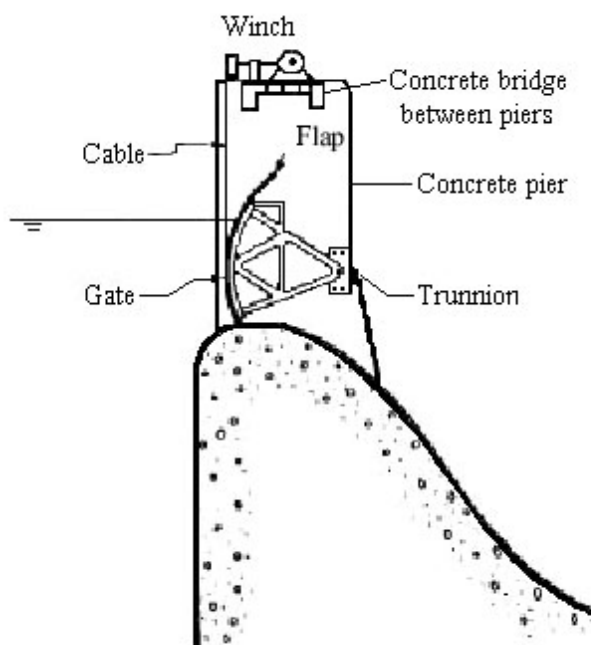


การตรวจเอกสาร

1. บานระบายชนิดโค้ง (RADIAL GATE)

บานโค้งเป็น hinged gate ชนิดหนึ่งซึ่งมีตัวบานเป็นรูปโค้ง ตามปกติส่วนโค้งของบานจะเป็นส่วนโค้งของวงกลมโดยมีจุดหมุนของบานอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น เรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Tainter gate เพื่อเป็นเกียรติแก่ Burnham Tainter ผู้คิดประดิษฐ์บานชนิดนี้ (กรมชลประทาน, 2534)

บานโค้งเป็นลักษณะบานประตูที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายสำหรับเขื่อนขนาดใหญ่ ซึ่งโดยทั่วไปจะติดตั้งบานโค้งอยู่ระหว่างตอม่อคอนกรีตมีลักษณะดังภาพที่ 2 สาเหตุที่บานประตูชนิดนี้เป็นที่นิยมเนื่องจากง่ายต่อการทำงาน มีราคาถูกและโดยทั่วไปมีความน่าเชื่อถือสูง



ภาพที่ 2 ลักษณะบานโค้งและส่วนประกอบ
ที่มา: John (2000)

บานโค้งประกอบด้วยแผ่นผิวโค้งซึ่งเสริมด้วยส่วนของโครงสร้างและส่วนแขนของบานที่จะทำหน้าที่ถ่ายแรงดันน้ำไปที่แท่นรับแกนหมุน (trunnion) การหมุนของบานโค้งจะหมุนรอบแกนนอนผ่านศูนย์กลางของแท่นรับแกนหมุนซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะสอดคล้องกับส่วนโค้งของบานซึ่งในภาวะเช่นนี้แนวของการกระทำของแรงดันน้ำจะถูกส่งผ่านไปยังแท่นรับแกนหมุนซึ่งจะทำให้ไม่เกิดแรงเนื่องจากการไม่สมดุล (unbalance moments) ในบางกรณีที่จุดศูนย์กลางของแผ่นผิวโค้งอยู่สูงกว่าแนวศูนย์กลางของแกนหมุนแรงยกตัวจะสามารถช่วยเครื่องก้วนในการยกบานแต่แรงยกตัวนี้จะต้องมีค่าน้อยกว่าน้ำหนักของบาน โดยทั่วไปแรงดันน้ำที่กระทำจะกระทำทางด้านเหนือน้ำในกรณีนี้แขนรับบานจะเกิดแรงอัดแต่ในบางกรณีที่แรงดันน้ำกระทำทางด้าน downstream แท่นรับแกนหมุนจะจมอยู่ใต้น้ำและจะเกิดแรงดึงที่แขนรับบาน

1.1 การวิบัติของบานประตูระบายน้ำ

ความน่าเชื่อถือในการทำงานของบานประตูเป็นสิ่งสำคัญเพื่อสามารถแน่ใจในความปลอดภัยของเขื่อนในช่วงที่เกิดน้ำหลากสูงสุด (John, 2000) โดยทั่วไปอาคารระบายน้ำล้นแบบไม่มีประตูจะมีความน่าเชื่อถือมากกว่าอาคารระบายน้ำล้นแบบที่มีบาน ดังนั้นการให้ความสนใจเป็นพิเศษต่อระดับความน่าเชื่อถือที่ต้องการเมื่อทำการออกแบบบานประตูจึงมีความสำคัญมาก ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว 2 สาเหตุหลักที่มักเป็นต้นเหตุของการวิบัติของบานประตูคือ

1.1.1 การวิบัติเนื่องจากคน โดยอาจเกิดจากการเปิดบานล่าช้าหรือความล้มเหลวในการเปิดบานด้วยสาเหตุใดๆ โดยถึงแม้ว่าบานประตูอยู่ในสภาพทำงานได้ก็ตาม

1.1.2 การวิบัติเนื่องจากการวิบัติของโครงสร้างบานเอง และส่วนประกอบต่างๆที่ใช้ในการทำงาน ซึ่งมีสาเหตุหลักๆมาจาก

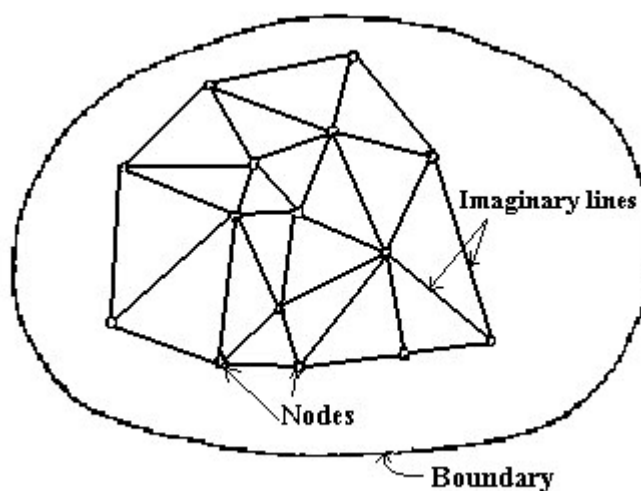
1.1.2.1 การออกแบบไม่ดีพอ ซึ่งส่วนมากเกิดการวิบัติเนื่องจากการกำหนดแรงและน้ำหนักต่างๆที่ใช้ในการออกแบบไม่เหมาะสม เช่น แรงจากแผ่นดินไหว แรงสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นในขณะที่เปิดบาน และการให้รายละเอียดในการออกแบบในการก่อสร้างไม่ดีพอ

1.1.2.2 ความเสียหายจากการใช้งาน เป็นการวิบัติเนื่องจากการเสื่อมสภาพตามอายุการใช้งาน หรือการขาดการบำรุงรักษาอุปกรณ์ต่างๆที่ใช้ในการทำงานของบาน

2. วิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์

2.1 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการแก้ปัญหาใน continuum mechanics ซึ่งสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณให้มีความแม่นยำ และรวดเร็วยิ่งขึ้น หลักการโดยทั่วไปคือ ทำการแบ่งวัตถุที่มีความต่อเนื่องออกเป็นส่วนเล็กๆ เรียกว่าเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นได้ทั้งรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมหรือรูปอื่นๆ ดังแสดงในตารางภาคผนวก ข. โดยที่เอลิเมนต์เหล่านี้ถูกแยกออกจากกันด้วยเส้นสมมุติ (imaginary line) หรือพื้นผิวสมมุติ (imaginary surface) และเชื่อมต่อระหว่างกันด้วยจุด (node) ที่อยู่บนขอบเขตของเอลิเมนต์ดังแสดงในภาพที่ 3 โดยคำนวณหน่วยแรงและการเคลื่อนตัวในทุกเอลิเมนต์ทำให้ได้ค่าที่มีความละเอียดสูง (chowdhury, 1978)

