

FUNCIONES ALEATORIAS

Una **variable aleatoria** se define como una función que representa gráficamente el resultado de un experimento a los números reales, esto es, $X(\omega)$, donde ω es un elemento del espacio muestral Ω .

Si la variable aleatoria es a su vez función de otra magnitud (por ejemplo, el tiempo) entonces se llama PROCESO ESTOCÁSTICO.

Más formalmente, un proceso estocástico es una función de dos variables t y ω .

$$X(t, \omega) \quad t \in T \quad y \quad \omega \in \Omega$$

Donde T es un conjunto de parámetros índice (continuos o discretos) y Ω es el espacio muestral.

Hay cuatro posibilidades para $X(.,.)$:

- | | |
|---|---|
| 1) Para cualquier t, ω | $X(t, \omega)$ es una <u>función aleatoria</u> . |
| 2) Para t variando y ω fija, $\omega = \omega_i$ | $X(t, \omega_i)$ es una función del tiempo o <u>realización</u> . |
| 3) Para ω variando y t fija, $t = t_i$ | $X(t_i, \omega)$ es una función <u>variable aleatoria</u> . |
| 4) Para t y ω fijas, $\omega = \omega_i$ y $t = t_i$ | $X(t_i, \omega_i)$ es un <u>número</u> . |

En la práctica hay magnitudes aleatorias que varían sus valores en el proceso del experimento. La magnitud aleatoria que cambia su valor en el proceso de una prueba representa una **función aleatoria**.

Se puede dar la siguiente definición general: **Se llama función aleatoria a aquella cuyo valor, para cada valor del argumento (o de los argumentos) es una variable aleatoria**.

Cada función concreta que puede ser registrada durante una sola observación de la función aleatoria se llama **realización** de la misma.

Si se repiten las pruebas se obtienen diferentes realizaciones de la función aleatoria.

NOMENCLATURA

Las funciones aleatorias se indicarán con letras latinas mayúsculas (generalmente últimas letras del alfabeto). Las realizaciones, con las minúsculas correspondientes. Con t se designará el argumento de la función aleatoria.

Es posible representar gráficamente un conjunto de realizaciones, pero no una función aleatoria.

Los argumentos de las funciones aleatorias pueden variar ininterrumpidamente en cierta zona o de un modo discreto. Los valores de la función aleatoria de un argumento discreto tienen una secuencia de magnitudes aleatorias llamadas **secuencia aleatoria**.

La función aleatoria se puede considerar como el conjunto de magnitudes aleatorias X_t que representan los valores de la misma para diferentes valores de t :

$$X_t = X(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

Esto quiere decir que la **función aleatoria es equivalente a un conjunto infinito de variables aleatorias.**

De acuerdo a la definición **el valor de una función aleatoria escalar, para cualquier valor fijado del argumento t, es una magnitud aleatoria corriente.**

Se sabe que cualquier magnitud aleatoria se caracteriza por completo por su **ley de distribución**. Por lo tanto, la característica completa del valor de la función de la función aleatoria $X(t)$, para cualquier valor fijado de t, es la densidad de probabilidad de este valor, que se designa por $f_1(x;t)$.

Aquí, el primer argumento x designa el valor posible de la función aleatoria $X(t)$ para un valor fijo de t . El segundo argumento t sirve de parámetro, del cual depende la densidad de probabilidad $f_1(x;t)$.

La densidad unidimensional de probabilidad $f_1(x;t)$. no es suficiente, en el caso general, para una característica completa de la función aleatoria. Dicha densidad puede caracterizar solamente a cualquier ordenada, tomada por aislada, de una función aleatoria.

En la práctica, cuando se puede desear hallar derivadas o integrales de funciones aleatorias, es necesario examinar valores próximos de la función (derivada) o muchos valores para un número grande de valores de t (integral).

Durante la derivación es necesario examinar las ordenadas de una función aleatoria no por aislado, sino conjuntamente. De acuerdo con lo expuesto se fijan dos valores del argumento t: t_1 y t_2 . Los valores $X(t_1)$ y $X(t_2)$ de la función aleatoria correspondientes a los valores mencionados del argumento, pueden caracterizarse por la densidad conjunta de probabilidad $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ que se llama **densidad bidimensional de probabilidad** de la función aleatoria $X(t)$.

En los problemas prácticos se encuentran con mayor frecuencia funciones aleatorias del tiempo, sin embargo, se tiene también que operar también con funciones aleatorias de otros argumentos.

De acuerdo a los conceptos de densidad bivariada, la densidad univariada queda definida por la bivariada:

$$f_1(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_2$$

La densidad bidimensional de probabilidad de una función aleatoria representa una característica más completa de la misma que la unidimensional, puesto que por la densidad bidimensional se puede determinar la unidimensional.

Pero tampoco la bidimensional es completa. Se puede seguir razonando del mismo modo hasta n dimensiones. De modo que **cada densidad de distribución posterior es una característica más completa de la función aleatoria que todas las densidades anteriores.**

Para el caso de la **función aleatoria normalmente distribuida** toda la secuencia infinita de densidades de probabilidad se determina por completo si se conoce la densidad bidimensional de probabilidad.

