

**MATEMÁTICAS III**  
**(Carrera de Economía)**  
**MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN DE**  
**DOS VARIABLES INDEPENDIENTES**

( <http://www.geocities.com/ajlasa> )

(El contenido de esta nota ha sido, en lo esencial, tomado de: P. Piskunov, Cálculo Diferencial e Integral, Ediciones Quinto Sol y Edward T. Dowling, Introduction to Mathematical Economics, Shaum's Outlines. Los ejemplos fueron tomados de Simon y Blume, Mathematics for Economists, W.W. Norton)

**DEFINICIONES**

1. Se dice que la función  $z = f(x, y)$  tiene un **máximo** local en el punto  $P(x_0, y_0)$  es decir, cuando  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , si se cumple que:

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

para todos los puntos  $(x, y)$  suficientemente próximos y distintos al punto  $(x_0, y_0)$ .

2. De igual manera, se dice que la función  $z = f(x, y)$  tiene un **mínimo** local en el punto  $P(x_0, y_0)$  es decir, cuando  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , si se cumple que:

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

para todos los puntos  $(x, y)$  suficientemente próximos y distintos al punto  $(x_0, y_0)$ .

Los puntos de máximo y de mínimo de  $z = f(x, y)$  son los **extremos** de esa función

Una definición alternativa de los puntos de máximo y mínimo locales es la siguiente:

Se tiene  $f(x_0, y_0)$  y hacemos  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ , luego:

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Ahora tenemos:

1. Si  $\Delta f < 0$  para todas las variaciones suficientemente pequeñas de las variables independientes, la función  $f(x, y)$  tiene un **máximo** local en el punto  $P(x_0, y_0)$ .
2. Si  $\Delta f > 0$  para todas las variaciones suficientemente pequeñas de las variables independientes, la función  $f(x, y)$  tiene un **mínimo** local en el punto  $P(x_0, y_0)$ .

## TEOREMAS

1. **Condición necesaria para la existencia de un extremo:** Si la función  $z = f(x, y)$  tiene un extremo cuando  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  entonces cada derivada parcial de primer orden de  $z$  se anula para estos valores de las variables independientes o bien la derivada no existe. Los puntos de la función donde se verifica que las derivadas parciales de primer orden son cero o no existen son **puntos críticos** de la función.

Nótese que la existencia de puntos críticos es una condición **necesaria** para un extremo, es decir, los extremos (máximos o mínimos) de una función son puntos críticos. Sin embargo, no en todos los casos en que las derivadas parciales sean cero o no existan tendremos extremos. En otras palabras, la existencia de puntos críticos de una función **no es suficiente** para la existencia de un punto extremo.

2. **Prueba de las segundas derivadas:** Tenemos una función  $z = f(x, y)$  definida en un dominio en el que está el punto  $P(x_0, y_0)$  y que tiene derivadas parciales continuas al menos de hasta segundo orden. Suponemos que en  $P(x_0, y_0)$  se anulan las derivadas parciales de primer orden. Esto es:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Luego, se puede demostrar que  $P(x_0, y_0)$  es:

1. Un **máximo**, si evaluadas las derivadas parciales de segundo orden en  $x = x_0, y = y_0$  se tiene que:

$$f_{xx} < 0$$

Y

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$$

2. Un **mínimo**, si evaluadas las derivadas parciales de segundo orden en  $x = x_0, y = y_0$  se tiene que:

$$f_{xx} > 0$$

Y

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$$

3. **No es máximo ni mínimo** si evaluadas las derivadas parciales de segundo orden en  $x = x_0, y = y_0$  se tiene que:

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$$

Este caso se le denomina **punto silla**. En un punto silla, la función  $z = f(x, y)$  tiene un mínimo en alguna dirección y un máximo en otra dirección.

4. Se **requiere más análisis** para decidir si  $P(x_0, y_0)$  es un punto extremo cuando:

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$$

### LA MATRIZ HESSIANA

Para evaluar la condición de segundo orden para un extremo resulta conveniente construir una **matriz** con las derivadas parciales de segundo orden llamada matriz Hessiana de esta manera:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

H es una matriz simétrica si se cumple el teorema de Young, esto es,  $f_{xy} = f_{yx}$

Donde las derivadas parciales están evaluadas en el punto  $P(x_0, y_0)$ . Definimos el determinante de la matriz Hessiana como  $|H|$ . Entonces en ese punto tenemos:

