DEMOSTRACIÓN DE QUE: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$

Aportación de la alumna Tania Moreno Zúñiga para el curso de Matemática financiera y Administración de Riesgo

Definición: $y(t)=\ln t$

Luego: $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$

Para t = 1: $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{1}=1$ (1)

Por la definición de derivada:

$$\frac{dy}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

para t = 1 y considerando (1):

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}&=\lim_{h\to 0}\frac{y(1+h)-y(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1\end{aligned}\qquad(2)$$

hacemos un cambio de variable: $h=\dfrac{1}{n}$

de manera que para $n\to\infty,\quad h\to 0$ y podemos escribir (2) como:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = 1$$

Aplicando exponente a ambos lados:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]} = e^{1} = e$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Bibliografía: Stewart, James, Calculus, Brooks/Cole Publishing Company, 1999, Cuarta Edición, pp. 442-43.