La característica de probabilidad completa de de una magnitud aleatoria resulta ser muy compleja. En la práctica se simplifica el trabajo, siendo necesario conocer los **momentos de primero y segundo orden.**

ESPERANZA MATEMATICA DE UNA FUNCION ALEATORIA

Fíjese el valor de t y examínese el valor de la función aleatoria (para este valor del argumento) como una magnitud aleatoria corriente. Para esta magnitud aleatoria se puede determinar la esperanza matemática, que hablando en general, dependerá del valor elegido de t . Dando a t todos los valores posibles, se obtendrá cierta función $m_x(t)$ a la cual es natural llamarla **Esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$** .

$$m_x(t) = M [X(t)]$$

La esperanza matemática de la función aleatoria se puede expresar por su densidad unidimensional de probabilidad:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x, t) dx$$

Según la definición, la esperanza matemática representa el valor medio (pesado en cuanto a probabilidad) de la magnitud aleatoria. Por lo tanto, para cada valor dado de t , la ordenada de la curva $m_x(t)$ representa el **valor medio de la función aleatoria $X(t)$ para este valor de t** .

Así, pues, la esperanza matemática de la función aleatoria no es más que una curva media alrededor de la cual se disponen las realizaciones posibles de la función aleatoria.

Ejemplo: Se dispone de una función aleatoria dada por la siguiente expresión:

$$X_{i,k} = U_i \cdot \sin\left(t_k \cdot \frac{\pi}{180} \cdot U_i\right)$$

Si U_i es un vector de elementos aleatorios tal como el que surge de **rnd(1)** valores equiprobables entre 0 y 1.

$i := 0 \dots 9$ índice que indicará realización

$U_i := \text{rnd}(1)$ Vector de elementos aleatorios

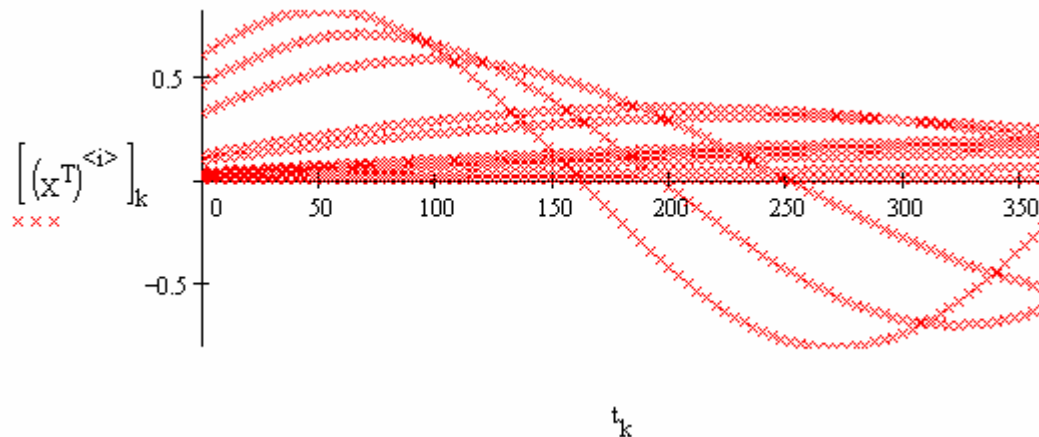
La función aleatoria será un conjunto de sinusoides con amplitud y frecuencia aleatorias.

$k := 0 \dots 90$ índice que indica valores dentro de una realización

$t_k := k \cdot 4$ vector de valores de tiempo para evaluar

$$X_{i,k} := U_i \cdot \sin\left(t_k \cdot \frac{\pi}{180} \cdot U_i + U_i\right)$$

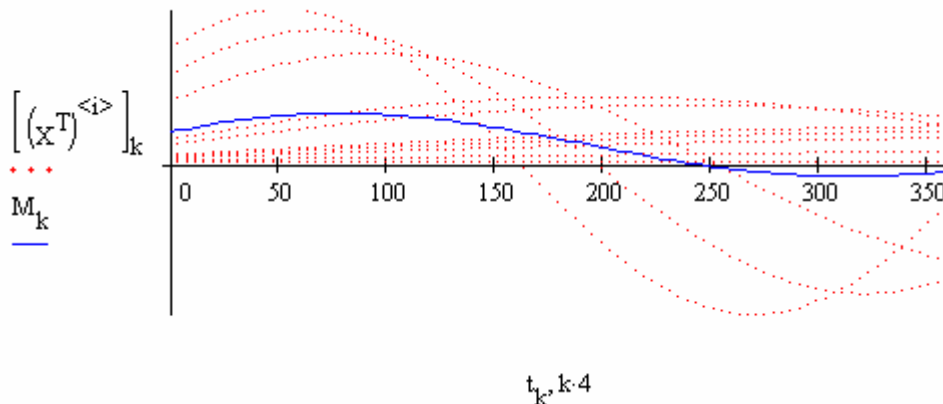
La expresión anterior corresponde a una matriz cuyas filas son **realizaciones** de la función aleatoria.



Calculando las medias de las realizaciones en cada uno de los puntos de definición, se encuentra la media de la función aleatoria.

El vector M contiene las medias en cada punto considerado de la función aleatoria

$$M_k := \text{mean}(X^{<k>})$$



DISPERSION DE UNA FUNCION ALEATORIA

Es evidente que al considerar solamente la esperanza matemática de la función aleatoria, se desprecian todas las desviaciones aleatorias posibles, reduciendo a la media todo el haz de realizaciones posibles de la función aleatoria. Importan también las **desviaciones aleatorias respecto de estos valores medios**.

