PARTE 4

ANUALIDADES

TEMAS
• Concepto de anualidad y aplicaciones principales • Tipos principales de anualidades • Valuación de anualidades ordinarias (vencidas) • Valuación de anualidades adelantadas • Construcción de una tabla de amortización

4.1 Concepto de anualidad y aplicaciones principales

Anualidad: Se aplica a problemas financieros en los que existen **un conjunto de pagos iguales a intervalos de tiempo regulares**.

Aplicaciones típicas:

- Amortización de préstamos en abonos.
- Deducción de la tasa de interés en un operación de pagos en abonos
- Constitución de fondos de amortización

4.2 Tipos principales de anualidades

Vamos a distinguir dos tipos de anualidades:

(a) **Anualidades ordinarias o vencidas** cuando el pago correspondiente a un intervalo se hace al final del mismo, por ejemplo, al final del mes.

(b) **Anualidades adelantadas**, cuando el pago se hace al inicio del intervalo, por ejemplo al inicio del mes.

.

Ambos tipos de anualidades pueden aplicarse en un contexto de certeza, en cuyo caso se les llama **anualidades ciertas** o en situaciones caracterizadas por la incertidumbre, en cuyo caso se les conoce como **anualidades contingentes.**

En este parte del curso nos ocupamos sólo del caso de anualidades ciertas.

Para el caso de una anualidad ordinaria de n pagos, el despliegue de los datos en la línea del tiempo es:

```
                      n Pagos de valor R

             R         R         R         R         R
    |_________|_________|_________|__. . .___|_________|
    |         1         2         3        n-1         n
  Inicio                                              fin
```

y para el caso de una anualidad anticipada de n pagos:

```
                      n Pagos de valor R

    R         R         R         R         R
    |_________|_________|_________|__. . .___|_________|
    |         1         2         3        n-1         n
  Inicio                                              fin
```

En estos problemas se supone que el conjunto de pagos es invertido a interés compuesto hasta el fin del plazo de la operación. Esta consideración es fundamental para definir el **Valor futuro o monto de una anualidad** y el **Valor presente de la anualidad.**

4.3 Valuación de Anualidades Ordinarias

(a) Valor futuro de una anualidad ordinaria

Responde a la pregunta: ¿ Cual es el monto o valor futuro de una suma de pagos iguales distribuidos de manera uniforme a lo largo del tiempo?

(a) El valor futuro de un conjunto de n pagos vencidos de valor R cada uno es:

$$S_n = R \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \qquad (4.1)$$

R = valor del pago regular.
i = tasa de interés para cada uno de los intervalos de tiempo en que se ha dividido el plazo completo.
n = número total de intervalos de la operación.

Ejercicios:
4.1 Una persona se ha propuesto depositar $ 320 mensualmente durante 2 años (24 meses) en una

cuenta bancaria que paga el 18 % anual de interés (1.5 % mensual). ¿Cuál será la cantidad acumulada al final de los dos años considerando que el banco capitaliza mensualmente los intereses?
Aplicando (4.1):

$$S_n = 320 \times \left[\frac{(1+0.015)^{24} - 1}{0.015} \right] = 9{,}162.73$$

(b) Valor presente de la anualidad.

Responde a la pregunta: ¿Cuánto vale hoy un conjunto de n pagos iguales a realizar a intervalos regulares en el futuro?

La fórmula que responde a la pregunta es:

$$A_n = R \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \qquad (4.2)$$

Ejercicios:

4.2. Una empresa tiene en su cartera de activos 10 pagarés de $ 200 cada uno y con vencimientos mensuales consecutivos. El primero de ellos vence dentro de un mes. La empresa necesita liquidez y planea venderlos a un banco, el cual ha aceptado la transacción considerando una tasa de interés de referencia del 24% anual (2% mensual). ¿Que cantidad recibirá la empresa si se realiza la operación? En otras palabras, ¿cuál es el valor presente de estos pagarés?
Datos: R = 200, i = 0.02, n = 10
Aplicando (4.2):

$$A_n = 200 \times \left[\frac{1-(1+0.02)^{-10}}{0.02} \right] = 1{,}796.52$$

(c) El cálculo del pago regular (R)

Responde a la pregunta: ¿Cuántos pagos (o abonos) se deben hacer para alcanzar un determinado valor futuro o valor presente, según sea el caso?