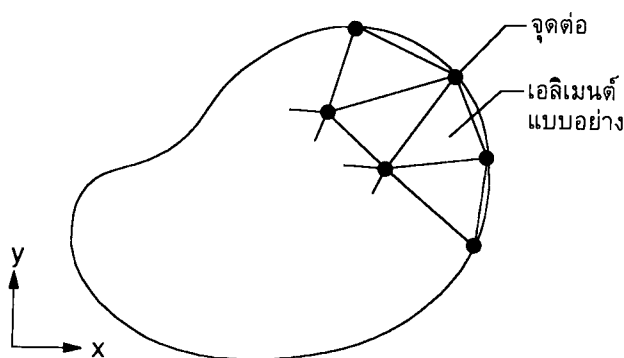


ภาพที่ 3 การแบ่งเอลิเมนต์ในวัสดุที่มีความต่อเนื่อง

2.2 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆทั้งหมด 6 ขั้นตอนดังต่อไปนี้ (ปราโมทย์, 2541)

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งเขตรูปร่างของปัญหาที่ต้องการผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในภาพที่ 4 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาคณิตศาสตร์ต่างๆกัน เช่น ปัญหาการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็ง ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็งหรือของเหลว หรือปัญหาการไหลของของเหลว เป็นต้น



ภาพที่ 4 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดต่างๆกัน

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation functions) เช่น เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมในสองมิติ ดังแสดงในภาพที่ 4 ประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในภาพที่ 5 โดยที่จุดต่อเหล่านั้นเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้ อาจแทนขนาดของการเสียรูปหากเป็นการแก้ปัญหาการเสียรูปในของแข็ง หรืออาจแทนค่าอุณหภูมิหากเป็นการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรืออาจแทนค่าความเร็วของของเหลวหากเป็นการแก้ปัญหาลูกของไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวแปรไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \quad (1)$$

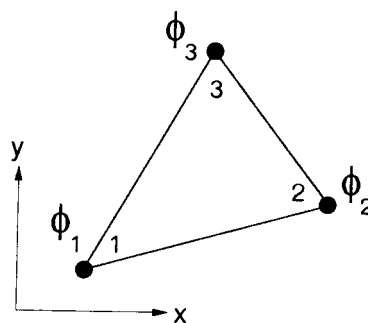
โดย $N_i(x,y)$, $i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

สมการที่ (1) สามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$= [N]_{(1 \times 3)} \{\phi\}_{(3 \times 1)} \quad (3)$$

โดย $[N]$ แทนเมทริกซ์แถวของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และ $\{\phi\}$ แทนเวกเตอร์เมทริกซ์หรือเมทริกซ์แถวตั้ง ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น



ภาพที่ 5 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อโดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ที่ตำแหน่งของจุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ที่สอดคล้องกับรูปร่างของเอลิเมนต์ดังเช่นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในภาพที่ 3 มีสมการอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (4)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[k]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (5)$$

โดยครรชนีล่าง e แสดงถึงเมทริกซ์ต่าง ๆ นั้นเป็นเมทริกซ์ระดับเอลิเมนต์ สำหรับขั้นตอนที่ 3 นี้ อาจถือได้ว่าเป็นหัวใจของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสมการของเอลิเมนต์ดังกล่าว จะต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ ซึ่งสมการของเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนขึ้นได้โดยตรง

จากสมการเชิงอนุพันธ์ โดยการประยุกต์ระเบียบวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตค่าง ซึ่งถูกจัดว่าเป็นระเบียบวิธีทั่วไปที่นิยมใช้ในการประยุกต์กับปัญหาต่างๆในปัจจุบัน

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการที่เขียนขึ้นได้จากทุกๆเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการขนาดใหญ่ขึ้นดังนี้

$$\sum(\text{element equations}) \Rightarrow [k]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (6)$$

โดยตัวห้อย sys บ่งถึงเมตริกซ์นั้นๆ เป็นเมตริกซ์ของระบบสมการรวม

ขั้นตอนที่ 5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต(boundary conditions)ลงในระบบสมการที่ (5) จากนั้นจึงแก้ระบบสมการเพื่อหา $\{\phi\}_{\text{sys}}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ซึ่งอาจเป็นการเคลื่อนตัวเนื่องจากการเสียรูปในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าของอุณหภูมิสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นค่าความเร็วของของเหลวสำหรับปัญหาการไหลเป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 การคำนวณค่าที่ต่อเนื่องอื่นๆหลังจากคำนวณค่าที่จุดต่อจากขั้นตอนที่ 5 ออกมาได้แล้ว ยกตัวอย่างเช่น หลังจากรู้ค่าการเคลื่อนตัวของ การเสียรูปในของแข็งก็สามารถคำนวณหา ค่าความเครียดและความเค้นได้ หรือเมื่อรู้ค่าของอุณหภูมิที่จุดต่อต่างๆก็สามารถนำไปคำนวณหา ปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ หรือเมื่อรู้ค่าความเร็วของการไหลก็สามารถนำไปคำนวณหา ปริมาณการไหลทั้งหมดได้เป็นต้น

2.3 การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Finite Element Analysis)

ปัจจัยสำคัญของลักษณะที่ไม่เชิงเส้นสำหรับโครงสร้างในการประยุกต์ใช้ประโยชน์ทางด้านปฏิบัติ ดังนี้ (A-S Niaz, 1994)

2.3.1 ลักษณะที่ไม่เชิงเส้นตามเรขาคณิต (Geometrical Nonlinearities)

ในการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ในลักษณะที่ไม่เชิงเส้นนี้ ปัจจัยสำคัญของลักษณะที่ไม่เชิงเส้นเกิดขึ้นจากผลของการเคลื่อนที่จำนวนมาก (large displacements) ของ

โครงสร้างบริเวณฐานตามเรขาคณิตทั้งหมด การเคลื่อนที่จำนวนมากของโครงสร้างเหล่านี้ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างสำคัญในเรขาคณิต เนื่องจากน้ำหนักถ่วงก่อให้เกิดการทำให้ผิวดรูปซึ่งสามารถเป็นผลให้โครงสร้างเกิดการตอบสนองอย่างไม่เชิงเส้นในแบบที่ทำให้แข็งขึ้นหรืออ่อนลง เช่น โครงสร้างแบบเคเบิล โดยทั่วไปแสดงถึงคุณสมบัติที่ทำให้แข็งขึ้นในการเพิ่มน้ำหนักถ่วง ในขณะที่เส้นโค้งอาจอ่อนตัว ลงในช่วงแรกก่อนแล้วจึงทำให้แข็งขึ้น คุณสมบัตินี้รู้จักกันอย่างแพร่หลายว่าเป็นการโค้งงอแบบ snap-through

2.3.2 ลักษณะที่ไม่เชิงเส้นของวัสดุ (Material Nonlinearities)

