MATEMÁTICAS III

(Carrera de Economía)

FUNCIONES HOMOGÉNEAS Y TEOREMA DE EULER
(http://www.geocities.com/ajlasa)

Las funciones homogéneas ocupan un lugar central en los modelos estándar de la teoría económica. Es por ello que es importante conocer algunas características de estas funciones.

Definición:

Una función real $f(x,y)$ se dice que es **homogénea de grado k** si se cumple que:

$$\boxed{f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k\ f(x,y)}$$

Para todo $\lambda > 0$

Ejemplos:

1. La función lineal $z=f(x,y)=a\ x+b\ y$ es homogénea de grado 1. Veamos:

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= a(\lambda x)+b(\lambda y) \\ &= \lambda^1(ax+by) \\ &= \lambda^1 z \end{aligned}$$

2. La función cuadrática $z=f(x,y)=a\ x\ y$ es homogénea de grado 2.

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= a(\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2(a\ x\ y) \\ &= \lambda^2 z \end{aligned}$$

3. La función $z=f(x,y)=3\ x\ y^2+y^3+x^2y$ es homogénea de grado 3. En efecto:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= 3(\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3 + (\lambda x)^2(\lambda y) \\
&= 3(\lambda x)\left(\lambda^2 y^2\right) + \left(\lambda^3 y^3\right) + \left(\lambda^2 x^2\right)(\lambda y) \\
&= 3\left(\lambda^3 x y^2\right) + \left(\lambda^3 y^3\right) + \left(\lambda^3 x^2 y\right) \\
&= \lambda^3\left(3xy^2 + y^3 + x^2 y\right) \\
&= \lambda^3 z
\end{aligned}
$$

Una función especialmente importante en economía es la función Cobb-Douglas. Aunque también se utilizan funciones de este tipo para modelar la utilidad del consumidor, la aplicación original hecha por Cobb y Douglas fue la función de producción:

$$y = f(K, L) = A\, K^{\alpha} L^{\beta}$$

Donde: y es el nivel máximo de producción que puede realizarse con el insumo de capital K y el insumo de trabajo L y A es un índice que representa el estado de la tecnología. (Ver la nota de clase “Tecnología de Producción”).

Veremos que esta función de producción es homogénea de grado $\alpha + \beta$:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda K, \lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \\
&= A\left(\lambda^{\alpha} K^{\alpha}\right)\left(\lambda^{\beta} L^{\beta}\right) \\
&= A\, \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} K^{\alpha} L^{\beta} \\
&= \lambda^{\alpha+\beta} A\, K^{\alpha} L^{\beta} \\
&= \lambda^{\alpha+\beta}\; y
\end{aligned}
$$

Es importante subrayar que en el caso en que $\alpha + \beta = 1$ el valor de la función de producción crece en la misma escala en que crecen los insumos de capital y trabajo. Por ello, en este caso tenemos que la función de producción “exhibe rendimientos constantes a escala”.

Teorema de Euler sobre las funciones homogéneas de grado k

El matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) demostró el siguiente teorema respecto a las funciones homogéneas de grado k:

Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida en un dominio D se dice que es homogénea de grado k si, para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ se cumple que:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \forall \lambda > 0 \qquad (1)$$

El teorema de Euler dice que:

$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ es homogénea de grado k, si y sólo si:

$$\boxed{x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = k\ f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)} \qquad (2)$$

Demostración: Derivamos ambos lados de (1) respecto a λ :

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)} \frac{\partial(\lambda x_1)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_2)} \frac{\partial(\lambda x_2)}{\partial \lambda} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_n)} \frac{\partial(\lambda x_n)}{\partial \lambda} = k\lambda^{k-1} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

De manera que:

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)} x_1 + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_2)} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_n)} x_n = k\lambda^{k-1} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

Hacemos $\lambda = 1$ y se demuestra el teorema de Euler en (2)

Aplicando este teorema a la función de producción Cobb – Douglas con rendimientos constantes a escala ($\alpha + \beta = 1$) se deduce que:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial K} K + \frac{\partial y}{\partial L} L = y}$$

Puesto que las derivadas parciales son las productividades marginales del capital y el trabajo respectivamente y el modelo de competencia perfecta supone que en equilibrio las remuneraciones de los factores son iguales a sus productividades marginales, se deduce que:

$$\boxed{r\ K + w\ L = y}$$

Donde r es la remuneración del capital y w la remuneración del trabajo. El producto de la economía se distribuye entre los factores de producción de acuerdo con sus productividades marginales respectivas. Se trata de un resultado importante, pero también polémico, que se estudia en cursos posteriores.