FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

(http://www.geocities.com/ajlasa)

En matemáticas III vamos a considerar funciones de dos o más variables independientes. Este tipo de funciones son muy importantes en economía porque muchas variables de interés con las que usualmente trabajamos están funcionalmente relacionadas con otras variables. En macroeconomía tenemos, por ejemplo, que el consumo se considera que es una función del nivel del ingreso y la tasa de interés o que la demanda de saldos monetarios es una función del nivel del producto de la economía, de la tasa de interés y de la tasa de inflación. En microeconomía, la demanda de un bien depende del precio del mismo bien, los precios de los bienes sustitutos y complementarios, del ingreso del consumidor.

Función de dos variables

Definición: Una función de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) perteneciente a un conjunto D un **único** número real que se puede escribir $z = f(x, y)$, donde las variables x y y son independientes una de otra. El conjunto D es el dominio de la función y los valores que toma $z = f(x, y)$ es el rango de la función. (Stewart, p. 907).

Las variables x y y son las variables independientes mientras que z es la variable dependiente. Al igual que lo que sucede con las funciones en una única variable independiente, el dominio de la función tiene que estar especificado de manera que sea válida en el campo de los números reales. Cuando se trata de funciones de aplicación en economía, el dominio de la función debe tener, además, "sentido económico".

Ejemplo:

La función de producción llamada Cobb-Douglas relaciona funcionalmente a los insumos de capital y trabajo necesarios para producir de la manera más eficiente posible una determinada cantidad de un bien:

$$Y = f\left(K, L\right) = A\, K^{\alpha}\, L^{\beta}\ ; \qquad \alpha, \beta > 0;\ K, L \geq 0,\ A > 0$$

K y L representan las cantidades de capital y trabajo respectivamente, α y β son constantes paramétricas; también A es una constante, que representa el estado de la tecnología. Y es la cantidad máxima del bien que se puede producir dados los insumos utilizados de capital y trabajo.

Representación de una función de dos variables independientes.

Una función de dos variables independientes puede representarse mediante una tabla numérica o bien mediante una gráfica. Como ejemplo consideramos los siguientes valores para los parámetros de la función Cobb-Douglas: $A = 1.01,\ \alpha = 0.25, \beta = 0.75$ y el dominio de las variables independientes es: **K = [0, 80] y L = [0, 150].**

La tabla que representa a una función en dos variables independientes consiste en escribir las variables independientes en entradas horizontales y verticales y el valor de la función para cada par se encuentra en la intersección de filas y columnas correspondientes. En el caso de la función Cobb-Douglas especificada antes, la tabla es la siguiente:

