) = (x-10)^4$



(2)

$$y = f(x) = (x - 10)^5$$

$$f'(x) = 5(x - 10)^4$$

Igualando a cero: $f'(x) = 5(x - 10)^4 = 0$

Encontramos que el número crítico es $x^* = 10$
Hacemos la segunda derivada:

$$f''(x) = 20(x - 10)^3$$

Evaluamos esta derivada en su número crítico y tenemos:

$$f''(x) = 20(10 - 10)^3 = 0$$

Continuamos haciendo las derivadas de orden más alto:

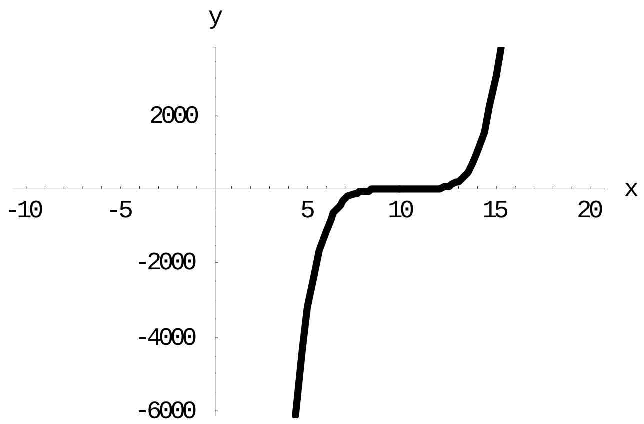
$f'''(x) = 60(x - 10)^2$ y tenemos que: $f'''(10) = 60\,(10 - 10) = 0$

$f^4(x) = 120(x - 10)$ y tenemos que: $f^4(10) = 120\,(10 - 10) = 0$

$$f^5(x) = 120$$

Puesto que el orden de la derivada para la cual encontramos que evaluada en el punto crítico es distinto de cero es un número impar, el punto crítico es un punto de inflexión.

Grafica de la función $y = f(x) = (x - 10)^5$



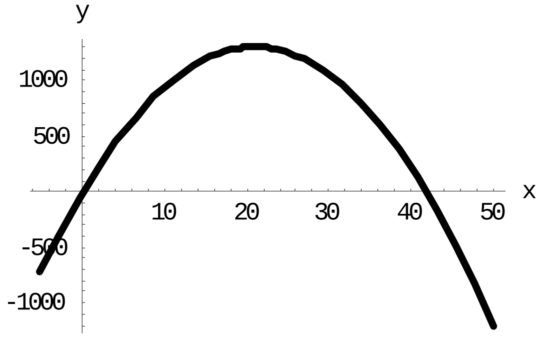
Otros ejemplos:

1. $f(x) = -3x^2 + 126x - 20$

$f'(x) = -6x + 126$

Punto crítico: $x^* = 21$

$f''(x) = -6 < 0$ → **Máximo**

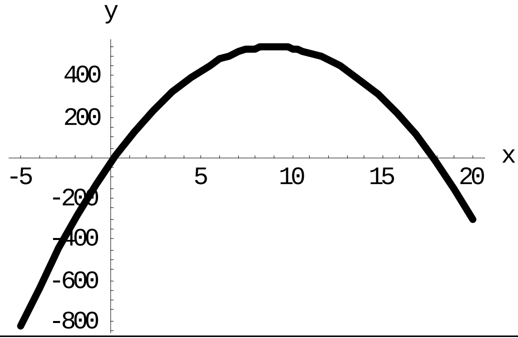


2. $f(x) = -7x^2 + 126x - 23$

$f'(x) = -14x + 126$

Punto crítico: $x^* = 9$

$f''(x) = -14 < 0$ → **Máximo**



3. $f(x) = 3x^3 - 36x^2 + 135x - 13$

$f'(x) = 9x^2 - 72x + 135$

Puntos críticos:

$x^*_1 = 3,\ x^*_2 = 5$

$f''(x) = 18x - 72$

$f''(3) = 18(3) - 72 = -18 < 0$

x* =3 → Máximo

$f''(5) = 18(5) - 72 = 18 > 0$

x* =5 → Mínimo

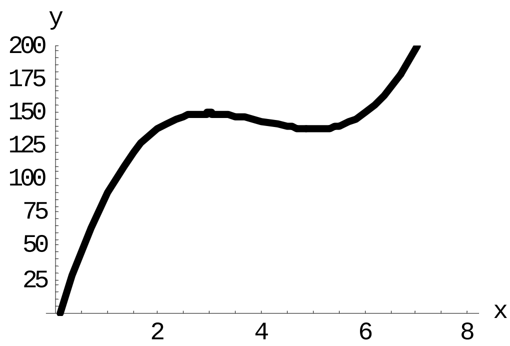
$f''(x) = 18x - 72 = 0 \rightarrow x = 4$

x = 4 → Posiblemente es un punto de inflexión

$f''(3.99) < 0$

$f''(4.01) > 0$

x = 4 es un punto de inflexión



4.