Conforme a esto, para caracterizar la fluctuación de las realizaciones de una función en torno a su esperanza matemática, se puede aprovechar la **dispersión** de dicha función, la cual por definición, va expresada por la densidad unidimensional de probabilidad de la función aleatoria por la fórmula:

$$D_X(t) = M \{ [X(t) - m_X(t)]^2 \} = M \{ [X^0(t)]^2 \}$$

$$D_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t))^2 \cdot f_1(x, t) dx$$

En problemas prácticos a veces es conveniente examinar la **desviación standard** de la función aleatoria.

$$\sigma(t) = \sqrt{D_X(t)}$$

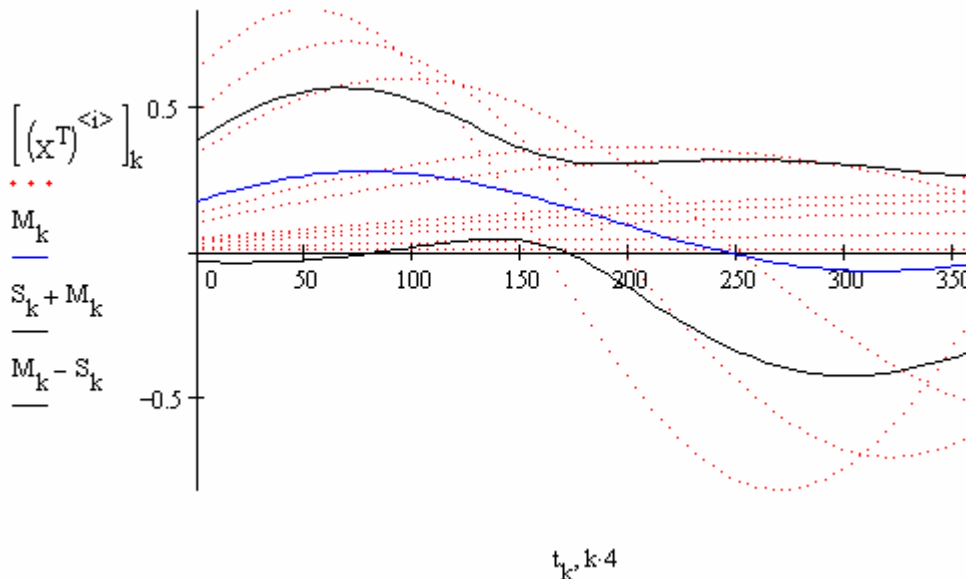
La esperanza matemática y la dispersión (varianza) de la magnitud aleatoria son características numéricas de sus valores para cada valor dado del argumento t.

Ellas en cierto modo determinan la **banda** que se llena, por las realizaciones posibles de la función aleatoria.

Ejemplo: Continuando con la función anterior, se puede hallar la desviación standard punto por punto:

$$S_k := \text{stdev}(X^{<k>})$$

el vector S contiene las desviaciones standard en cada punto considerado de la función aleatoria



FUNCION DE CORRELACION DE UNA FUNCION ALEATORIA

A pesar de lo expresado anteriormente, la esperanza matemática y la dispersión no determinan la conducta de las realizaciones posibles de la función aleatoria dentro de la banda indicada.

En las siguientes figuras se representan las realizaciones de dos funciones aleatorias con iguales esperanzas matemáticas y dispersiones. Sin embargo, estas se comportan de un modo completamente diferente.

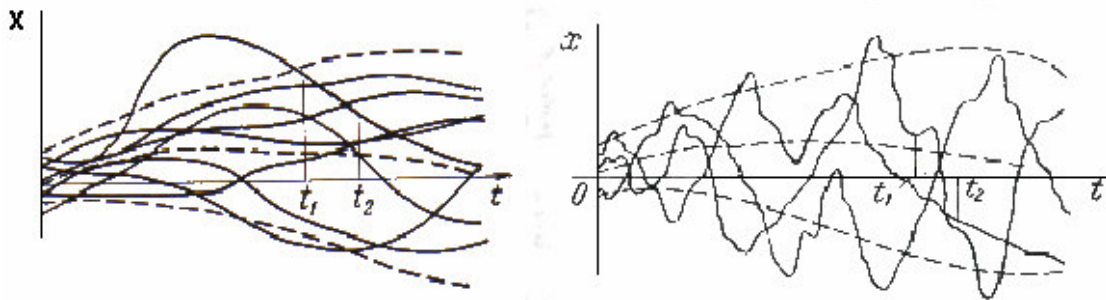
Es obvio que al derivar, por ejemplo, estas dos funciones aleatorias se obtendrán resultados absolutamente diferentes. Por eso, además de la esperanza matemática y de la

dispersión de la magnitud aleatoria, se necesita conocer el **grado de variabilidad** de sus realizaciones, la rapidez de cambio de las mismas al variar el argumento t .

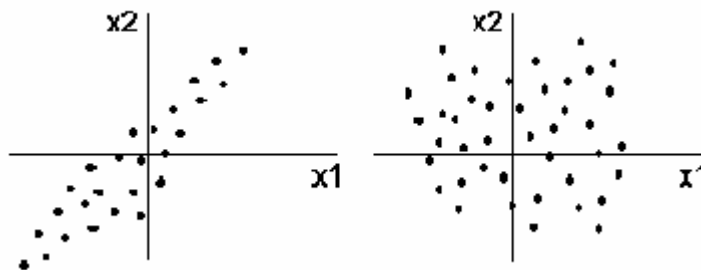
A título de ejemplo, se toman dos valores t_1 y t_2 del argumento t en los dos gráficos y se separa una realización de la función aleatoria de cada gráfico. En el primer caso, el conocimiento de la ordenada de la realización en el punto t_1 habla poco del valor de esta realización en el punto t_2 , como resultado de una gran intensidad de variación de todas las realizaciones de la función aleatoria entre los puntos t_1 y t_2 .

En el segundo gráfico, el conocimiento del valor de la realización en $t = t_1$ permite indicar más exactamente el valor posible de la realización cuando $t = t_2$.