ปัจจัยสำคัญอีกประการหนึ่งของลักษณะที่ไม่เชิงเส้นมีสาเหตุมาจากความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้นระหว่าง ความเค้นและความเครียดซึ่งรู้จักกันดีในหลากหลายคุณสมบัติเกี่ยวกับโครงสร้าง ปัจจัยทั้งหลายเหล่านี้เป็นเหตุให้วัสดุอาจมีคุณสมบัติเป็นลักษณะที่ไม่เชิงเส้น ความแปรผันของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุที่ปรากฏในเรื่องน้ำหนัก (ดังเช่นในเรื่องลักษณะ ปัญหา Plasticity) ช่วงเวลาของภาระ (ดังในการวิเคราะห์ creep analysis) และอุณหภูมิ (เช่นปัญหา Thermo-Plasticity) เป็นตัวอย่างของปัจจัยเหล่านี้ ลักษณะที่ไม่เชิงเส้นจำพวกนี้รู้จักกันดีในชื่อของ "การไม่เชิงเส้นของวัสดุ" (material nonlinearities) สามารถทำให้เป็นต้นแบบที่ดีที่จะปรับให้เข้ากับผลที่เกิดขึ้นดังที่กล่าวมา ซึ่งตรงกับที่จะทำให้เกิดการใช้ประโยชน์ที่แตกต่างกันออกไปตลอดจนถึงการใช้ความสัมพันธ์ที่ประกอบกันขึ้น การขยวงลงของความต่อเนื่องกันของเสาและคานในช่วงที่มีการเกิด แผ่นดินไหว เป็นหนึ่งในการใช้ประโยชน์ในลักษณะแบบไม่เชิงเส้นของวัสดุที่น่าเชื่อถือได้

2.3.3 การบรรจบกันของลักษณะที่ไม่เชิงเส้น (Contact or Boundary Nonlinearities)

ปัญหาของลักษณะที่ไม่เชิงเส้นชนิดพิเศษเกี่ยวข้องกับธรรมชาติที่เปลี่ยนไปในสภาพขอบเขตของโครงสร้าง ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ในช่วงระหว่างที่มีการเคลื่อนไหว สถานการณ์เช่นนี้พบในการวิเคราะห์ปัญหาเรื่อง การบรรจบกัน โครงสร้างที่จำกัดขอบเขตไว้ การติดกันของพื้นเพื่อง ปัญหาในการประกอบ ความสัมพันธ์ ลักษณะลูกโซ่ และแรงอัดของวัสดุต่างๆ เป็นตัวอย่างมากมายที่ต้องการการประเมินค่าของขอบเขตที่ ติดต่อกัน การหาค่าของขอบเขตที่บรรจบกันนั้น (เช่น ปม เส้น หรือพื้นผิว) สามารถหาได้โดยการใช้ส่วนที่ ขาดหายไประหว่างปมที่อยู่ติดกันกับขอบเขตบริเวณ

2.3.4 ขั้นตอนการแก้ปัญหาที่ไม่เชิงเส้น

แผนการปฏิบัติสำหรับปัญหาที่เกิดขึ้นในลักษณะที่ไม่เชิงเส้น ความแข็งของโครงสร้าง น้ำหนักถ่วงประยุกต์ หรือสภาพขอบเขตสามารถทำให้เกิดผลเป็นการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นคุณภาพของโครงสร้างต้องสร้างขึ้นจากสถานะที่มีอยู่ ในปัจจุบันซึ่งคือสถานะเดิมที่ยังไม่ทราบแน่ชัด ในการกำหนดสภาพคงที่แต่ละจุดนั้น พร้อมทั้งทางที่มีคุณภาพ ผลของการกำหนดสมการที่เกิดขึ้นพร้อมกันจะเป็นลักษณะที่ไม่เชิงเส้น ดังนั้น วิธีแก้ไขทางตรงจะเป็นไปไม่ได้ และวิธีที่ทำซ้ำแล้วซ้ำเล่าจะต้องนำมาใช้ หลากหลายแผนการได้ถูกประดิษฐ์คิดขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะที่ไม่เชิงเส้น จากการที่ได้เผชิญกับปัญหาที่ไม่เชิงเส้นมันเป็นเรื่องยากอย่างมากถ้ามีความเป็นไปได้ที่จะสนับสนุนทุกๆ แผนการที่ใช้ได้ทั่วไปกับปัญหาทั้งหมด บ่อยครั้งมากที่ปัญหาเฉพาะอย่างที่มีอยู่จะบีบให้ผู้วิเคราะห์ต้องลองวิธีปฏิบัติที่แตกต่างออกไปหรือต้องเลือกการปฏิบัติที่แน่นอน เพื่อจะได้ประสบความสำเร็จในการพบวิธีแก้ไขที่ถูกต้อง ตัวอย่างปัญหาในเรื่องของการโค้งงอแบบ Snap-through ของโครงร่างและเปลือก ต้องใช้กับแผนการที่น้ำหนักถ่วงมีการควบคุมในเรื่องการผิดรูปร่างไป เช่น Displacement and Arc-length based controls มากกว่าที่จะใช้ Force-controlled loading จากเหตุผลเหล่านี้จึงจำเป็นที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้เพื่อวิเคราะห์ลักษณะที่ไม่เชิงเส้นจะมีหลากหลายตัวเลือกในวิธีปฏิบัติกับกฎเกณฑ์ที่ใช้ในเรื่องการคำนวณเพื่อขบปัญหาระยะคลื่นที่มีอยู่แพร่หลายในการใช้ประโยชน์ของลักษณะที่ไม่เชิงเส้น วิธีการเหล่านี้จะทำให้เกิดมีความโค้งงอยืดหยุ่นมากขึ้นและ การวิเคราะห์มีความแน่นอนและมีประสิทธิภาพสูงสำหรับวิธีแก้ไขของปัญหาเฉพาะเรื่อง

การวิเคราะห์แบบจำลองสำหรับการวิจัยในครั้งนี้ได้ใช้โปรแกรม COSMOS/M ซึ่งเป็นโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ Finite element ที่พัฒนาขึ้นโดย Structure Research and Analysis Corporation (SRAC) เพื่อใช้กับคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล และ work station ในโปรแกรมนี้อาจประกอบด้วยโมดูลที่ใช้ในการแก้ปัญหาแบบ Linear และ Nonlinear static structure และ Linear และ Nonlinear dynamic structure และยังสามารถกำหนด criteria ตามที่ต้องการได้ นอกจากนี้ยังสามารถใช้ในการแก้ปัญหาด้าน การถ่ายเทความร้อน กลศาสตร์ของไหล เป็นต้น

3. ทฤษฎีการวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือของโครงสร้าง

การวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือของโครงสร้าง เป็นพฤติกรรมทางวิทยาศาสตร์ธรรมชาติที่สามารถอธิบายได้ตามหลักคณิตศาสตร์สถิติ และทฤษฎีกลศาสตร์ประยุกต์ประกอบกัน (เอกสิทธิ์, 2536 และ สงวน, 2537) ความน่าเชื่อถือของโครงสร้างจะเกิดจากการก่อสร้างและเกิดจากการใช้สอย โดยมีเงื่อนไขของอายุและสภาพการณ์ต่างๆ เป็นตัวกำหนด ซึ่งในทางปฏิบัติสำหรับอาคารที่อยู่อาศัย สถานที่ทำงาน ฯลฯ ควรมีค่า P_f ในลำดับน้อยกว่า 10^{-3} (วิชัย, 2541)

การเก็บรวบรวมข้อมูลทางสถิติของวัสดุหลักของโครงสร้าง ข้อมูลเกี่ยวกับการก่อสร้างว่าด้วยขนาดของอาคาร ขนาดหน้าตัด ความกว้างความลึกรวมทั้งความหนา และการรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับน้ำหนักบรรทุก การเก็บข้อมูลเกี่ยวกับกำลังวัสดุ และนำข้อมูลมาวิเคราะห์ระดับกำลังในแต่ละระดับกำลังยังสามารถวิเคราะห์หาดัชนีบางตัวเพื่อจำลอง (Simulation) ตามวิธีทางสถิติอื่นจะนำไปสู่การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความแปรปรวน และค่าความน่าเชื่อถือได้ในที่สุด (สงวน, 2537)

3.1 ทฤษฎีทางสถิติ (Walpole และ Myers, 1998)