$$f(x) = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 + 5$$

$$f'(x) = 8x^3 - 48x^2 + 64x$$

Puntos críticos:

$$x^*_1 = 0,\ x^*_2 = 2,\ x^*_2 = 4$$

$$f''(x) = 24x^2 - 96x + 64$$

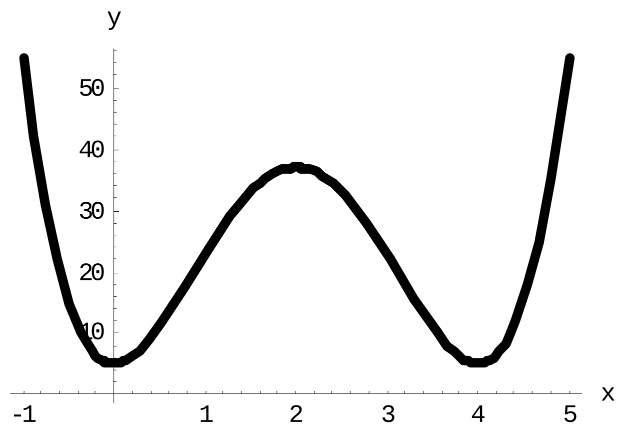
$f''(0) > 0$ → **Mínimo en x = 0.**

$f''(2) < 0$ → **Máximo en x = 2.**

$f''(4) > 0$ → **Mínimo en x = 4**

Haciendo: $f'' = 0$

x=0.845299 , x = 3.1547 Son puntos de inflexión



5. $f(x) = (5 - x)^3$

$$f'(x) = 3(5 - x)^2$$

Puntos críticos:

$$x^*_1 = 5$$

$$f''(x) = 6(5 - x) = 30 - 6x$$

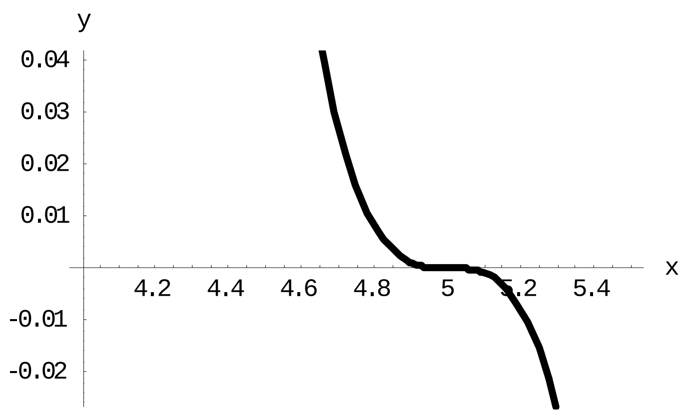
$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 5$$

Probablemente x = 5 es un punto de inflexión.

$$f''(4.99) > 0$$

$$f''(5.01) < 0$$

x = 5 es un punto de inflexión



6. $f(x) = -(x-8)^4$

$f'(x) = -4(x-8)^3$

Puntos críticos:

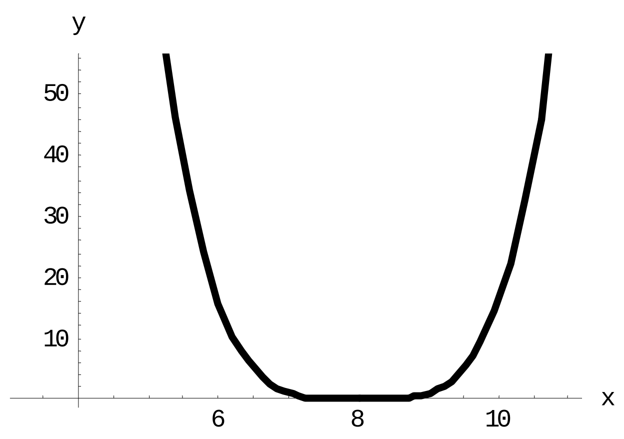
$x^*_1 = 8$

$f''(x) = -12(x-8)^2$

$f'''(x) = -24(x-8)$

$f^4(x) = -24 < 0$

Hay un mínimo cuando x = 8



7. $f(x) = (5-x)^3$

$f'(x) = -3(5-x)^2$

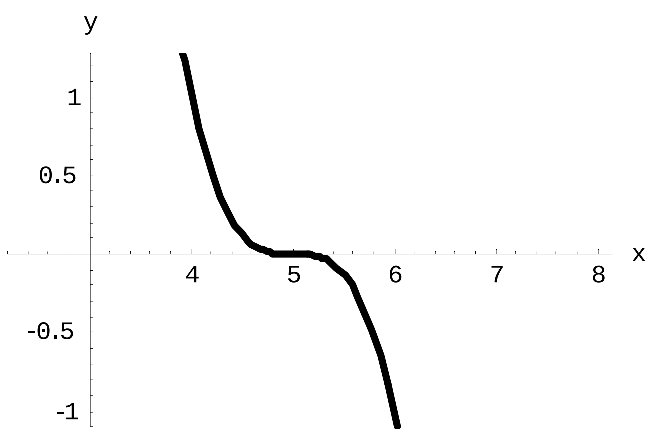
Puntos críticos:

$x^*_1 = 5$

$f''(x) = 6(5-x)$

$f'''(x) = -6 < 0$

Hay un punto de inflexión en x = 5



8. $f(x) = -2(x-6)^6$ $f'(x) = -12(x-6)^5$ **Puntos críticos:** $x^*_1 = 6$ $f''(x) = -60(x-6)^4$ $f'''(x) = -240(x-6)^3$ $f^4(x) = -720(x-6)^2$ $f^5(x) = -1440(x-6)$ $f^6(x) = -1440 < 0$ **La función f(x) tiene un máximo en x = 6.**