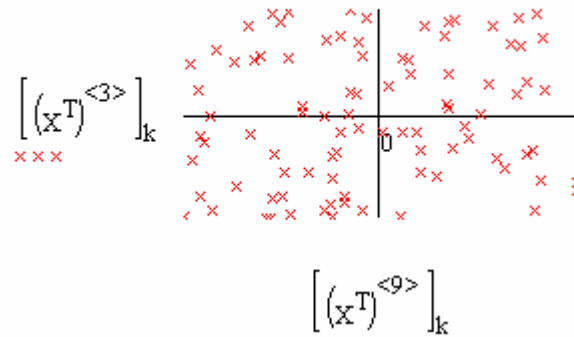
En otras palabras, en el segundo caso el conocer el valor de la realización en el punto $t = t_1$ prácticamente limita de modo considerable la gama posible de valores de las realizaciones en el punto $t = t_2$. En el primer caso, los valores de las realizaciones posibles de la función aleatoria $X(t_1)$ y $X(t_2)$ en los puntos t_1 y t_2 dependen poco uno de otro. En el segundo caso, estos están enlazados por una dependencia más fuerte.



Para ilustrar gráficamente esta tesis, se llevan al eje x_1 los valores de la ordenada aleatoria $X(t_1)$ y al eje x_2 los valores de la ordenada aleatoria $X(t_2)$. Se toma una gran cantidad de realizaciones y se marcan los puntos $[X(t_1), X(t_2)]$. Para las realizaciones de la función aleatoria, representadas en la primera figura anterior, las magnitudes aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ están vinculadas débilmente. Por eso la dispersión de los puntos $[X(t_1), X(t_2)]$ en el plano x_1 - x_2 es en este caso aproximadamente circular.



Para las realizaciones de la función aleatoria, representadas en la segunda figura, las magnitudes aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ están enlazadas por una dependencia fuerte. Por eso, para la función aleatoria cuyas realizaciones se están considerando, los puntos posibles $[X(t_1), X(t_2)]$ se dispondrán en el plano x_1 - x_2 formando una elipse alargada.



Ejemplo: Para una función aleatoria como la siguiente:

$$X_{i,k} := \text{rnd}(1) - .5$$

Para caracterizar el grado de dependencia de los valores de una función aleatoria correspondientes a dos valores diferentes del argumento, lo más simple es valerse del **momento de correlación** de estos valores de la función aleatoria.

Se llama **Función Aleatoria Centrada** a la diferencia entre la función aleatoria y su esperanza matemática:

$$X^0(t) = X(t) - m_X(t)$$

Entonces, el momento de correlación de los valores $X(t)$ y $X(t')$ de la función aleatoria $X(t)$, que corresponden a dos valores arbitrarios elegidos del argumento t , t' , se determinará por la fórmula:

$$k_X(t, t') = E[X^0(t) \cdot X^0(t')]$$

dando a t y t' todos los valores posibles en la zona de variación del argumento de la función aleatoria $X(t)$, se obtiene la función de dos variables t y t' que se denomina **Función Correlativa** (a veces **Autocorrelativa**) de la función aleatoria $X(t)$.

Así pues, se llama función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ al momento de correlación de sus valores para dos valores del argumento t, t' , considerado como una función de t y t' .

Al coincidir los valores de los argumentos $t = t'$, el segundo miembro de la fórmula anterior representa la esperanza matemática del cuadrado de la función aleatoria centrada, es decir, la **dispersión** de la función aleatoria $X(t)$.

$$k(t, t) = D_X(t)$$

Así, la asignación de la función correlativa de una función aleatoria determina también su dispersión.

En el caso más general de todos, para calcular la función correlativa de una función aleatoria se debe conocer la densidad bidimensional de probabilidad:

$$k_X(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t)) \cdot (x' - m_X(t')) \cdot f_2(x, x', t, t') \, dx \, dx'$$

De esta fórmula y de otra anterior [para calcular $m_X(t)$] se ve que para calcular ambas funciones se necesita conocer la densidad bidimensional (y por consiguiente la unidimensional) de probabilidad. Sin embargo, en muchos problemas prácticos se puede calcular $m_X(t)$ y $k_X(t, t')$ empleando métodos más simples.

A veces, para caracterizar el enlace entre los valores de una magnitud aleatoria, en vez de la función correlativa, se usa la **Función Correlativa Normada** que representa el coeficiente de correlación de los valores de la función aleatoria para dos valores del argumento.

La función correlativa normada de una función aleatoria normada de una función aleatoria $X(t)$ se determina por la fórmula:

$$R_X(t, t') = \frac{k_X(t, t')}{\sqrt{D_X(t) \cdot D_X(t')}} = \frac{k_X(t, t')}{\sqrt{k_X(t, t) \cdot k_X(t', t')}}.$$

En lo sucesivo se necesitará examinar todavía el **momento inicial de segundo orden** de una función aleatoria, el cual se determina como el momento inicial mixto de segundo orden de sus valores para los valores arbitrariamente elegidos t , t' de su argumento.

$$\Gamma_X(t, t') = M(X(t) \cdot X(t')) = k_X(t, t') + m_X(t) \cdot m_X(t')$$

De acuerdo con la definición del momento de correlación de las magnitudes aleatorias complejas, la función correlativa de una función aleatoria compleja $X(t)$ se determina por:

$$k_X(t, t') = M[X^0(t) \cdot X^0(t')^*]$$

Donde $X^0(t')^*$ es el conjugado de $X^0(t')$.