3.1.1 คุณสมบัติเชิงสถิติของข้อมูล

ถ้าข้อมูลมีขนาด n ข้อมูล คือ $x_1, x_2, \dots, x_n$ จะสามารถหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลขนาด n ข้อมูลได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (7)$$

และมีค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (8)$$

สมการ (8) นี้คำนึงถึง Bias ของข้อมูลด้วย ถ้าไม่คำนึงถึง Bias จะได้ค่าความแปรปรวนดังนี้

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (9)$$

และค่าสัมประสิทธิ์ความแปรปรวน

$$\delta = \frac{S}{x} \quad (10)$$

3.1.2 ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็น

ตัวแปรสุ่ม(Random Variables)คือ ฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริงซึ่งถูกกำหนดขึ้นโดยแต่ละสมาชิกที่อยู่ในกลุ่มตัวอย่าง เช่น $X = 0, 1, 2$ เมื่อ X เป็นจำนวนที่เกิดหัว จากการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง เป็นต้น นิยมเขียนตัวแปรสุ่มด้วยตัวอักษรใหญ่ และค่าของตัวแปรสุ่มด้วยอักษรตัวเล็ก

3.1.2.1 ตัวแปรสุ่มตัวเดียว

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม การแจกแจงความน่าจะเป็นสามารถอธิบายได้โดย ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function, CDF) คือ (Ang และ Tang, 1975)

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ สำหรับทุกค่าของ } x \quad (11)$$

$P(X \leq x)$ คือ ความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ x

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็นสามารถอธิบายในรูปของฟังก์ชันมวลน่าจะเป็น (Probability Mass Function, PMF) ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบง่ายๆ คือ $P(X = x)$ สำหรับทุกค่าของ x นั้น ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องโดยมี PMF $P_X(x_i) = P(X = x_i)$ แล้ว ฟังก์ชันการกระจายสะสมคือ

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\text{all } x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{\text{all } x_i \leq x} (p_X(x_i)) \quad (12)$$

ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็นสามารถอธิบายอยู่ในรูปของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (Probability Density Function , PDF.) ดังนั้นถ้า $f_X(x)$ เป็น PDF ของ X ความน่าจะเป็นของ X ในช่วง (a,b) คือ

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (13)$$

และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม คือ

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (14)$$

ถ้า $F_X(x)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดังนั้น จากสมการ (14) จะได้

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (15)$$

อย่างไรก็ตาม $f_X(x)dx = P(x < X \leq x+dx)$ เป็นความน่าจะเป็นของ X ซึ่งอยู่ในช่วง $(x, x+dx)$ ฟังก์ชันดังกล่าวจะต้องไม่เป็นลบ ความน่าจะเป็นรวมและค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มต้องรวมกันเป็น 1 ถ้า $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันการกระจายสะสมของ X แล้วจะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $F_X(-\infty) = 0$ และ $F_X(+\infty) = 1$
2. $F_X(x) \geq 0$ และจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มากขึ้น
3. ฟังก์ชันจะต่อเนื่องกับทุกค่าของ x

ดังนั้น จากสมการ (13) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$P(a < X \leq b) = \int_{-\infty}^b f_X(x)dx - \int_{-\infty}^a f_X(x)dx \quad (16)$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X จะได้

$$P(a < X \leq b) = \sum_{\text{all } x_i \leq b} p_X(x_i) - \sum_{\text{all } x_i \leq a} p_X(x_i) \quad (17)$$

จากสมการ (12) และ (14) จะได้

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \quad (18)$$

3.1.2.2 ตัวแปรสุ่มตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

โดยอาศัยพื้นฐานจากตัวแปรสุ่มตัวเดียว และการแจกแจงความน่าจะเป็นของ ตัวแปรสุ่มตัวเดียว สามารถขยายเป็นการกระจายของตัวแปรสุ่มตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม 2 ตัว ($X=x, Y=y$) และ ($X \leq x, Y \leq y$) จะเป็นเหตุการณ์ร่วมที่ถูกกำหนดโดยค่าของตัวแปรสุ่มในระนาบ 2 มิติ (xy -space) และจะได้

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (19)$$

ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นสะสมของการเกิดขึ้นร่วมกับของเหตุการณ์ $X \leq x$ และ $Y \leq y$ โดยต้องมีเงื่อนไข คือ

1. $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$ สำหรับทุกค่าของ x และ y
2. $F_{X,Y}(x,y)$ จะต่อเนื่องใน x และ y และเพิ่มขึ้นตาม x และ y

สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probability Density Function) แสดงดังภาพที่ 6 อธิบายด้วย PDF ร่วม คือ

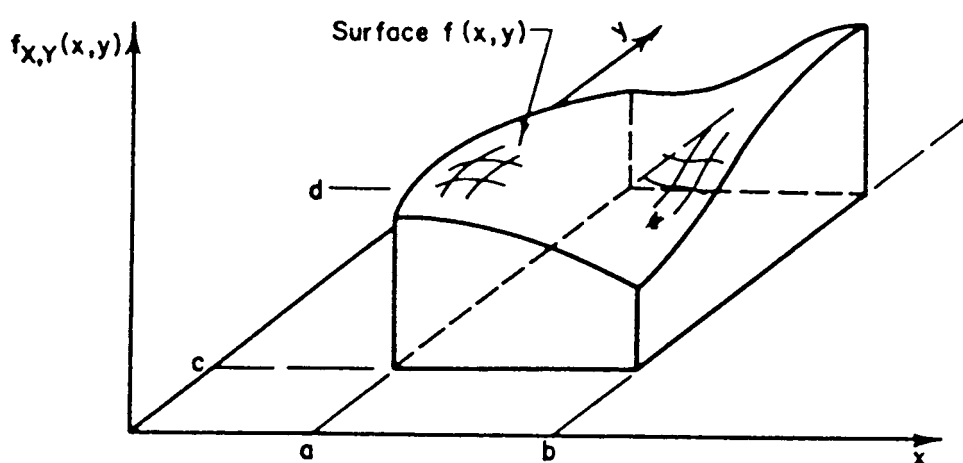
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) \, dvdu \quad (20)$$

ความน่าจะเป็นสะสมร่วม คือ

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

และ

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(u,v) \, dvdu \quad (22)$$



ภาพที่ 6 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของสองตัวแปร

ที่มา: Ang และ Tang (1975)

ถ้า x, y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็นร่วม อาจอธิบายได้ด้วย PMF ร่วม คือ

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) \quad (23)$$

ความน่าจะเป็นสะสมร่วม คือ

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{(x_i \leq x, y_i \leq y)} P_{X,Y}(x_i, y_i) \quad (24)$$

แต่ความน่าจะเป็นที่ $X=x$ อาจขึ้นอยู่กับค่าของ Y หรือในทางกลับกัน จากทฤษฎีความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข สำหรับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง จะได้ PMF แบบมีเงื่อนไข คือ

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad (25)$$

โดยที่ $p_Y(y) \neq 0$ และเช่นเดียวกันจะได้

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \quad (26)$$

สำหรับตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องจะได้ PDF แบบมีเงื่อนไข คือ

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (27)$$

โดยที่ $f_Y(y) \neq 0$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad (28)$$

โดยที่ $f_X(x) \neq 0$ และมาร์จินัล PDF ของ Y และ X มีลักษณะดังนี้

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx, \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad (29)$$

ลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง แสดงในภาพที่ 7 และถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน (Statistically Independent) จะได้

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (30)$$

และ

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad (31)$$



ภาพที่ 7 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมกรณี 2 มิติ

ที่มา: Ang และ Tang (1975)