Cuando conocemos el valor futuro, el pago regular se calcula como:

$$R = \frac{S_n \times i}{(1+i)^n - 1} \qquad (4.3)$$

Ejercicios:

4.3 Una empresa tiene una deuda de $ 1,000,000 a pagar en un única exhibición dentro de 10 meses y desea pagar en 10 pagos mensuales iguales a fin de mes. ¿Cuál es el valor del pago mensual si la tasa de interés mensual es del 1% (12% anual) ?
Datos: Valor futuro (S) = 1,000,000; i = 0.01, n = 10
Aplicando (4.3):

$$R = \frac{1{,}000{,}000 \times (0.01)}{(1+0.01)^{10} - 1} = 95{,}582.08$$

La deuda se paga con 10 documentos iguales mensuales de $ 95,582.08

Cuando conocemos el valor presente del problema la fórmula para encontrar el valor del pago es:

$$R = \frac{A_n \times i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad (4.4)$$

Ejercicios:

4.4 Una persona que tiene disponible la cantidad de $ 1,250,000 desea utilizarlos para asegurarse un ingreso fijo mensual durante los próximos tres años. Con tal propósito, deposita esa cantidad en una cuenta bancaria renovable cada 30 días y una tasa de interés mensual del 0.8% (9.6% anual). Suponiendo que se mantuviera constante la tasa de interés, ¿qué cantidad debería retirar todos los meses para que al final de los tres años la cantidad depositada inicialmente se hubiese agotado por completo?
Datos: Valor presente = 1,250,000, número de meses = 36; tasa de interés mensual = 0.8%.
Aplicando (4.4):

$$R = \frac{1{,}250{,}000 \times 0.008}{1-(1+0.008)^{-36}} = 40{,}099.64$$

Si retira $ 40,099.64 cada fin de mes la cuenta bancaria se agota en 3 años.

El número de periodos en un problema de anualidades

Responde a la pregunta siguiente: ¿Cuánto tiempo se necesita para alcanzar cierto valor futuro o para agotar cierto valor presente mediante pagos regulares conocidos, dada la tasa de interés?

Si tenemos el valor futuro la fórmula es:

$$n = \frac{\ln(1 + i \times S_n / R)}{\ln(1 + i)} \qquad (4.5)$$

Ejemplo:

4.5 Un trabajador sabe que en su cuenta de AFORE se le deposita \$ 1,000 cada dos meses. Este trabajador se pregunta cuantos años tendrán que pasar para que en su cuenta se haya acumulado la cantidad de \$ 800,000 considerando una tasa de interés anual del 18 % (3 % de interés bimestral). La AFORE capitaliza intereses cada dos meses.
Datos: R = 1,000; i = 0.03; S = 800,000
Aplicando (4.5):

$$n = \frac{\ln(1 + 0.03 \times 800{,}000 / 1{,}000)}{\ln(1 + 0.03)} = 108.89$$

Se necesitan aproximadamente 109 bimestres, algo más de 18 años.

Cuando conocemos el valor presente de la operación, , entonces el número de pagos se calcula de esta manera:

$$n = \frac{-\ln(1 - i \times A_n / R)}{\ln(1 + i)} \qquad (4.6)$$

Ejemplo:

4.6 Una persona deposita hoy en una cuenta bancaria la suma de \$ 125,000 con una tasa de interés mensual de 0.75% y piensa retirar de la cuenta \$ 4,000 al final de cada mes hasta que la cuenta quede en cero. ¿Durante cuántos meses podrá hacer esos retiros?
Datos: R = 4,000; i = 0.0075, A = 125,000; n = ?
Aplicando (4.6):

$$n = \frac{-\ln(1 - 0.0075 \times 125{,}000 / 4{,}000)}{\ln(1 + 0.0075)} = 35.7417$$

El inversionista podrá hacer 35 retiros completos y tendrá un excedente inferior a \$ 4,000.

El cálculo de la tasa de interés.

No existe una fórmula que nos permita conocer la tasa de interés en un problema de n anualidades, debido a que no es posible su despeje a partir de alguna de las fórmulas generales de anualidades. Para n = 2, la tasa de interés es:

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{R}} - 2$$

Para n = 3, tenemos dos soluciones:

$$\boldsymbol{i} = \frac{-3\times \boldsymbol{R} + \sqrt{-3\times \boldsymbol{R} + 4\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{S}}}{2\times \boldsymbol{R}}$$

$$\boldsymbol{i} = \frac{-3\times \boldsymbol{R} - \sqrt{-3\times \boldsymbol{R} + 4\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{S}}}{2\times \boldsymbol{R}}$$

También se encuentra una solución real bastante extensa para n = 4, pero junto con dos soluciones no reales. Para valores grandes de n, la tasa de interés debe encontrarse por prueba y error. En la actualidad existen calculadoras (y por supuesto programas de computadoras) que lo hacen rápidamente.

