MATEMÁTICAS III

(Carrera de Economía)

FUNCIONES IMPLÍCITAS Y DERIVACIÓN IMPLÍCITA

(http://www.geocities.com/ajlasa)

1. Funciones de una variable independiente definidas implícitamente

Comencemos con el caso de una función con una única variable independiente definida implícitamente. La variable y es función continua de x definida por la ecuación:

$$F(x, y) = c$$

c es una constante real y tiene derivadas continuas.

Diferenciando totalmente ambos lados de (1):

$$d\ F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

De manera que la regla para obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}} \qquad (1)$$

Suponemos que $F_y \neq 0$

Ejemplos:

1. $x - y + 3xy = 2$ o bien, $F(x - y + 3xy) = 2$

Tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = 1 + 3y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y = 3x - 1$$

Luego: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+3y}{3x-1} = \dfrac{1+3y}{1-3x}$

En este ejemplo, la función implícita $x - y + 3xy = 2$ puede escribirse como una función explícita:

$$y = \frac{2-x}{3x-1}$$

Si derivamos respecto de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1(3x-1)-3(2-x)}{(3x-1)^2} = \frac{1-3x-6+3x}{(3x-1)^2} = \frac{-5}{(3x-1)^2}$$

El resultado de la derivación implícita fue:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+3y}{3x-1}$$

Sustituyendo en la anterior por la ecuación de y nos queda el mismo resultado. En efecto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+3\left[\dfrac{2-x}{3x-1}\right]}{3x-1} = -\frac{\dfrac{3x-1+6-3x}{3x-1}}{3x-1} = -\frac{5}{(3x-1)^2}$$

Es claro que si todas las funciones implícitas pudieran escribirse como funciones explícitas, no sería muy útil la regla de la derivación de funciones implícitas. La utilidad de la derivación implícita consiste en que en algunos casos no podemos, o resulta muy complejo, escribir la función explícita, como vemos en el ejemplo siguiente.

2. $x^3 + y^3 = 6xy$ o bien, $F\left(x^3 + y^3 - 6x\ y\right) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 6y; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 6x;$$

Luego, la derivada implícita buscada es:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x}=-\frac{3\left(x^2-2y\right)}{3\left(y^2-2x\right)}=\frac{\left(2y-x^2\right)}{\left(y^2-2x\right)};$$

3. $2x^2+6xy+y^2=18$ o bien, $F\left(2x^2+6xy+y^2\right)=18$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x=4x+6y$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=F_y=6x+2y$$

Y la derivada buscada aplicando la regla (1) es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x+6y}{6x+2y}=\frac{2x+3y}{3x+y}$$

2. Casos de funciones de dos o más variables independientes definidas implícitamente.

Supongamos que z es una función $z=f\left(x,u\right)$ pero está definida implícitamente como $F\left(z,x,u\right)=c$, siendo c es una constante y nos interesa obtener las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial u}$.

Diferenciamos totalmente $F\left(z,x,u\right)=c$:

$$d\ F\left(z,x,u\right)=0$$

(2)

$$\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial u}du=0$$

Si queremos calcular la derivada parcial de z respecto de x mantenemos constante u, esto es, $du = 0$. De manera que (2) nos queda:

$$\frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial x}dx = 0$$

Despejando y suponiendo que $\frac{\partial F}{\partial z} = F_z \neq 0$:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}$$

Puesto que se obtuvo manteniendo constante una de las variables, escribimos la anterior como derivada parcial:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}} \qquad (3)$$

Si consideramos constante x en (2) y hacemos variar u, conseguimos la derivada parcial:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{F_u}{F_z}} \qquad (4)$$

Las reglas deducidas en (3) y (4) son generalizables a funciones implícitamente definidas de n variables independientes.

Si tenemos que $F\left(z, x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = c$ define implícitamente una función $z = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$, diferenciando totalmente como hicimos antes, veremos que las derivadas parciales de la función implícita son:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_z}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{F_{x_n}}{F_z}$$

Ejemplos:

4. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = c$, define implícitamente una función $z = f(x, y)$ y queremos encontrar las derivadas parciales.

Hacemos: $F\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = c$ y aplicando las reglas (3) y (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

5. Tenemos la ecuación $e^z + x^2 y + z + 5 = 0$ que escribimos como:

$F\left(e^z + x^2 y + z\right) = -5$. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xy}{e^z + 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

Bibliografía: N. Piskunov, Cálculo Diferencial e Integral, Ediciones Quinto Sol, Tomo I.