3.1.3 การแจกแจงความน่าจะเป็น

3.1.3.1 การแจกแจงแบบปกติ

เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ใช้กันแพร่หลายที่สุดในทฤษฎีการวิเคราะห์ความเชื่อ
ถือได้ของโครงสร้าง (Nowak และ Collins, 2000) ฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรปกติ X คือ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right) \quad -\infty < x < \infty \quad (32)$$

เมื่อ μ_X และ σ_X คือ ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตามลำดับ เนื่องจากไม่สามารถหาค่า
แจกแจงในรูป Closed-form ค่าของมันจึงแสดงไว้ในรูปของตาราง ในรูปมาตรฐานเมื่อฟังก์ชัน
ความหนาแน่นน่าจะเป็น (PDF) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\phi(z)$

$$z = \frac{x-\mu_X}{\sigma_X} ; f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right] = \phi(z) \quad (33)$$

การแจกแจงอาจอธิบายในรูปของ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X} \phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) ; -\infty < x < \infty \quad (34)$$

และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CDF) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\Phi(z)$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) = F_Z(z) \quad (35)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\mu_X + Z\sigma_X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (36)$$

เนื่องจากการแจกแจงปกติสมมาตร คุณสมบัติของการแจกแจงปกติจึงเป็น

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \quad (37)$$

3.1.3.2 การแจกแจงแบบล็อกปกติ (Log-normal Distribution)

Nowak และ Collins (2000) กล่าวว่าตัวแปร X เป็นการแจกแจงแบบล็อกการริมหัก ซึ่งจะเป็นการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรเมื่อ

$$Y = \ln X \text{ และ } X = e^Y$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (PDF) แสดงได้ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{1}{X \cdot \sigma_{\ln X} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}}\right)^2\right] \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (38)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma_{\ln(X)}} \phi\left(\frac{\ln(x) - \mu_{\ln(X)}}{\sigma_{\ln(X)}}\right) \quad (39)$$

และฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม (CDF) แสดงได้ดังนี้ เมื่อ

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = P(Y \leq y) = F_Y(y) \quad (40)$$

เมื่อ Y เป็น การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) แล้ว

$$F_X(x) = F_Y(y) = \phi\left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \quad (41)$$

เมื่อ $y = \ln(x)$ และ $\mu_Y = \mu_{\ln(x)}$ เป็นค่าเฉลี่ยของ $\ln(X)$ และ $\sigma_Y = \sigma_{\ln(x)}$ เป็นค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\ln(X)$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบปกติ μ_Y และ σ_Y สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\sigma_Y^2 = \ln(V_X^2 + 1) \quad (42)$$

$$\mu_Y = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \quad (43)$$

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (44)$$

ถ้าค่า $V_X < 0.2$ จะสามารถหาค่า μ_Y และ σ_Y ได้ดังนี้

$$\sigma_Y^2 \approx V_X^2 ; \mu_Y \approx \ln(\mu_X) \quad (45)$$

3.2 แนวคิดทั่วไปของความน่าเชื่อถือเชิงโครงสร้าง

เมื่อกล่าวถึงความน่าเชื่อถือเชิงโครงสร้างโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบของค่าแฟกเตอร์ความปลอดภัย (Factor of Safety) ซึ่งมีวิธีการมากมายที่จะใช้หาค่าดังกล่าว เช่น ค่าความสามารถแบกทานสูงสุดต่อแรงที่กระทำ หรือค่าโมเมนต์ต้านทานทั้งหมดต่อโมเมนต์ที่กระทำทั้งหมด เป็นต้น ซึ่งเมื่อค่าแฟกเตอร์ความปลอดภัยมีค่ามากกว่า 1 ถือว่าโครงสร้างปลอดภัย แต่โดยทั่วไปต้องมีการกำหนดค่าแฟกเตอร์ความปลอดภัยที่ยอมรับ ซึ่งจะถือว่าโครงสร้างปลอดภัยเพียงพอต่อเมื่อมีค่าแฟกเตอร์ความปลอดภัยมากกว่าค่าที่ยอมรับ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการกำหนดค่าแฟกเตอร์ความปลอดภัยที่ยอมรับจะถูกกำหนดจากประสบการณ์หรือการสังเกต ไม่มีการใช้ในรูปแบบเดียวกันและไม่ทราบผลที่ตามมาจากการใช้ค่าดังกล่าว และยังไม่มีการพิจารณาในรูปแบบที่น้ำหนักและแรงต้านทานมีรูปแบบการกระทำที่แตกต่างกัน ไม่มีการพิจารณาเป็นระบบและการถ่วงน้ำหนักรูปแบบที่แตกต่างกันของความไม่แน่นอนและไม่มีการพิจารณาในรูปแบบของ Stochastic Nature ของพารามิเตอร์ ดังนั้นการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของการวิบัติจึงเป็นทางเลือกที่ดีกว่าสำหรับการหาค่าแฟกเตอร์ความปลอดภัย

โดยทั่วไปนั้นส่วนหนึ่งของโครงสร้างอาคารที่สามารถแยกออกได้ว่าเป็นสภาวะของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง (Load Effect) ให้แทนด้วย S ส่วนกำลังทางโครงสร้าง (Structural Resistance) ให้แทนด้วย R ซึ่งทั้งค่า S และค่า R นั้นเป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งทำให้มีโอกาสเกิดเหตุการณ์ที่กำลังของโครงสร้างน้อยกว่าแรงที่กระทำ และทำให้เกิดการวิบัติได้ ทฤษฎีความน่าเชื่อถือนำมาใช้เพื่อคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดความวิบัติของโครงสร้าง ซึ่งความน่าจะเป็นที่จะเกิดการวิบัติ (P_f) สามารถเขียนในรูปของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะวิบัติได้ดังนี้

$$P_f = P(R \leq S) \quad (46)$$

หรือ
$$P_f = P(R - S \leq 0) \quad (47)$$

ให้ F_R และ F_S เป็นฟังก์ชันการกระจายของ R และ S ส่วน f_R และ f_S เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ R และ S ตามลำดับ ถ้าสมมุติลักษณะการกระจายทางสถิติของ R และ S เป็นอิสระต่อกันและไม่ขึ้นกับเวลาจะได้ว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการวิบัติคือปริมาตรภายใต้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมในบริเวณที่จะเกิดการวิบัติ ($R < S$) การอินทิเกรตความน่าจะเป็นเทียบกับ R และ S สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$P_f = \int_0^{\infty} f_S(x) F_R(x) dx \quad (48)$$

$$P_f = \int_0^{\infty} f_R(x) (1 - F_S(x)) dx \quad (49)$$

จากสมการ(47)และ(48)สามารถแทนด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการวิบัติ $f_F(x)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$P_f = \int_0^{\infty} f_F(x) dx \quad (50)$$