Tabla 1

Parte que se grafica

A = 1.1

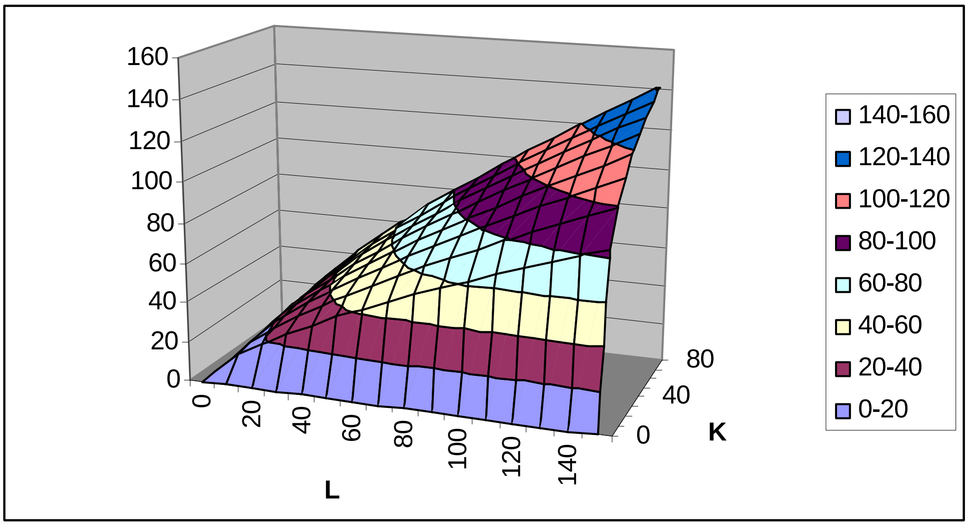
alfa = 0.25

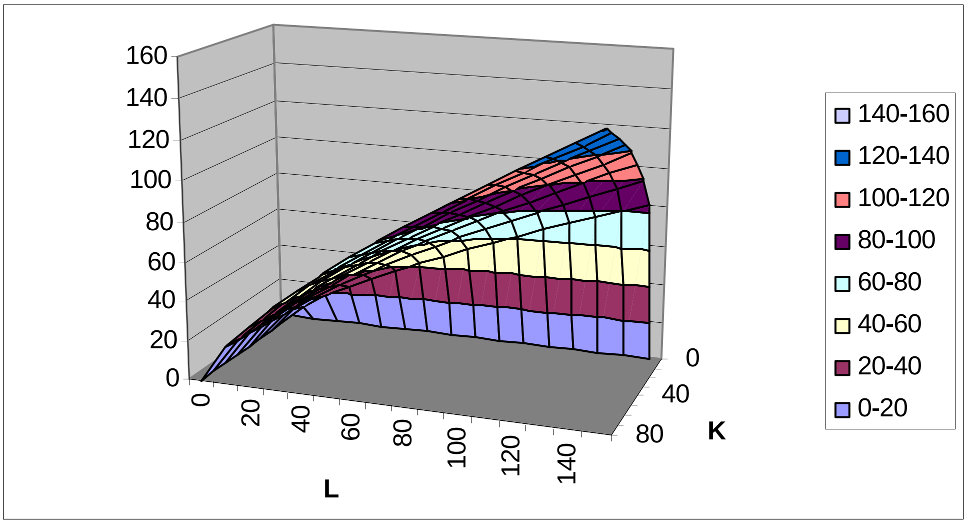
beta = 0.75

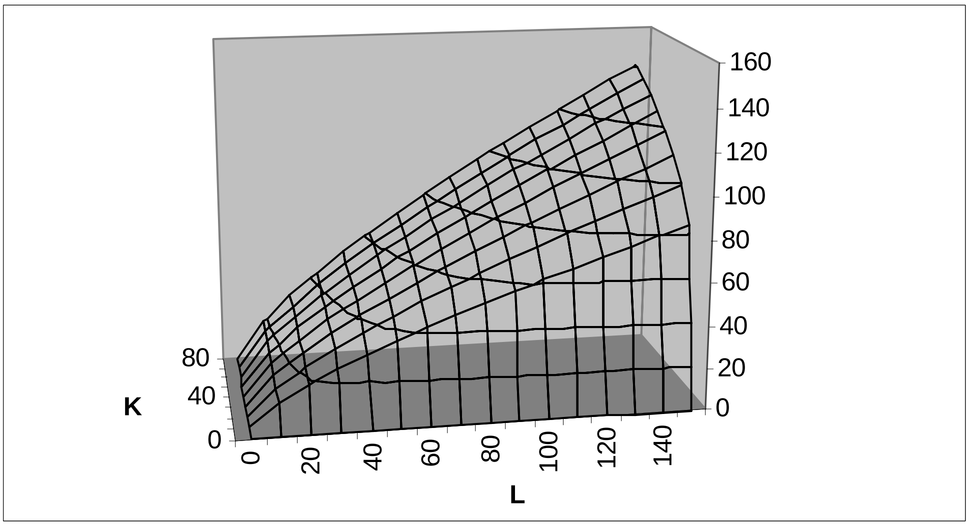
	K	0	10	20	30	40	50	60	70	80
L		0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	10	0	11.0000	13.0813	14.4768	15.5563	16.4488	17.2159	17.8923	18.4997
20	20	0	18.4997	22.0000	24.3470	26.1626	27.6635	28.9536	30.0912	31.1127
30	30	0	25.0746	29.8189	33.0000	35.4608	37.4952	39.2438	40.7857	42.1702
40	40	0	31.1127	36.9994	40.9466	44.0000	46.5243	48.6940	50.6072	52.3251
50	50	0	36.7807	43.7399	48.4061	52.0158	55.0000	57.5649	59.8267	61.8575
60	60	0	42.1702	50.1492	55.4992	59.6377	63.0592	66.0000	68.5931	70.9216
70	70	0	47.3387	56.2955	62.3012	66.9470	70.7878	74.0891	77.0000	79.6139
80	80	0	52.3251	62.2254	68.8637	73.9989	78.2443	81.8932	85.1108	88.0000
90	90	0	57.1577	67.9723	75.2237	80.8332	85.4707	89.4566	92.9713	96.1274
100	100	0	61.8575	73.5614	81.4091	87.4798	92.4986	96.8123	100.6160	104.0316
110	110	0	66.4412	79.0123	87.4415	93.9620	99.3527	103.9860	108.0716	111.7403
120	120	0	70.9216	84.3405	93.3381	100.2983	106.0526	110.9983	115.3594	119.2755
130	130	0	75.3096	89.5587	99.1130	106.5038	112.6141	117.8659	122.4968	126.6551
140	140	0	79.6139	94.6774	104.7777	112.5910	119.0505	124.6024	129.4980	133.8940
150	150	0	83.8419	99.7054	110.3422	118.5704	125.3729	131.2197	136.3753	141.0047

Donde los valores de Y correspondientes son los que aparecen en la parte sombreada.