PROPIEDADES DE LAS ESPERANZAS MATEMATICAS

1) La esperanza matemática de cualquier magnitud no aleatoria es igual a la propia magnitud:

$$M(c) = c$$

2) La esperanza matemática del producto de una magnitud no aleatoria por una aleatoria es igual al producto de la primera magnitud por la esperanza matemática de la segunda.

$$M(c \cdot Z) = c \cdot M(Z)$$

3) La esperanza matemática de la suma de dos magnitudes aleatorias es igual a la suma de sus esperanzas matemáticas.

$$M(Z + Y) = M(Z) + M(Y)$$

4) La esperanza matemática de una función lineal de variables aleatorias de la forma:

$$U = \left[\sum_{i=1}^n a_i \cdot Z_i + b \right]$$

es igual a la misma función de las esperanzas matemáticas de estas magnitudes:

$$m_u = \left[\sum_{i=1}^n a_i \cdot m_{z_i} + b \right]$$

PROPIEDADES DE LAS DISPERSIONES Y DE LOS MOMENTOS DE CORRELACION

1) La dispersión de cualquier magnitud no aleatoria es igual a cero y el momento de correlación de dos magnitudes no aleatorias es igual a cero.

2) El momento de correlación del producto de cualquier magnitud aleatoria con otra no aleatoria es siempre igual a cero.

3) La dispersión del producto de una magnitud aleatoria por otra no aleatoria es igual al producto de la dispersión de la magnitud aleatoria por el cuadrado del módulo de la no aleatoria.

$$D(c \cdot X) = (|c|)^2 \cdot D(X)$$

4) El momento de correlación de las magnitudes aleatorias:

$$U = a \cdot X \quad V = b \cdot Y$$

donde **a** y **b** son constantes complejas (para generalizar) arbitrarias y **X** e **Y** son magnitudes aleatorias, se determina por la fórmula:

$$k_{uv} = a \cdot \bar{b} \cdot k_{xy}$$

5) Si las magnitudes aleatorias **U** y **V** representan funciones lineales de las magnitudes aleatorias **X₁, X₂, ..., X_n**:

$$U = \left[\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i + b \right] \quad V = \left[\sum_{i=1}^n c_i \cdot X_i + d \right]$$

entonces la dispersión de la magnitud aleatoria **U** y el momento de correlación de las magnitudes aleatorias **U** y **V** se determinan por las fórmulas:

$$D_u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot \bar{a}_j \cdot k_{ij} \quad k_{uv} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot \bar{c}_j \cdot k_{ij} \quad (48-1) \quad (1)$$

donde k_{ij} es el momento de correlación de las magnitudes aleatorias X_i, X_j (cuando $i=j$, la magnitud k_{ii} representa la dispersión de la magnitud aleatoria X_i)

6) En el caso particular, cuando se trata de magnitudes aleatorias no correlacionadas $X_1, X_2, \dots, X_n$ las magnitudes k_{ij} con distintos índices son iguales a cero y las fórmulas anteriores se convierten en:

$$D_u = \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \cdot D_i \quad k_{uv} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \bar{c}_j \cdot D_i \quad (48-2) \quad (2)$$

Donde $D_i = k_{ii}$ es la dispersión de la magnitud aleatoria X_i ($i = 1, \dots, n$)

Un caso particular de (48-1) es:

$$U = \sum_{i=1}^n X_i$$

luego:

$$D_u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij}$$

7) Y si las magnitudes aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ no están correlacionadas:

$$D_u = \sum_{i=1}^n D_i$$

Las dos últimas fórmulas son aplicables para cualesquiera magnitudes aleatorias no correlacionadas. En particular, son válidas para las magnitudes aleatorias independientes.

EJEMPLOS DE FUNCIONES ALEATORIAS

1) Se va a considerar la siguiente función aleatoria:

$$X(t) = U \cdot \sin(t) + V \cdot \cos(t) \quad (49-1) \quad (2)$$

Donde U y V son magnitudes aleatorias no correlacionadas ($k_{uv} = 0$) cuyas esperanzas matemáticas son nulas y cuyas dispersiones son iguales a $D1$ y $D2$ respectivamente.

Las realizaciones de esta función son sinusoides con diferentes amplitudes y fases iniciales.

En el ejemplo en cuestión la función aleatoria representa la combinación lineal de dos magnitudes aleatorias con los coeficientes $\sin(t)$ y $\cos(t)$.

$nr := 100$ Número de realizaciones
 $i := 0 \dots nr - 1$ índice que indica realización

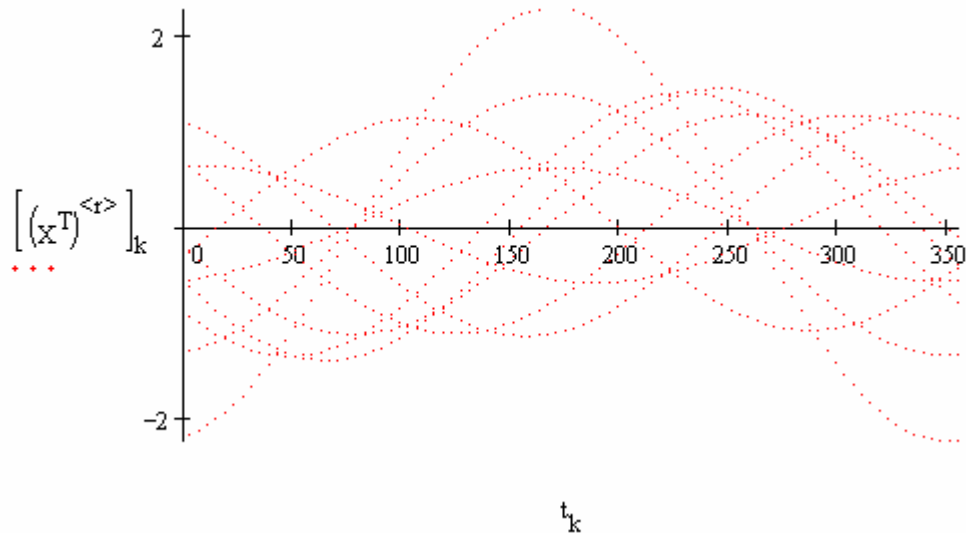
$vr := 90$ Valores dentro de una realización
 $k := 0..vr - 1$ índice que indica valores dentro de una realización
 $t_k := k \cdot 4$ vector de valores de tiempo para evaluar
 $n := 0..11$ índice auxiliar

$$U_i := \sum_n \text{rnd}(1) - 6 \qquad V_i := \sum_n \text{rnd}(1) - 6$$

U y V son vectores con valores distribuidos normalmente con media cero y varianza uno.