พฤติกรรมขององค์ประกอบของโครงสร้างอาจมีอิทธิพลมาจากตัวแปรสุ่มต่างๆ โครงสร้างอาจจะเกิดการพังทลายขึ้นภายใต้เงื่อนไขสภาวะขีดจำกัดแบบใดแบบหนึ่ง ซึ่งสามารถนิยามฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัดได้ดังนี้

$$g(X) = R - S \quad (51)$$

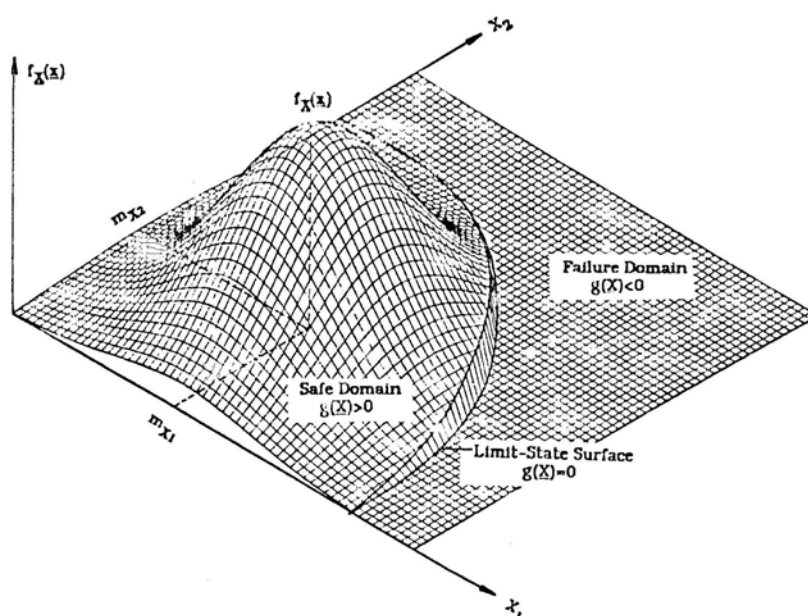
จะเห็นได้ว่า ถ้า $g(X) > 0$ โครงสร้างจะปลอดภัย แต่ถ้า $g(X) < 0$ โครงสร้างจะเกิดการวิบัติ และถ้า $g(X) = 0$ โครงสร้างจะอยู่ในสภาพสมดุล คืออยู่ระหว่างการพังทลายและความปลอดภัยพอดี ซึ่ง $g(X) = 0$ นี้สามารถเรียกได้ว่าผิวของการวิบัติ หรือสภาวะขีดจำกัด (Failure Surface หรือ Limit State) ดังนั้นในการออกแบบโครงสร้างให้มีความปลอดภัย เราจะออกแบบให้โครงสร้างมีความต้านทานของโครงสร้างมากกว่าน้ำหนักบรรทุกทุกที่กระทำ แต่โดยปกติแล้วความต้านทานและน้ำหนักบรรทุกทุกที่กระทำมักเป็นตัวแปรสุ่ม มีค่าไม่แน่นอน ซึ่งอาจเป็นสาเหตุให้ค่าความสามารถต้านทานของโครงสร้างและผลของน้ำหนักบรรทุกเปลี่ยนแปลงได้ หากความสามารถต้านทานของโครงสร้างมีค่าน้อยกว่าผลจากน้ำหนักบรรทุกทุกที่กระทำแล้ว จะทำให้โครงสร้างอยู่ในบริเวณที่จะทำให้เกิดการวิบัติได้ ดังนั้นความน่าจะเป็นของการวิบัติสามารถเขียนได้เป็น

$$P_f = \int_{D_f} f_X(X) dX \quad (52)$$

ซึ่ง $f_X(X)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วม

D_f คือ ขอบเขตของการวิบัติ (Failure domain)

จะเห็นได้ว่าความน่าจะเป็นของการวิบัติก็คือการอินทิเกรตของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมในขอบเขตของการวิบัตินั่นเอง ดังภาพที่ 8



ภาพที่ 8 ปริมาตรภายใต้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมและขอบเขตของการวิบัติ
ที่มา: Ouyornprasert (1988)

3.3 วิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ (Kijawatworawet, 1998)

ปัญหาคำคัญสำหรับการวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ คือ การหาค่าความน่าจะเป็นของการวิบัติของโครงสร้าง ซึ่งสิ่งที่ต้องการก็คือ การอินทิเกรตของหลายตัวแปรหรือหลายมิติ ซึ่งในทางปฏิบัติจำเป็นต้องหาวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการหาคำตอบของ P_f ซึ่งในกรณีของสองมิติหรือสองตัวแปรจะหาค่าได้ค่อนข้างแน่นอน แต่ในกรณีหลายมิติการใช้วิธีอินทิกรัลที่ใช้กันเช่น Gauss quadrature ทำได้ยากขึ้น ดังนั้นวิธีที่นิยมประยุกต์ใช้กันอย่างมากคือวิธีซิมมูลेशन ซึ่งมีชื่อเป็นที่รู้จักกันคือ Monte Carlo Simulation Method ดังนั้นสมการของความน่าจะเป็นของการวิบัติจึงเขียนได้เป็น

$$P_f = \int_{X \in \Omega_X} I[g(X) \leq 0] f_X(X) dX \quad (53)$$

เมื่อ Ω_X คือค่าของตัวแปรสุ่ม X ที่อยู่ในขอบเขตของการวิบัติ และ $I[g(X) \leq 0]$ คืออินดิเคอร์ของฟังก์ชัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $g(X) \leq 0$ และมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $g(X) > 0$ ซึ่งมีค่า P_f เป็นค่า Expectation ของ $I[g(X) \leq 0]$ โดยเกี่ยวข้องกับ $f_X(X)$ เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้นในการซิมมูลเคชันค่าใดๆแสดงได้ด้วยสมการ

$$P_i = I[g(X) \leq 0]; i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (54)$$

การประมาณค่า P_f หรือ $E[P_f]$ มีค่าเท่ากับ

$$E[P_f] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i \quad (55)$$

และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน สามารถหาได้ดังสมการ

$$D[P_f] = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (P_i - E[P_f])^2} \quad (56)$$

โดยค่า N ต้องมากพอที่จะครอบคลุมการประมาณค่าของ P_f ในทางปฏิบัติ โดยปกติค่าความน่าจะเป็นของการวิบัติจะมีลำดับของตัวเลขเป็น 10^{-4} หรือน้อยกว่ามาก ดังนั้นจำนวน N ของการซิมมูลเคชันโดยวิธี Monte Carlo จึงต้องมีค่ามากขึ้นตามไปด้วยเพื่อประมาณค่า P_f คือค่า N ต้องมีค่าน้อยกว่าเท่ากับ $1/P_f$ เช่นค่า $P_f = 1 \times 10^{-4}$ ดังนั้น $N = 1/1 \times 10^{-4} = 10,000$ ครั้ง จากวิธี Monte Carlo ค่อนข้างจะได้ค่าไม่ละเอียดมากพอ ดังนั้นเพื่อเป็นการลดค่าความไม่แน่นอนของค่า P_f สามารถ

กระทำได้โดยวิธีลดความแปรปรวนของค่า P_f ซึ่งวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันมากคือ Importance Sampling Method ซึ่งวิธีนี้จะให้คำตอบที่แม่นยำและมีประสิทธิภาพสูง

3.3.1 วิธีการสุ่มตัวอย่างสำคัญ

พื้นฐานความคิดของวิธีนี้คือ พยายามเลือกบริเวณที่จะสุ่มตัวอย่างในขอบเขตที่มีความสำคัญที่มีส่วนทำให้เกิดค่าความน่าจะเป็นของการวิบัติมากที่สุดโดยสมการ

$$P_f = \int_{v_X} I[g(X) \leq 0] \frac{f_X(X)}{h_Y(X)} h_Y(X) dx \quad (57)$$

ซึ่ง $I[g(X) \leq 0]$ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $X \in D_f$ (ขอบเขตของการวิบัติ) และมีค่าเท่ากับ 0 นอกเหนือจากนี้ $f_X(X)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วม และ $h_Y(X)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นสุ่มตัวอย่างสำคัญ(importance sampling density function) ดังนั้นจากสมการข้างต้นสามารถหาค่า mean (expected value) ได้ดังนี้

$$E[P_f] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [I(g(X_j) \leq 0)] \frac{f_X(X)}{h_Y(X)} \quad (58)$$

และค่าความแปรปรวนของสมการ (57) สามารถหาได้ดังนี้

$$S_I^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[I[g(X_j) \leq 0] \frac{f_X(X_j)}{h_Y(X_j)} \right]^2 - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(X_i) \leq 0] \frac{f_X(X_i)}{h_Y(X_i)} \right] \quad (59)$$

