MATEMÁTICAS III

(Carrera de Economía)

(http://www.geocities.com/ajlasa)

1. DERIVADAS PARCIALES

Definición:

Sea una función $z = f(x, y)$. Se llama **derivada parcial** de la función z respecto de la variable independiente x, cuando se supone constante a la variable y, y se calcula como:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

De manera similar, definimos la derivada parcial de la función z respecto de la variable y, cuando suponemos constante a la variable x y hacemos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y + \Delta y, x) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Para calcular las derivadas parciales podemos usar las reglas de derivación que usamos en el curso pasado (Matemáticas II) para el caso de funciones en una variable independiente, teniendo el cuidado de que la(s) variable(s) respecto de la cual **no** se deriva deben tomarse como una constante cualquiera.

Ejemplo:

Tenemos $z = f(x, y) = x\, y^2$ y queremos calcular las derivadas parciales de z respecto de x y de y, aplicando las definiciones dadas anteriormente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)y^2 - x\ y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{xy^2 + \Delta x y^2 - x\ y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\ y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} y^2 = \boxed{y^2}$$

De igual manera:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(y+\Delta y)^2 x - x\ y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2\right]x - x\ y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{y^2 x + 2y\Delta y\ x + (\Delta y)^2 x - x\ y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y\ \Delta y\ x + (\Delta y)^2 x}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 2yx + \Delta y\ x = \boxed{2yx}$$

Podemos llegar a los mismos resultados utilizando las reglas de derivación.

Si consideramos que y es una constante y hacemos la derivada de z respecto de x,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$$

Si tomamos a x como constante y derivamos respecto de y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$$

2. GENERALIZACIÓN A n VARIABLES

Una función con n variables independientes puede escribirse como:

$$z = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

Las derivadas parciales de la función z respecto de cada una de las variables independientes se calcula considerando a todas las demás como constantes y, por lo tanto, se pueden utilizar las reglas de derivación simples de la misma manera como lo hicimos para el caso de funciones en dos variables independientes.

3. SIMBOLISMO DE DERIVADAS

No hay una convención única para simbolizar una derivada parcial. Las más comunes – que usaremos en el curso - son las siguientes: Si tenemos $z = f(x, y)$, las derivadas parciales respecto de las variables independientes las escribimos alternativamente como:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y$$

Si tenemos una función $z = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$, es muy común escribir las derivadas parciales respecto a las n variables independientes así:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = f_n$$

4. PROBLEMAS RESUELTOS

Comprobar las derivadas parciales de las funciones que se indican a continuación:

1. $z = x^3 + y^3 - 3axy$; $f_x = 3x^2 - 3ay$; $f_y = 3y^2 - 3ax$

2. $z = \dfrac{y}{x}$; $f_x = -\dfrac{y}{x^2}$ $f_y = \dfrac{1}{x}$

3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ $f_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

4. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $f_x = -\dfrac{x^2}{(x^2 - y^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $f_y = \dfrac{xy}{(x^2 - y^2)^{3/2}}$

5. $z = x^y$; $f_x = x^{-1+y}\,y$; $f_y = x^y \,\mathrm{Log}[x]$