MATEMÁTICAS III

(Carrera de Economía)

MÁS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

(http://www.geocities.com/ajlasa)

Sea una función de n variables independientes $y = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ continua y definida en un dominio dado y de la cual se pueden obtener derivadas parciales de orden dos o más.

Puntos críticos

Una condición **necesaria** para que f tenga un punto crítico (máximo o mínimo) en $x_1 = x_{1_0}, x_2 = x_{2_0}, \cdots, x_n = x_{n_0}$ es que en ese punto se cumpla que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = 0, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = f_n = 0$$

La condición **suficiente** requiere una investigación de las derivadas de segundo orden evaluadas en $x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0}$. Para ello, vamos a definir la matriz Hessiana como:

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n1} & \cdots & f_{n1} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = f_{11}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = f_{22}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = f_{nn},$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = f_{k\,i};\quad k = \left(1, 2, \cdots, n\right), i = \left(1, 2, \cdots, n\right), i \neq k$$

La matriz $\boldsymbol{H}$ es una matriz simétrica suponiendo que se cumple el teorema de Young,

La función $y = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ tiene en el punto $P\left(x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0}\right)$

1. Un **máximo** local si la matriz H es **definida negativa**.

Una matriz simétrica es definida negativa si sus n menores principales alternan sus signos comenzando por un signo negativo. Por lo tanto la matriz H es definida negativa si:

$$\left|f_{11}\right| < 0, \ \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \cdots \ , \ (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

2. Un **mínimo** local si la matriz H es definida positiva.

Una matriz simétrica es definida positiva si sus n menores principales son todos positivos. Por lo tanto el punto crítico es un mínimo si la matriz H es definida positiva si:

$$\left|f_{11}\right| > 0, \ \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \ \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

3. Un punto silla (no es máximo ni mínimo) si los n menores principales son distintos de cero y no cumplen con las condiciones para un máximo o mínimo dadas en los puntos (1) y (2) anteriores.

Ejemplos:

1. $z = f\left(x, y, u\right) = x^2 + y^2 + u^2 - xy + x - 2u$

La condición de primer orden para un óptimo es:

$$f_x = 2x - y + 1 = 0$$
$$f_y = 2y - x = 0$$
$$f_u = 2u - 2 = 0$$

De $f_x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{2}$

Sustituyendo en la segunda ecuación de la condición de primer orden:

$$2y - \frac{y-1}{2} = \frac{3y+1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3}}$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación:

$$x = \frac{-\frac{1}{3} - 1}{2} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

De la tercera ecuación: $\boxed{u = 1}$

El punto crítico de la función se tiene cuando: $x_0 = -\dfrac{2}{3};\ y_0 = -\dfrac{1}{3};\ u_0 = 1$

Vamos ahora a calcular las derivadas segundas para ver si se trata de un máximo o un mínimo.

$$f_{xx} = 2; \quad f_{yy} = 2; \quad f_{uu} = 2;$$
$$f_{xy} = f_{yx} = -1; \quad f_{ux} = f_{xu} = 0; \quad f_{uy} = f_{yu} = 0;$$

La matriz Hessiana es:

$$H=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son:

$$|H_1|=2>0\,;\quad |H_2|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3>0\,;$$

$$|H_3|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6>0$$

Puesto que todos los menores principales de H son positivos, el punto crítico es un **mínimo.**

2. $z=f(x,y,u)=-\left(x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{u^2}{y}+\dfrac{2}{u}\right)\ ;\ x>0,\ y>0,\ u>0$

Dejamos al estudiante la tarea de demostrar que el punto crítico es un mínimo.