Ejemplos:

4.7 Una Administradora de Fondos para el Retiro le dice a un afiliado que si en los próximos cuatro años (48 meses) deposita mensualmente (al final del mes) la cantidad de $800, al término de este plazo tendrá acumulada un monto de $ 55,652.18. ¿Qué tasa de interés mensual está implícita en este cálculo?

Datos: R = 800, S_{48} = 55.652.18, n = 48; i = ?

Resolución mediante calculadora financiera: Se introducen los datos (lo cual depende de la calculadora) y luego se pide a la calculadora que encuentre por prueba y error la tasa de interés. La calculadora financiera TI BAII PLUS, utiliza los símbolos siguientes:

- PMT, para R → 800
- PV, para A (valor presente)
- N, para el número de periodos. → 48
- FV, para S (valor futuro) → 55652.18
- I/Y, para la tasa de interés por periodo (la calculadora encuentra que es = 0.0150 **= 1.5% mensual)**

4.4 Valuación de anualidades adelantadas

Cuando el pago regular se hace al principio del intervalo, las fórmulas son ligeramente diferentes:

El valor futuro de la anualidad adelantada es:

$$S_{a/n} = R \times \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] \qquad (4.7)$$

Ejercicios:

4.8 Hacer el cálculo del ejemplo 4.1, pero suponiendo que los pagos se hacen al principio.
Datos: R = 320, i = 18 % (1.5% mensual), n = 24 (meses), $S_{a/n} =$ ¿?

$$S_{a/n} = 320 \times \left[\frac{(1+0.015)^{25} - (1+0.015)}{0.015} \right] = 9,300.17$$

El valor presente de una anualidad adelantada se calcula como:

$$A_{a/n} = R \times \left[\frac{(1+i) - (1+i)^{-(n-1)}}{i} \right] \qquad (4.8)$$

Ejercicios:

4.9. Hacer el cálculo del ejemplo 4.2, pero suponiendo que los pagos se hacen al principio.
Datos: R = 200, i = 0.02, n = 10

$$A_{a/n} = 200 \times \left[\frac{(1.02) - (1.02)^{-(9)}}{0.02} \right] = 1,832.45$$

El cálculo del pago de la anualidad se resuelve como:

(a) Cuando conocemos el valor futuro,

$$R = \frac{i \times S_{a/n}}{(1+i)^{n+1} - (1+i)} \qquad (4.9)$$

Ejercicios:

4.10 Hacer el cálculo del ejemplo 4.3, pero suponiendo que los pagos se hacen al principio.
Datos: Valor futuro = 1,000,000; i = 0.01, n = 10

$$R = \frac{0.01 \times 1,000,000}{(1.01)^{11} - (1.01)} = 94,635.72$$

(b) Cuando conocemos el valor presente:

$$R = \frac{A_{a/n} \times \left(\frac{i}{1+i}\right)}{1-(1+i)^{-n}} \qquad (4.10)$$

Ejercicios:

4.11 Hacer el cálculo del ejemplo 4.4, pero suponiendo que los pagos se hacen al principio.
Datos: Valor presente = 1,250,000, número de meses = 36; tasa de interés mensual = 0.8%.

$$R = \frac{1,250,000 \times \left(\frac{0.008}{1.008}\right)}{1-(1.008)^{-36}} = 39,781.39$$

Cuando lo desconocido es el tiempo en un problema de anualidades, también tenemos dos fórmulas:

(a) Cuando conocemos el valor futuro:

$$n = \frac{\ln\left[(i \times S_{a/n} / R) + (1+i)\right]}{\ln(1+i)} - 1 \qquad (4.11)$$

Ejercicios:

4.12 Hacer el cálculo del ejemplo 4.5, pero suponiendo que los pagos se hacen al principio.
Datos: R = 1,000; i = 0.03; S = 800,000

$$n = \frac{ln\left[(0.03 \times 800{,}000/1{,}000) + (1.03)\right]}{ln(1.03)} - 1 = 107.94$$

(b) Cuando conocemos el valor presente:

$$n = 1 - \frac{\ln\left[(1+i) - i \times A_{a/n} / R\right]}{\ln(1+i)} \qquad (4.12)$$

Ejercicios:

4.13 Hacer el cálculo del ejemplo 4.6, pero suponiendo que los pagos se hacen al principio.
Datos: R = 4,000; i = 0.0075, A = 125,000; n = ?

$$n = 1 - \frac{ln\ [(1.0075) - 0.0075 \times 125{,}000 / 4{,}000]}{ln\ (1.0075)} = 35.437$$

El cálculo de la tasa de interés en un problema de anualidades adelantadas

Igual que en el caso anterior, la tasa de interés no puede ser despejada matemáticamente y se debe encontrar por prueba y error. Para resolver con una calculadora financiera, se requiere indicarle a ésta que se trata de anualidades que se pagan al comienzo del intervalo.