และค่า Standard error คำนวณได้จาก

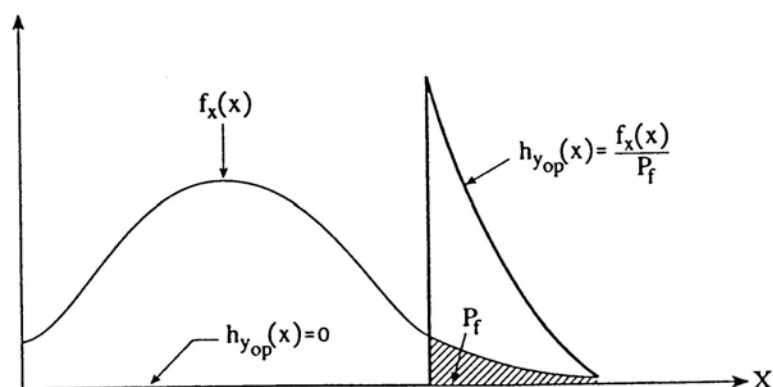
$$S_{IE} = \sqrt{\frac{S_I^2}{N}} \quad (60)$$

สำหรับการเลือก importance sampling density function จำเป็นที่จะต้องทราบค่าที่ดีหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชันที่ทำให้ค่าความแปรปรวนของคำตอบมีค่าเข้าใกล้ศูนย์มากที่สุด ดังแสดงในภาพที่ 9 เมื่อหาคำตอบจากฟังก์ชันแบบเหมาะสมที่สุดแล้ว จะให้ค่าความแปรปรวนของคำตอบมีค่าเท่ากับศูนย์และค่า

$$h_Y(X) = \frac{f_X(X)}{P_f} \quad (61)$$

และ

$$E[P_f] = \frac{1}{N} \sum P_F \quad (62)$$



ภาพที่ 9 ฟังก์ชันการสุ่มตัวอย่างสำคัญแบบเหมาะสมที่สุด กรณี 1 มิติ
ที่มา: Ouyornprasert (1988)

จากสมการ (61) และ (62) ใช้เพียง sampling point ค่าเดียวก็เพียงพอที่จะหาค่า P_f ได้แล้ว แต่ในสภาพความเป็นจริงค่า Optimum Importance Sampling function เป็นค่าที่ไม่สามารถรู้ค่าหรือหาค่าได้ก่อน ด้วยเหตุนี้จึงมีการคิดวิธีเพื่อหาทางเลือกให้ได้ค่าใกล้เคียงค่า Optimum Importance Sampling Function มากที่สุดหลายวิธีเช่น Importance Sampling Procedure Using Design Point (Bourgund and Bucher, 1986) และ Adaptive Sampling (Bucher, 1988) เป็นต้น แต่อย่างไรก็ดีรูปร่าง Importance Sampling Function ที่เลือกขึ้นมาต้องมีรูปร่างคล้ายกับ Optimum Importance Sampling Density Function เพื่อลดค่าความแปรปรวนให้เข้าใกล้ค่าศูนย์มากที่สุด

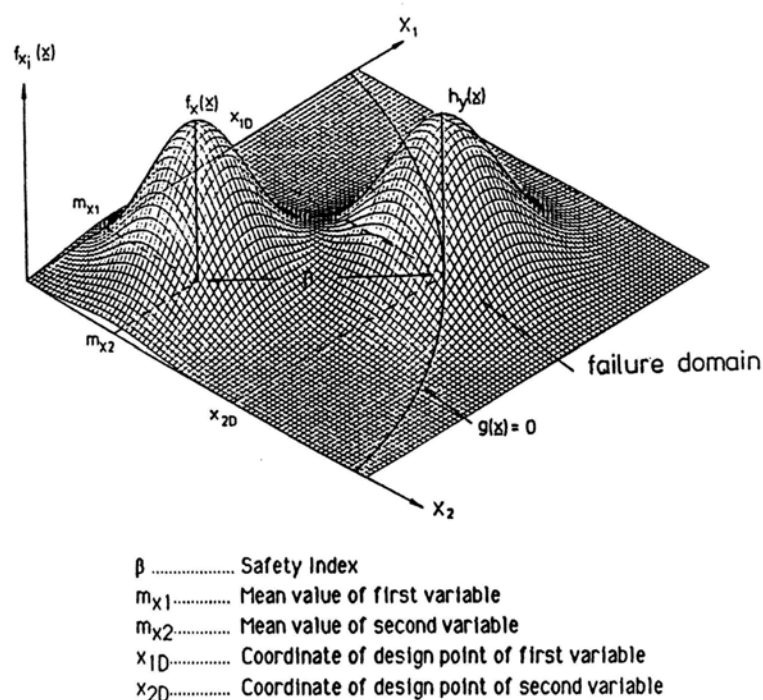
3.3.1.1 Importance Sampling Procedure Using Design Point (ISPUD)

สิ่งหนึ่งที่ต้องรู้ในเรื่องความน่าเชื่อถือของโครงสร้างก็คือ design point ซึ่งหมายถึงจุดที่อยู่บน limit state function หรือ limit state surface ($g(X)=0$) และระยะที่วัดจากจุดกำเนิด(origin) ถึงจุด design point ใน standard normal space เรียกว่า safety index ซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุด โดยที่ค่า safety index สามารถหาได้โดยการแก้ปัญหาในเรื่อง Optimization ดังแสดงในสมการ

$$\text{Minimize } \beta = (\mathbf{y}^T \mathbf{y})^{1/2} \quad (63)$$

โดย $g(X) = 0$

เมื่อ β คือ Safety index ใน standard normal space Y ซึ่งแสดงในภาพที่ 10



ภาพที่ 10 ลักษณะแบบแผนของ ISPUD

ที่มา: Bourgund และ Bucher (1986)

จากภาพที่ 10 ตัวอย่างส่วนใหญ่มักจะมาจากบริเวณรอบๆ design point ซึ่งมีค่าสั้นที่สุด และเป็นบริเวณที่ให้ค่า P_f และให้ค่าความแปรปรวนน้อยที่สุด ดังนั้นเมื่อประยุกต์สมการ (63) แล้วจะได้ค่า P_f ก่อนข้างจะมีความแม่นยำสูง

3.3.1.2 Adaptive Sampling

แนวความคิดของ Adaptive sampling เสนอโดย Bucher (1998) โดยใช้หลักการของ Iterative Monte Carlo Simulation เพื่อปรับปรุง importance sampling density function โดยอย่างน้อยที่สุดสามารถรู้ข้อมูลเบื้องต้นในเทอมของ expectation และ covariance value (first and second moment) ซึ่งแสดงได้ดังสมการ

$$E_g[Y] = E_f[Y|Y \in D_f] \quad (64)$$

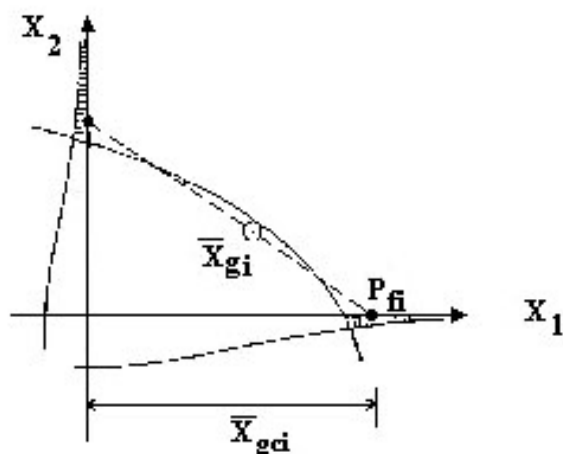
และ

$$[Y^T Y] = E_f[Y^T Y | Y \in D_f] \quad (65)$$

เมื่อ g และ f คือตัวตรวจนี้ของ joint probability density function ตามลำดับ และจากการชิมมูละชั้นเริ่มแรก ทำให้สามารถหาค่าทางขวามือของสมการ ได้ และจากผลที่ได้นี้จะนำไปปรับปรุง $g_f(Y)$ ในการชิมมูละชั้นครั้งต่อไปซึ่งถูกเรียกว่า ขั้นตอนเริ่มต้น (Starting procedure) โดยต้องมีการแปลงตัวแปรสุ่มให้อยู่ใน uncorrelated space ซึ่งจะนำไปสู่ค่าที่เรียกว่า weighted $(\bar{X}_{gi})$

$$(\bar{X}_{gi}) = \frac{P_{fi} \bar{X}_{gci}}{\sum_{i=1}^N P_{fi}} \quad (66)$$

โดยสมการข้างต้นเปรียบเสมือนกับการหาจุดศูนย์กลางถ่วงของกลุ่ม P_{fi} บนแกนของตัวแปรสุ่ม X_i ซึ่งห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ X_{gci} นั่นเอง ซึ่งอาจเรียกได้อีกชื่อว่า Mass Center of Conditional Failure Probability ดังแสดงในภาพที่ 11