1. Un **máximo**, si:

$$f_{xx} < 0$$

Y

$$|H| > 0$$

2. Un **mínimo**, si:

$$f_{xx} > 0$$

Y

$$|H| > 0$$

3. **No es máximo ni mínimo** (un punto silla) si:

$$|H| < 0$$

4. Se **requiere más análisis** si:

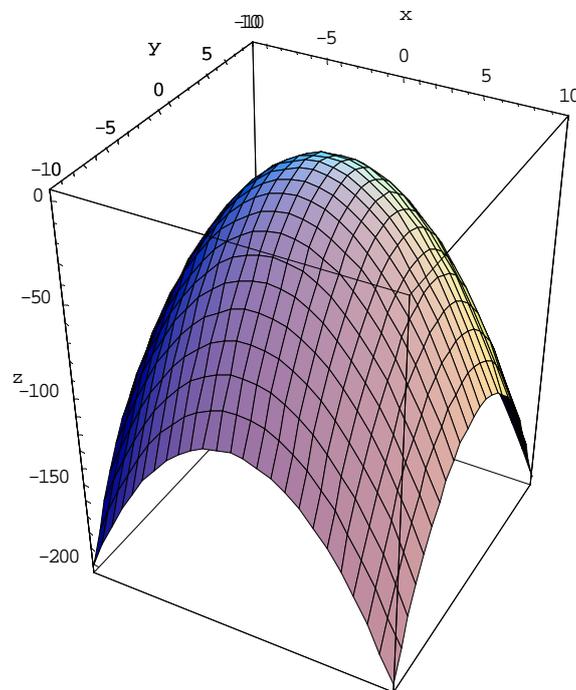
$$|H| = 0$$

Ejemplos:

Encontrar los puntos críticos y verificar si son extremos mediante la condición de segundo orden.

1.  $z = f(x, y) = -x^2 - y^2$

Podemos ver en la gráfica siguiente que la función parece tener un máximo. Vamos a comprobarlo.



La condición de primer orden es:

$$f_x = -2x = 0$$

$$f_y = -2y = 0$$

De manera que el punto crítico de la función es:  $x_0 = 0, y_0 = 0$

Ahora probamos la condición de segundo orden para lo cual calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = -2, f_{yy} = -2, f_{xy} = f_{yx} = 0$$

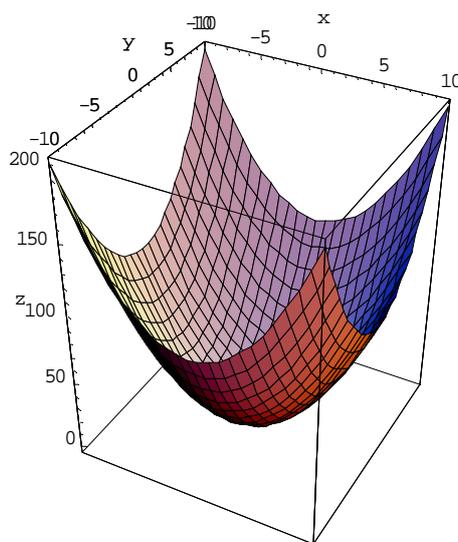
De manera que tenemos  $f_{xx} < 0$ , y

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, \text{ En efecto: } (-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$$

De manera que la función  $z = f(x, y) = -x^2 - y^2$  tiene un máximo en el punto  $P(0, 0)$ .

$$2. z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Podemos ver en la gráfica siguiente que la función parece tener un mínimo. Vamos a verificarlo.



La condición de primer orden es:

$$f_x = 2x = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

De manera que el punto crítico de la función es:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$

Ahora probamos la condición de segundo orden para lo cual calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 0$$

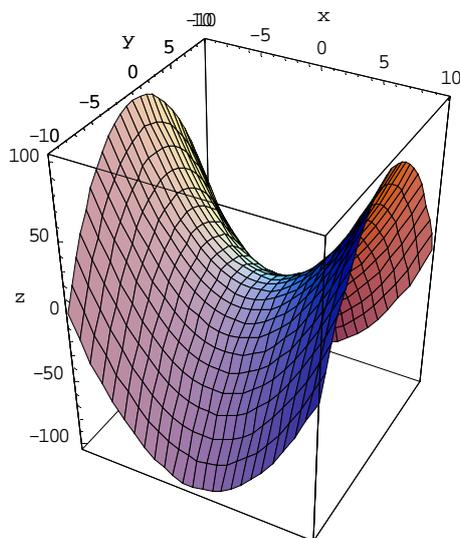
De manera que  $f_{xx} > 0$

$$\text{Y } f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, \text{ En efecto: } (2)(2) - (0)^2 = 4 > 0$$

Vemos entonces que la función  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  tiene un mínimo en el punto  $P(0, 0)$ .

$$3. z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

De la gráfica de la función no parece que se pueda concluir que sea un máximo o un mínimo; más bien el dibujo de la función muestra un punto silla.



Vamos a verificarlo.

La condición de primer orden es:

$$f_x = 2x = 0$$

$$f_y = -2y = 0$$

De manera que el punto crítico de la función es:  $x_0 = 0, y_0 = 0$

Ahora probamos la condición de segundo orden para los cual calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = -2, f_{xy} = f_{yx} = 0$$

De manera que  $f_{xx} > 0$

$$\text{Y } f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0, \text{ En efecto: } (2)(-2) - (0)^2 = -4 < 0$$

Vemos entonces que la función  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$  tiene un punto silla en el punto  $P(0, 0)$ .