TECNOLOGÍAS DE PRODUCCIÓN

(Función de Producción Cobb-Douglas)

(http://www.geocities.com/ajlasa)

En general, toda actividad de producción de bienes y servicios requiere de dos insumos básicos: el capital y el trabajo. Una función de producción relaciona las cantidades utilizadas de estos insumos con el máximo número de unidades que pueden producirse de un determinado bien o servicio dado el estado de la tecnología. Esta función de producción se escribe $Y = f(K, L)$, donde Y es el número de unidades producidas de un bien (o una canasta de bienes), K y L son las cantidades de capital y trabajo utilizados en el proceso productivo para generar eficientemente ese nivel de producto.

En economía se utilizan algunas de estas funciones como representaciones de las posibilidades tecnológicas de producción, especialmente para propósitos didácticos y heurísticos. Las funciones de producción más comunes son las de tipo Cobb-Douglas (C-D) y la función de producción CES (función de elasticidad de sustitución constante).

Función de producción C-D

$$\boxed{Y = f(K, L) = A\,K^{\alpha} L^{\beta}\,;} \qquad (1)$$

$$A > 0; \quad K, L > 0; \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1,$$

La constante A es un índice de la tecnología disponible.

Propiedades de la Función de producción C-D

1. Productividades marginales positivas y decrecientes.

a. **Productividad marginal del capital**. Se define como la derivada parcial de Y respecto de K. Esto es:

$$PMK = \frac{\partial Y}{\partial K} = f_K = \alpha A\, L^{\beta}\ K^{\alpha-1} = \frac{\alpha A\, L^{\beta}}{K^{1-\alpha}} > 0$$

La PMK es positiva para todos los valores de K y L admisibles como dominio de la función. Esto quiere decir que siempre que aumente el capital (manteniendo constante el factor trabajo) el producto crece.

La PMK es decreciente. Quiere decir que a medida que se amplia el uso del capital con el factor trabajo constante, el incremento del producto es cada vez menor; en otras palabras, la PMK, aunque positiva es decreciente. Esto lo podemos verificar mostrando que la segunda derivada respecto al capital es negativa.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = f_{KK} = \alpha(\alpha-1)A\, L^{\beta}\ K^{\alpha-2} = \frac{\alpha(\alpha-1)A\, L^{\beta}}{K^{2-\alpha}} < 0$$

b. Dejamos al estudiante mostrar que estas dos condiciones se cumplen igualmente para la **productividad marginal del trabajo**.

2. Rendimientos a escala

Es importante conocer si con una tecnología dada al multiplicar los dos insumos por un factor $\lambda > 0$ la producción aumenta en la misma proporción, o bien aumenta menos que proporcionalmente o bien más que proporcionalmente.

Vamos a multiplicar los insumos en (1) por λ y ver lo que sucede con la producción. Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} f(\lambda K, \lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \\ &= AK^{\alpha}L^{\beta}\lambda^{\alpha+\beta} \\ &= Y\lambda^{\alpha+\beta} \end{aligned} \tag{2}$$

Los rendimientos a escala se clasifican en:

a. Si el producto aumenta en la misma proporción en que aumentaron los insumos utilizados se dice que hay **rendimientos constantes a escala.** Vemos que si $\alpha+\beta=1$ hay rendimientos constantes a escala. También se dice que la función de producción es **homogénea de grado uno**.

b. Si el producto aumenta en una proporción menor, la tecnología tiene **rendimientos decrecientes a escala**. Esto sucede si $\alpha+\beta<1$

c. Si el producto aumenta en una proporción mayor, la tecnología tiene **rendimientos crecientes a escala,** lo cual ocurre cuando $\alpha+\beta>1$.

3. Relación Técnica de Sustitución

La relación técnica de sustitución (RTS) mide la variación que se requiere de un factor de producción para compensar exactamente la variación ocurrida en el otro factor. En otras palabras, si tenemos que hay una disminución (pequeña) en la utilización del insumo capital, nos preguntamos cuánto se necesita aumentar el insumo trabajo para mantener el mismo nivel de producción existente antes de los cambios.

Partimos de (1): $Y=f(K,L)=A\,K^{\alpha}L^{\beta}$;

Diferenciamos totalmente e igualamos a cero:

$$dY=f_K\,dK+f_L\,dL=0$$

Y la RTS es:

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{f_L}{f_K}=-\frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{\alpha AL^{\beta}K^{\alpha-1}}=-\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}<0$$

El **signo negativo** indica que una disminución del capital debe compensarse con un aumento del trabajo para que la producción se mantenga constante. El valor absoluto de la RTS es función de la relación capital-trabajo. Nos dice que cuanta más alta sea la relación K/L, menos trabajo adicional será necesario para compensar una disminución dada del capital. O bien, cuanta más baja sea la relación K/L, más trabajo adicional será necesario para compensar una disminución de capital.

4. Elasticidad de sustitución

Se define como: $\sigma=\dfrac{\dfrac{\Delta(K/L)}{K/L}}{\dfrac{\Delta(RTS)}{RTS}}=\dfrac{\Delta(K/L)}{\Delta(RTS)}\dfrac{RTS}{K/L}$

Considerando pequeñas variaciones, la elasticidad de sustitución es:

$$\sigma=\frac{d(K/L)}{d(RTS)}\frac{RTS}{K/L}$$

Desarrollamos por partes:

(i)

$$d(K/L)=\frac{dK}{L}-\frac{K}{L}\frac{dL}{L}=\frac{K}{L}\frac{dK}{K}-\frac{K}{L}\frac{dL}{L}=\frac{K}{L}\left(\frac{dK}{K}-\frac{dL}{L}\right) \qquad (3)$$

Puesto que $RTS=-\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}$, tenemos: (4)

(ii)

$$d\left(RTS\right)=-\frac{\beta}{\alpha\,L}dK+\frac{\beta K}{\alpha\,L}\frac{dL}{L}=-\frac{\beta K}{\alpha\,L}\frac{dK}{K}+\frac{\beta K}{\alpha\,L}\frac{dL}{L}$$
$$=-\frac{\beta K}{\alpha\,L}\left(\frac{dK}{K}-\frac{dL}{L}\right) \tag{5}$$

(iii)

Por otra parte, $\dfrac{RTS}{K/L}=-\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}\dfrac{L}{K}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ (6)

De manera que utilizando los resultados obtenidos en (3) a (6):

$$\sigma=\frac{d\left(K/L\right)}{d\left(RTS\right)}\frac{RTS}{K/L}=\frac{\frac{K}{L}\left(\frac{dK}{K}-\frac{dL}{L}\right)}{-\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}\left(\frac{dK}{K}-\frac{dL}{L}\right)}\frac{-\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}}{\frac{K}{L}}=1$$

La elasticidad de sustitución de la función de producción Cobb-Douglas es constante e igual a la unidad.