MATEMÁTICAS III

(Carrera de Economía)

OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

(http://www.geocities.com/ajlasa)

El propósito central de la economía como ciencia es el estudio de la asignación óptima de los recursos escasos. Esta definición de la economía encaja muy bien con el tema matemático de optimización (maximización o minimización) restringida: la búsqueda de un óptimo (máximo o mínimo) sujeto a una restricción. El consumidor trata de maximizar una función de utilidad condicionada por la restricción presupuestal; el empresario capitalista trata de maximizar una función de ganancia con la restricción de la disponibilidad de sus recursos.

El método para resolver este tipo de problemas fue desarrollado por el matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Esta nota presenta la estructura matemática más simple de los problemas de optimización con restricciones y la solución conocida como "método de multiplicadores de Lagrange".

Método de Lagrange

La estructura más simple que podemos plantear consiste en una función objetivo (la función para la cual se busca un máximo o mínimo) de **dos variables independientes** y **una función de restricción** en esas mismas variables la cual formaliza cierta condición que deben cumplir. Se trata de un óptimo condicionado. En general, la función objetivo puede tener n variables independientes y pueden existir m funciones de restricción (m < n). La función de restricción se plantea en la estructura más simple como una igualdad; en algunos problemas de mayor complejidad, la restricción puede ser una desigualdad.

Función objetivo con dos variables independientes y una restricción de igualdad.

Se tiene una función objetivo $z = f(x, y)$ y una función de restricción $c = g(x, y)$. Supongamos que se quiere maximizar z al tiempo que se cumple la restricción. Esto es:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad f(x,y) \\
&s.a \quad g(x,y)=c
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

El método de Lagrange consiste en formular una nueva función, la función Lagrangeana:

$$L(x,y,\lambda)= f(x,y)+\lambda\big(c-g(x,y)\big) \qquad (2)$$

Donde λ es un número real tal que (x^*,y^*,λ^*) es un punto crítico de la función $L(x,y,\lambda)$. Nótese en (2) que $\big(c-g(x,y)\big)=0$ por la definición en (1).

Para encontrar los puntos críticos procedemos a obtener las derivadas parciales de L respecto a x,y,λ e igualar a cero.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= L_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= L_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= L_y = c - g(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

Ahora tenemos un sistema de 3 ecuaciones con igual número de incógnitas (x,y,λ) las cuales podrán determinarse si el problema planteado tiene una solución. En este caso encontramos los puntos críticos (x^*,y^*,λ^*).

Una vez obtenido los puntos críticos debemos verificar si se trata de un máximo, un mínimo o un punto silla. Para ello debemos realizar las derivadas segundas, valuarlas en el punto crítico y con ellas construir la matriz Hessiana ampliada que llamamos H_a

$$H^a = \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{\lambda x} & f_{xx} & f_{xy} \\ L_{\lambda y} & f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Definimos los menores principales de H^a como:

$$\left|H_2^a\right| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} \\ L_{\lambda x} & f_{xx} \end{vmatrix} \; ; \; \left|H_3^a\right| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{\lambda x} & f_{xx} & f_{xy} \\ L_{\lambda y} & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix};$$

Suponiendo que $L_{\lambda x} \neq 0$, tendremos que los puntos críticos representan:

i) Un máximo si:

$$\left|H_3^a\right| > 0$$

ii) Un mínimo si:

$$\left|H_3^a\right| < 0$$

Ejemplo:

1. Maximizar $z = f\left(x, y\right) = x\ y$ con la restricción $g\left(x, y\right) = x + 4y = 16$

$$\begin{aligned} &\max \quad f\left(x, y\right) = x\ y \\ &s.a \quad g\left(x, y\right) = x + 4y = 16 \end{aligned}$$

Planteamos la función Lagrangeana:

$$L(x, y, \lambda) = x\ y + \lambda\left(16 - (x + 4y)\right)$$

Resolvemos la condición de primer orden para un máximo:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 4\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 16 - x - 4y = 0$$

La condición de primer orden en este problema es un sistema lineal que se resuelve fácilmente. De la primera ecuación tenemos que $y = \lambda$, insertando este resultado en la segunda ecuación resulta $x = 4y$. Ahora sustituimos este último resultado en la tercera ecuación de la condición de primer orden de manera que $16 = 4y + 4y = 8y$ y se deduce que $y = 2 = \lambda$. Luego, $x = 4y = 4(2) = 8$. Por lo tanto, la función Lagrangeana tiene un punto crítico en: $x^* = 8,\ y^* = 2$.

Las derivadas segundas que necesitamos para construir la matriz Hessiana ampliada son: $L_{\lambda\lambda} = 0, L_{xx} = 0, L_{yy} = 0, L_{xy} = 1, L_{yx} = 1, L_{\lambda x} = -1, L_{\lambda y} = -4$. De manera que la matriz Hessiana ampliada es:

$$H_3^a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante $\left|H_3^a\right| = 8 > 0$

Conclusión: El punto crítico (8,2) es un **máximo** de la función $f = (x, y)$ y cumple con la restricción del problema.

2. Minimizar $z = f(x, y) = -(x\ y)$ con la restricción $g(x, y) = x + 4y = 16$

En este problema la función objetivo es el negativo de la función objetivo del problema anterior. Por lo tanto la solución es similar. Dejamos al estudiante la resolución del punto crítico y demostrar que se trata de un mínimo.