$$X_{i,k} := U_i \cdot \sin\left(t_k \cdot \frac{\pi}{180}\right) + V_i \cdot \cos\left(t_k \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad \text{matriz cuyas filas son valores de realización}$$

$r := 9..18$ índice para lograr 10 realizaciones en el siguiente gráfico



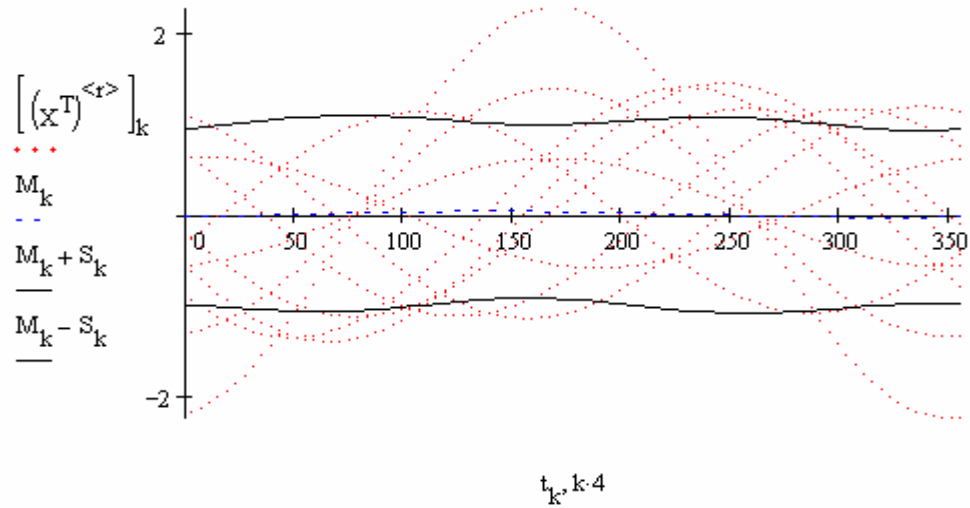
Calculando las medias de las 20 realizaciones en cada uno de los puntos de definición, se encuentra la media de la función aleatoria.

$$M_k := \text{mean}(X^{<k>}) \quad \text{el vector M contiene las medias en cada punto considerado de la función aleatoria}$$

Del mismo modo se puede hallar la desviación standard punto por punto:

$$S_k := \text{stdev}(X^{<k>}) \quad \text{el vector S contiene las desviaciones standard en cada punto considerado de la función aleatoria}$$

Superponiendo la media y la desviación standard a las realizaciones, queda gráficamente:

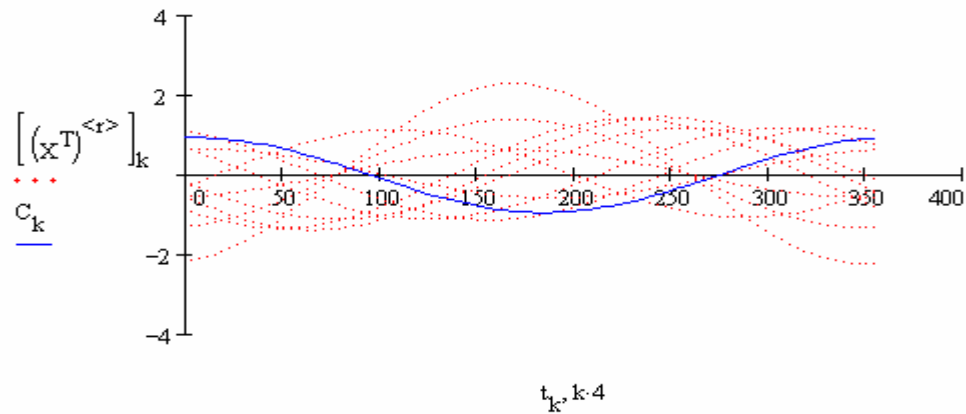


Se

gún la teoría, la media de esta función aleatoria es cero y la desviación standard es uno.

Esto, gráficamente, significa que la mayoría de las realizaciones se centra sobre la media y además se halla concentrada mayoritariamente dentro una franja que tiene un ancho de dos desviaciones standard con eje de dicha franja en la media.

Para hallar la función de correlación, se procede del siguiente modo:



$$C_k := \frac{\sum_i (X^{<0>})_i \cdot (X^{<k>})_i}{\text{rows}(X)}$$

El vector C contendrá, punto a punto, los valores

de la función de correlación, que según la teoría es una de tipo cosenoidal.

Teóricamente, aplicando una de las propiedades de la esperanza matemática a la expresión (49-1), se deduce:

$$m_X(t) = m_u \cdot \sin(t) + m_v \cdot \cos(t) = 0$$

por ser la esperanzas matemáticas, de ambas magnitudes aleatorias, nulas.

Poniendo $t = t'$ en la función aleatoria:

$$X(t') = U \cdot \sin(t') + V \cdot \cos(t')$$

Los valores $X(t)$ y $X(t')$ de la función aleatoria examinada, para dos valores arbitrarios del argumento, son combinaciones lineales de dos magnitudes aleatorias no correlacionadas U y V .