La gráfica de una función de dos variables independientes debe hacerse en tres dimensiones (superficie). Para el caso de la función de producción anterior, vemos a continuación tres alternativas gráficas de la misma función con diferente disposición de los ejes:







Nota: estas gráficas se hicieron usando la hoja de cálculo Excel.

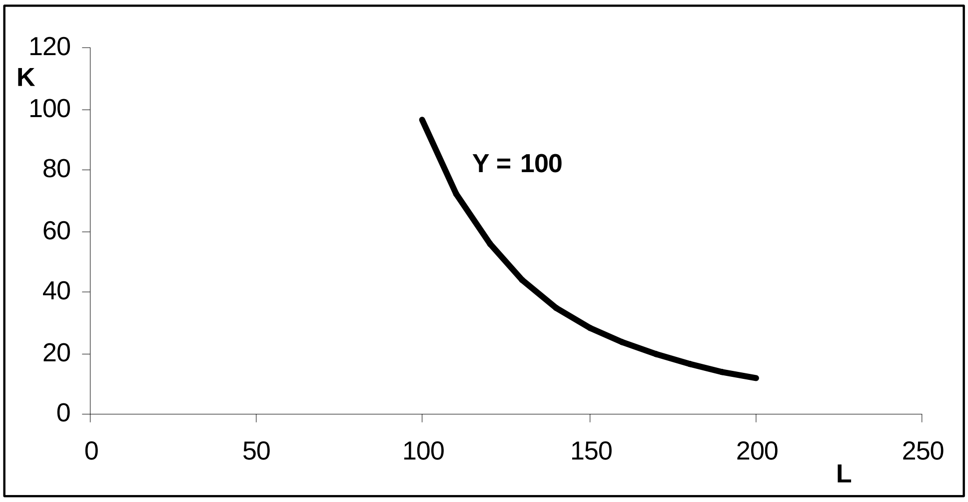
Curva de nivel

Cuando se trabaja con funciones en dos variables es muy útil en economía graficar curvas de niveles. Para trazar una curva de nivel se toma un valor fijo de la variable dependiente y se calculan las diferentes combinaciones de las dos variables independientes que producen el valor fijo de la variable dependiente. Supongamos que tenemos la función de producción anterior: $\boldsymbol{Y = 1.01\, K^{0.25}\, L^{0.75}}$. Ahora tomamos un valor fijo de $\boldsymbol{Y = 100}$

y calculamos todos las combinaciones de K y L que producen ese resultado. Esto lo podemos hacer planteando $\mathbf{100 = 1.01}\, \boldsymbol{K}^{\mathbf{0.25}}\ \boldsymbol{L}^{\mathbf{0.75}}$, despejamos K y tenemos:

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{\mathbf{100}}{\mathbf{1.01}\, \boldsymbol{L}^{\mathbf{0.75}}} \right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0.25}}}$$

Tenemos ahora una función en una variable independiente. Con esta fórmula encontramos los valores de K para un conjunto de valores de L y graficamos poniendo L en el eje de abscisa y K en el eje de ordenadas.



A esta curva de nivel se le denomina “Curva de Isoproducto” o “Isocuanta”, porque a lo largo de ella el producto es el mismo, en este caso igual a 100. La isocuanta puede interpretarse como las combinaciones o técnicas posibles de capital y trabajo para producir de manera eficiente 100 unidades. ¿Cuál de esas combinaciones escogerá el productor si tiene que producir 100 unidades? Eso dependerá de los precios relativos del capital y del trabajo. Si el capital es caro en relación con la fuerza de trabajo, entonces se usará más capital que trabajo que en otra circunstancia en la que el capital sea barato en relación con el trabajo. En la gráfica anterior podemos dibujar numerosas (infinitas) curvas de nivel que corresponden a la misma función pero para valores de Y diferentes de 100.