DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES COMPUESTAS
Y DERIVADA TOTAL
(http://www.geocities.com/ajlasa)

1. Derivadas parciales de funciones compuestas

Suponemos la función:

$$z = f(u,v) \qquad (1)$$

Donde $u = g(x,y); \quad v = h(x,y)$

Suponemos que la función está definida en el campo de los números reales y que las derivadas son continuas.

Las variables independientes de z son x, y de manera que las derivadas parciales que nos interesan son $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$.

Para resolver estas derivadas parciales aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_u g_x + f_v h_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = f_u g_y + f_v h_y \qquad (2)$$

Ejemplo:

$$z = f(u,v) = u v^2 ; \quad u = \ln xy ; \quad v = 2x + y$$

Aplicando (2):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v^2 \frac{y}{xy} + 4\,uv$$

$$= \frac{(2x+y)^2}{x} + 4\,ln(xy)(2x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v^2}{y}+2\,u\,v$$
$$=\frac{\left(2x+y\right)^2}{y}+2\ln\left(xy\right)\left(2x+y\right)$$

En este caso también podemos resolver las derivadas parciales haciendo,

$$z=uv^2=\ln\left(xy\right)\left(2x+y\right)^2$$

Y resolviendo las derivadas parciales mediante la regla de derivadas del producto de funciones obtenemos el mismo resultado. Dejamos al estudiante la tarea de verificarlo.

2. Derivadas totales de funciones compuestas

Supongamos que tenemos la función

$$z=f\left(u,v\right) \qquad (3)$$

Donde $u=g\left(x\right);\quad u=h\left(x\right)$

Puesto que z depende de u y de v y estas dos variables dependen únicamente de x consideramos que z depende solamente de x y podemos calcular la derivada $\frac{dz}{dx}$. Para ello desarrollamos primero el diferencial total de la función:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Dividiendo ambos lados por dx nos queda:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \qquad (4)$$

Y el resultado se llama derivada total de z respecto de x.

Ejemplo:

$$z = \frac{u}{v}$$

Siendo $u = e^x; \quad v = \ln x$

Aplicando (4):

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{1}{v}\frac{du}{dx} + \frac{-u}{v^2}\frac{dv}{dx}\\ &= \frac{1}{v}e^x + \frac{-u}{v^2}\frac{1}{x}\\ &= \frac{e^x}{\ln x} - \frac{e^x}{x(\ln x)^2}\end{aligned}$$

Es claro que llegamos al mismo resultado si hacemos:

$$z = \frac{u}{v} = \frac{e^x}{\ln x}$$

Y derivamos respecto de x. Dejamos al estudiante la tarea de verificarlo.