Aplicando la propiedad (48-2) de los momentos de correlación de dos combinaciones lineales de magnitudes aleatorias no correlacionadas, se halla la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$.

$$k(t, t') = D_1 \cdot \sin(t) \cdot \sin(t') + D_2 \cdot \cos(t) \cdot \cos(t')$$

En el caso particular, cuando $D_1 = D_2 = D$, queda:

$$k(t, t') = D \cdot \cos(t - t') \quad (49-2) \quad (3)$$

2) En un caso más general, cuando:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot f_i(t)$$

Donde $f_1(t), \dots, f_n(t)$ son funciones no aleatorias cualesquiera, en el caso más general complejas, y $X_1, \dots, X_n$ son magnitudes aleatorias cualesquiera con esperanzas matemáticas arbitrarias pero finitas, y momentos de segundo orden.

La esperanza matemática se halla aplicando la propiedad de las esperanzas matemáticas de una función lineal de las magnitudes aleatorias:

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^n m_{X_i} \cdot f_i(t)$$

ya que los valores de la función aleatoria que se examina son, para dos valores del argumento arbitrariamente elegidos, funciones lineales de las mismas magnitudes aleatorias, se puede aplicar la propiedad (48-1):

$$k_X(t, t') = \sum_{i=1}^n k_{ij} \cdot f_i(t) \cdot f_j(t')$$

donde k_{ij} es el momento de correlación de las magnitudes aleatorias X_i, X_j ($i, j = 1, \dots, n$ y $k_{ji} = D_{X_i}$).

2) Generalizando el problema 1, suponer aleatorias no sólo la amplitud y la fase sino

también la frecuencia de las oscilaciones armónicas. Examínese la función aleatoria:

$$X(t) = U \cdot \sin(\Omega \cdot t) + V \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

Donde U , V y Ω son magnitudes aleatorias independientes, con la particularidad que las magnitudes U y V tienen medias nulas y las mismas dispersiones D , y la magnitud aleatoria Ω se caracteriza por la densidad de probabilidad $f(\omega)$.

La esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ es idénticamente igual a cero. Esto se puede demostrar fijando un valor particular de Ω , lo que lleva al primer ejemplo.

La fórmula (49-2) determina la función correlativa condicional de la función aleatoria $X(t)$ para el valor dado de ω de la frecuencia Ω .

$$k_X(t, t' / \omega) = M[X(t) \cdot X(t') / \Omega = \omega] = D \cdot \cos[\omega \cdot (t - t')]$$

Ahora, para hallar la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ basta multiplicar la función correlativa condicional hallada, con el elemento correspondiente de probabilidad $f(\omega) \cdot d\omega$ e integrar con respecto a todos los valores posibles de ω de la magnitud aleatoria Ω . Entonces, teniendo en cuenta que la frecuencia de las oscilaciones es, en su esencia, una magnitud positiva, debido a lo cual su densidad de probabilidad $f(\omega)$ es igual a cero para $\omega < 0$, se obtiene:

$$k_X(t, t') = D \cdot \int_0^{\infty} f(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot (t - t')) d\omega$$

Examínese el caso concreto cuando:

$$f(\omega) = \frac{2 \cdot \alpha}{\pi \cdot (\alpha^2 + \omega^2)}$$

En este caso queda:

$$k_X(t, t') = \frac{2 \cdot \alpha \cdot D}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega \cdot (t - t'))}{(\alpha^2 + \omega^2)} d\omega$$

Esta integral puede calcularse por muchos procedimientos, quedando:

$$k_X(t, t') = D \cdot e^{-\alpha \cdot |t - t'|} \quad (4)$$

Numéricamente, el planteo del problema podría ser:

$$\alpha := 10 \quad \text{coeficiente}$$

$$f(\omega) := \frac{2 \cdot \alpha}{\pi \cdot (\alpha^2 + \omega^2)} \quad (5)$$

función densidad de la distribución de frecuencias

La integral de esta función dará la Función Distribución:

$$F(\omega) := 2 \cdot \frac{\text{atan}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}{\pi}$$

Si en esta función se sustituye $F(\omega)$ por $\text{rnd}(1)$ y se despeja ω se puede tener un conjunto de valores que tengan la distribución (5).

$j := 0 \dots 400$ índice que dará el tamaño del vector formado

$$W_j := \alpha \cdot \tan\left(\frac{\text{rnd}(1) \cdot \pi}{2}\right) \quad \text{vector}$$

para verificar este hecho se construirá un histograma.

$n1 := 8$ número de intervalos

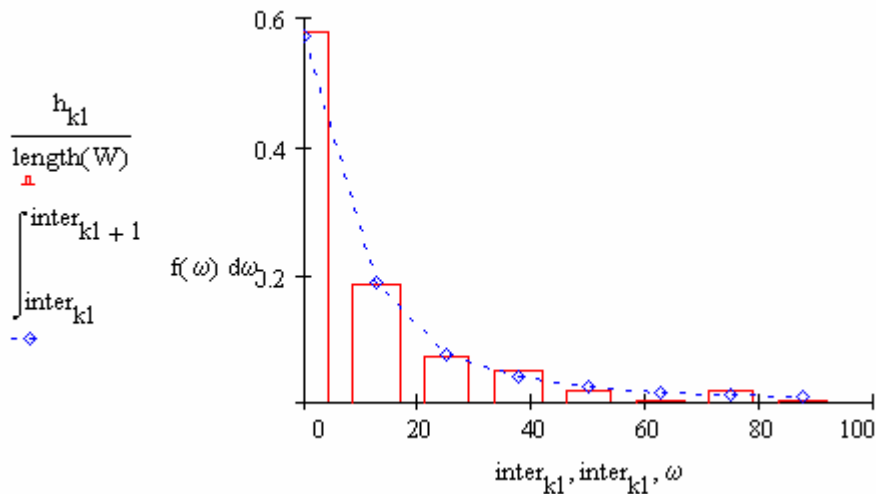
$k2 := 0 \dots n1$ índice para generar $n1$ intervalos