4.5 Construcción de una tabla de amortización de deudas

Una tabla de amortización de deudas es una descripción detallada de la evolución de la deuda desde el momento inicial del crédito hasta que es pagado por completo. La descripción incluye el pago regular y su descomposición en intereses y amortización del principal.

Ejercicios:

4.14 Se vende una casa en $ 2,000,000 a pagar la mitad al contado y el resto en cinco abonos anuales vencidos de igual valor. La tasa de interés aplicable es del 8% anual.

Usamos la fórmula de anualidades vencidas para obtener el valor de los cinco pago que se deben realizar para amortizar el préstamo. La fórmula es:

$$R = \frac{A_{a/n} \times i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Aplicando los valores del problema:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{1{,}000{,}000 \times 0.08}}{\mathbf{1-(1+0.08)^{-5}}} = \mathbf{250{,}456.455}$$

Cinco pagos anuales de $ 250,456.455 liquidan por completo el crédito.

Construimos la tabla de amortización.

Año	Saldo de la deuda Inicial	Pago Anual	Intereses	Amortización de Capital	Saldo de la deuda Final
1	**1,000,000.00**	**250,456.46**	**80,000.00**	**170,456.46**	**829,543.55**
2	**829,543.55**	**250,456.46**	**66,363.48**	**184,092.97**	**645,450.57**
3	**645,450.57**	**250,456.46**	**51,636.05**	**198,820.41**	**446,630.16**
4	**446,630.16**	**250,456.46**	**35,730.41**	**214,726.04**	**231,904.12**
5	**231,904.12**	**250,456.46**	**18,552.33**	**231,904.13**	**0.00**

Saldo de la deuda inicial: es el valor de la deuda que falta por pagar al inicio del año indicado en la primera columna.
Pago anual: es la cantidad de dinero que se abona al final del año correspondiente para liquidar el crédito. Se calculó con la fórmula indicada.
Intereses: es igual al Saldo de la deuda inicial x tasa de interés
Amortización de Capital: es igual al pago anual menos intereses.
Saldo de la deuda final: es igual al saldo de la deuda inicial - amortización de capital. El saldo de la deuda final de un año es igual al saldo de la deuda inicial del año siguiente.

4.6 Reconstrucción de la tabla cuando cambia la tasa de interés

Cuando los créditos son a pagar en plazos muy largos, normalmente la tasa es flotante, es decir, se ajusta según alguna tasa de referencia del mercado.
¿Cómo se reconstruye la tabla cuando cambia la tasa de interés ?
Se sigue el siguiente procedimiento:

1) Se determina el saldo de la deuda a partir del cual se aplica la nueva tasa de interés.

2) Se encuentra el valor del nuevo pago anual considerando el nuevo saldo de la deuda, la nueva tasa de interés y los abonos que faltan por pagar.

3) Con el valor del nuevo pago anual se hace la tabla de amortización para los abonos que restan pagar.

Ejercicios:

4.15 Supongamos que en el ejercicio anterior, después del segundo pago se eleva la tasa de interés del 8 % al 10 %.

Viendo la tabla de amortización sabemos que el saldo impago después del segundo pago es de $ 645,450.57 y faltan tres abonos por pagar.

Utilizamos la fórmula anterior y encontramos el valor del nuevo pago:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{645{,}450.57 \times 0.10}}{\mathbf{1-(1+0.10)^{-3}}} = \mathbf{259{,}545.23}$$

Ahora la tabla de amortización queda como sigue:

Año	**Saldo Insoluto Inicial**	**Pago Anual**	**Intereses**	**Amortización de Capital**	**Saldo Insoluto Final**
1	**1,000,000.00**	**250,456.46**	**80,000.00**	**170,456.46**	**829,543.55**
2	**829,543.55**	**250,456.46**	**66,363.48**	**184,092.97**	**645,450.57**
3	**645,450.57**	**259,545.23**	**64,545.06**	**195,000.17**	**450,450.40**
4	**450,450.40**	**259,545.23**	**45,045.04**	**214,500.19**	**235,950.21**
5	**235,950.21**	**259,545.23**	**23,595.02**	**235,950.21**	**0.00**