

## PARADOJA DE SAN PETERSBURGO

Probablemente fue planteada en 1708 por Montmort.

Consiste en el siguiente juego de azar. Se arroja una moneda (un volado) hasta que sale un lado determinado de la moneda, digamos “águila”. Si sale sol en el primer intento, el apostador recibe  $\$2^1 = \$2$ , si sale en el segundo intento, recibe  $\$2^2 = \$4$ , si sale al tercer intento, recibe  $\$2^3 = 8$ , . . . , si sale en el intento n, el jugador recibe  $\$2^n$ . El juego termina cuando sale águila.

La probabilidad de que salga sol en el primer intento es  $(1/2) = 0.5$ , y la probabilidad de que salga “águila” también es  $(1/2)$ . Por lo tanto, la probabilidad de que salga sol en el segundo intento es la probabilidad condicionada a que haya salido en la primera y es igual a  $(1/2)(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$ ; así, la probabilidad, de que salga sol en el tercer intento es  $(1/2)^3 = 1/8$  y la probabilidad de que salga en el intento n es  $(1/2)^n$ .

El valor esperado o esperanza matemática del juego medido en pesos es:

$$\begin{aligned} E(\text{Juego}) &= (1/2) 2 + (1/2)^2 2^2 + (1/2)^3 2^3 + \dots + (1/2)^n 2^n + \dots \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots = \infty \end{aligned}$$

**PARADOJA:** El juego tiene un valor esperado infinito, de manera que cualquier suma de dinero finita por grande que sea es inferior al valor del juego. Sin embargo, ninguna persona estaría dispuesta a pagar una suma de dinero más allá de unos pocos pesos por apostar en este juego.

### SOLUCIÓN DE LA PARADOJA POR DANIEL BERNOULLI (1725)

- El valor del juego no es el valor esperado monetario del mismo, sino el valor esperado de la utilidad del dinero.
- Plantea la siguiente función de utilidad:  $U(x) = \text{Ln}(x)$ , x es el premio del juego cuando sale sol. Por lo tanto, el valor del juego, medido en “útiles” es:

$$\begin{aligned} \text{Valor del Juego} &= E[U(x)] = (1/2) \text{Ln}(2) + (1/2)^2 \text{Ln}(2^2) + (1/2)^3 \text{Ln}(2^3) \\ &+ \dots + (1/2)^{10} \text{Ln}(2^{10}) + \dots + (1/2)^n \text{Ln}(2^n) + \dots + \end{aligned}$$

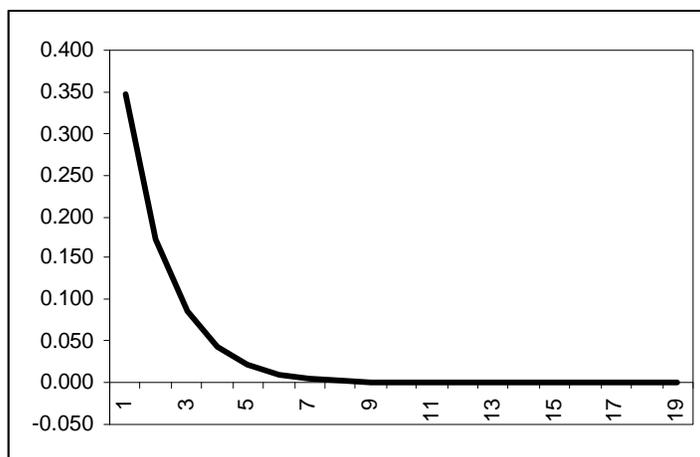
La tabla de resultados para los primeros veinte intentos es la siguiente:

Intentos	Probabilidad	X = Premio	U ( X )	E [ U (X) ]	Util.Marg.
1	0.500000	2	0.69314718	0.3465736	
2	0.250000	4	1.38629436	0.3465736	0.3465736
3	0.125000	8	2.07944154	0.2599302	0.1732868
4	0.062500	16	2.77258872	0.1732868	0.0866434
5	0.031250	32	3.4657359	0.1083042	0.0433217
6	0.015625	64	4.15888308	0.0649825	0.0216608
7	0.0078125	128	4.85203026	0.0379065	0.0108304
8	0.0039063	256	5.54517744	0.0216608	0.0054152
9	0.0019531	512	6.23832463	0.0121842	0.0027076
10	0.0009766	1024	6.93147181	0.0067690	0.0013538
11	0.0004883	2048	7.62461899	0.0037230	0.0006769
12	0.0002441	4096	8.31776617	0.0020307	0.0003385
13	0.0001221	8192	9.01091335	0.0011000	0.0001692
14	0.0000610	16384	9.70406053	0.0005923	0.0000846
15	0.0000305	32768	10.3972077	0.0003173	0.0000423
16	0.0000153	65536	11.0903549	0.0001692	0.0000212
17	0.0000076	131072	11.7835021	0.0000899	0.0000106
18	0.0000038	262144	12.4766493	0.0000476	0.0000053
19	0.0000019	524288	13.1697964	0.0000251	0.0000026
20	0.0000010	1048576	13.8629436	0.0000132	0.0000013

Total = 1.38627982

Observaciones:

- (1) En el intento número 20 la suma del valor esperado de la utilidad del juego ha llegado a 1.3862798, muy cerca de su límite. Esto se ve observando que cada nuevo intento agrega un valor esperado de utilidad insignificante.
- (2) La utilidad marginal del dinero es decreciente. Esta es probablemente la primera formulación de utilidad marginal decreciente.



VALOR DEL JUEGO: El valor del juego, medido en unidades de “utilidad” es 1.38627982 aproximadamente. Medido en pesos, el juego tiene un valor igual al antilogaritmo de 1.3862 ( $e^{1.3862} \approx 4$ ). Por lo tanto, medido en pesos, el valor del juego para el apostador con esta función de utilidad es aproximadamente de \$ 4.