ภาพที่ 11 Interpolation of starting Vector as Mass Center of Condition Failure Probabilities
ที่มา: Bucher (1988)

4. ฟังก์ชันสถานะขีดจำกัด

โครงสร้างหรือส่วนของโครงสร้าง จะไม่สามารถใช้งานหรือเกิดการวิบัติ เมื่อถึงสถานะขีดจำกัดที่จุดหนึ่ง ซึ่งความต้านทานของโครงสร้างไม่สามารถต้านทานผลจากน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อโครงสร้างได้ พฤติกรรมต่างๆ ของโครงสร้างอาจมีอิทธิพลมาจากตัวแปรสุ่มที่มีอยู่ในโครงสร้าง และการตอบสนองของโครงสร้างที่ไม่พึงปรารถนาใดๆ เช่น ระยะเวลาเกินเกินไป (เงื่อนไขของการใช้งานได้) หรือการพังทลายทั้งหมด หรือบางส่วนของโครงสร้าง (เงื่อนไขของการพังทลาย) อาจจะใช้กำหนดเป็นฟังก์ชันสถานะขีดจำกัดได้ทั้งสิ้น รูปแบบเงื่อนไขสถานะขีดจำกัดของโครงสร้างสามารถแยกออกได้เป็น 3 ประเภท (Nowak และ Collins, 2000) คือ

4.1 สถานะขีดจำกัดเชิงประลัย (Ultimate Limit States ; ULSs)

เป็นสถานะขีดจำกัดซึ่งโครงสร้าง หรือองค์ประกอบของโครงสร้างพังทลาย หรือ สูญเสียความมั่นคง เช่น เกิด buckling หรือค่าการแอ่นตัวมากกว่ากำหนด สถานะขีดจำกัดในส่วนนี้ มีความสัมพันธ์กับประสิทธิภาพสูงสุดในการรับน้ำหนักบรรทุกของโครงสร้าง

4.2 สถานะขีดจำกัดด้านการใช้งาน (Serviceability Limit States ; SLSs)

เป็นสถานะขีดจำกัดซึ่งโครงสร้าง หรือองค์ประกอบของโครงสร้างไม่ปลอดภัยสำหรับใช้งานตามปกติ หรือสูญเสียความมั่นคง เนื่องจาก มีรอยแตกร้าว มีการเคลื่อนตัว มีการสั่นสะเทือนมากเกินไป สถานะขีดจำกัดในส่วนนี้มีความสัมพันธ์กับการใช้งานตามปกติ หรือความทนทานของโครงสร้างนั้น ลักษณะตัวอย่างได้แสดงไว้ในตารางที่ 1

4.3 สถานะขีดจำกัดการล้าตัว (Fatigue Limit States ; FLSs)

เป็นสถานะขีดจำกัดซึ่งโครงสร้าง หรือองค์ประกอบของโครงสร้างไม่ปลอดภัยเมื่อกำลังรับน้ำหนักมีค่าน้อยกว่าน้ำหนักที่กระทำซ้ำๆ ในโครงสร้าง ซึ่งจะส่งผลให้โครงสร้างแตกร้าวจนกระทั่งพังทลายในที่สุด สถานะขีดจำกัดการล้าตัวขององค์ประกอบโครงสร้างได้แก่ การล้าตัวของเหล็กเสริมรับแรงดึงในโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก หรือการล้าตัวของลวดอัดแรงของในพื้นสะพานที่ใช้คอนกรีตอัดแรง เป็นต้น

ตารางที่ 1 ลักษณะตัวอย่างของสภาวะขีดจำกัดด้านการใช้งาน

สภาวะขีดจำกัดด้านการใช้งาน	ลักษณะที่เกิดขึ้น
การแตกร้าว	การเสียรูปทรง ความทนทาน
การเสียรูป	การแอ่นตัวมากเกินไปไม่เหมาะสมจะใช้งานยามปกติ
การเคลื่อนตัว	การเคลื่อนตัวสูง โครงสร้างไม่เสียหาย แต่ไม่เหมาะสมกับการใช้งาน
ความเสียหายเฉพาะที่	ความเสียหายเฉพาะแห่ง ซึ่งจะเป็นอุปสรรคต่อการใช้งาน
การสั่นสะเทือน	การสั่นมากเกินไปไม่เหมาะสมจะใช้งานยามปกติ การสั่นซึ่งแผ่ขยายไปรอบโครงสร้างผ่านฐานราก จะทำให้ไม่สะดวกสบายในการใช้งาน

ที่มา : เกรียงศักดิ์ (2534)

พฤติกรรมขององค์ประกอบของโครงสร้างอาจได้รับอิทธิพลมาจากตัวแปรสุ่มต่างๆ โครงสร้างอาจพังทลายภายใต้เงื่อนไขสภาวะขีดจำกัดแบบใดแบบหนึ่ง เช่น เงื่อนไขการใช้งานได้ หรือสภาวะขีดจำกัดด้านการใช้งาน (Serviceability Limit State) หรือสภาวะขีดจำกัดด้านความทนทาน (Durability Limit State) เป็นต้น จึงอาจนิยามฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัดได้ดังนี้

$$Z = g(X) = R - S \quad (67)$$

ถ้า $g(X) > 0$ โครงสร้างจะปลอดภัย (safe) แต่ถ้า $g(X) < 0$ โครงสร้างจะพังทลาย หรือเกิดการวิบัติขึ้น (failure) และถ้า $g(X) = 0$ โครงสร้างจะอยู่ในสภาพสมดุล คือ อยู่ระหว่างการพังทลายและความปลอดภัยพอดี ซึ่ง $g(X) = 0$ นี้สามารถเรียกได้ว่า “ผิวของการวิบัติ” (Failure Surface) หรือ “ฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัด” (Limit state function, or Performance function) (Ang และ Tang 1984, Nowak และ Collins 2000) ดังนั้นในการออกแบบโครงสร้างให้มีความปลอดภัย จึงออกแบบให้โครงสร้างมีความต้านทานของโครงสร้างมากกว่าน้ำหนักบรรทุกที่กระทำ แต่โดยปกติแล้วความต้านทานของโครงสร้าง และน้ำหนักบรรทุกที่กระทำมักเป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีค่าไม่แน่นอนซึ่งอาจเป็นสาเหตุให้ค่าความสามารถต้านทานของโครงสร้างและผลของน้ำหนักบรรทุกเปลี่ยนแปลงได้ หากความสามารถต้านทานของโครงสร้างมีค่าน้อยกว่าน้ำหนักบรรทุกที่กระทำแล้ว จะทำให้โครงสร้างอยู่ในบริเวณที่จะทำให้เกิดการวิบัติได้