$\text{Max} := 100$ $m := 0$ Extremos del intervalo de análisis

$\text{inter}_{k2} := m + \frac{\text{Max} - m}{n1} \cdot k2$ vector de intervalos

$h := \text{hist}(\text{inter}, W)$ vector que cuenta las frecuencias en cada intervalo

$k1 := 0 \dots n1 - 1$ índice auxiliar $\omega := 0, 0.1 \dots 100$



Como se puede observar, la distribución de los datos sigue perfectamente la ecuación (5).

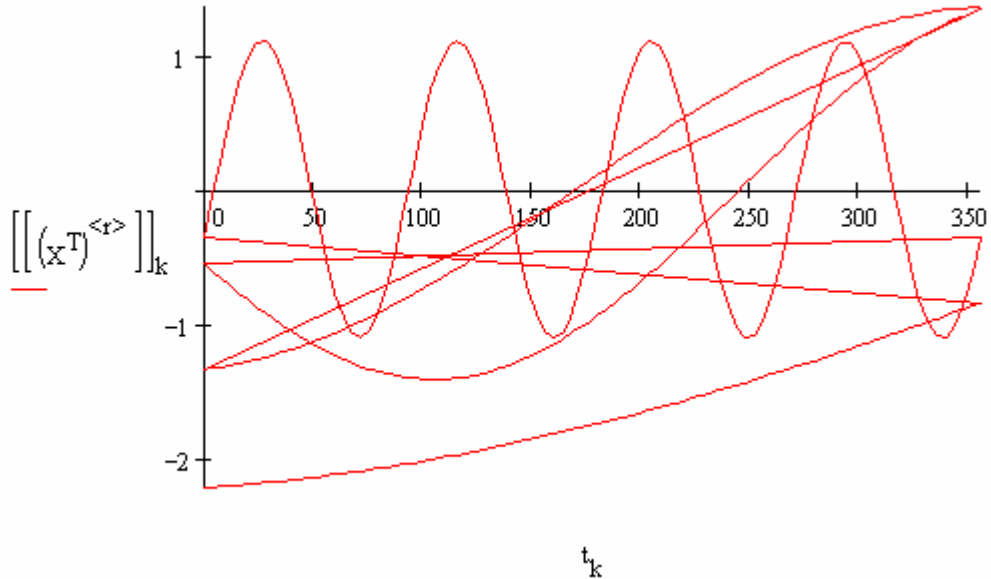
Formando la matriz cuyas filas son valores de realización:

$\text{nr} := 100$ Número de realizaciones

$i := 0 \dots nr - 1$ índice que indica realización
 $vr := 90$ Valores dentro de una realización
 $k := 0 \dots vr - 1$ índice que indica valores dentro de una realización
 $t_k := k \cdot 4$ vector de valores de tiempo para evaluar

$$X_{i,k} := U_i \cdot \sin\left(\frac{W_i}{\alpha} \cdot t_k \cdot \frac{\pi}{180}\right) + V_i \cdot \cos\left(\frac{W_i}{\alpha} \cdot t_k \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$r := 9 \dots 12$ índice para lograr 4 realizaciones en el siguiente gráfico



Calculando las medias de las 20 realizaciones en cada uno de los puntos de definición, se encuentra la media de la función aleatoria.

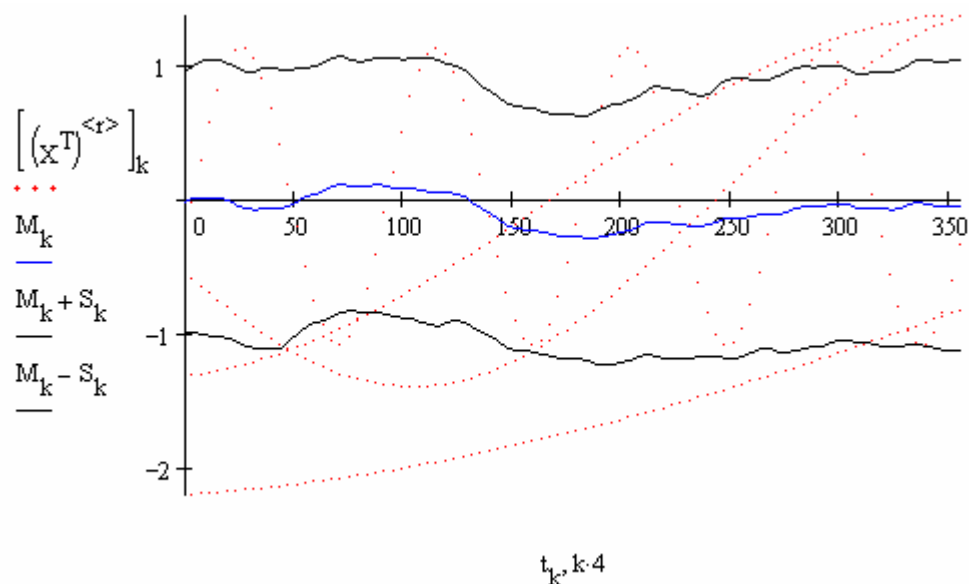
El vector M contiene las medias en cada punto considerado de la función aleatoria

$$M_k := \text{mean}(X^{<k>})$$

Del mismo modo se puede hallar la desviación standard punto por punto:

$$S_k := \text{stdev}(X^{<k>})$$

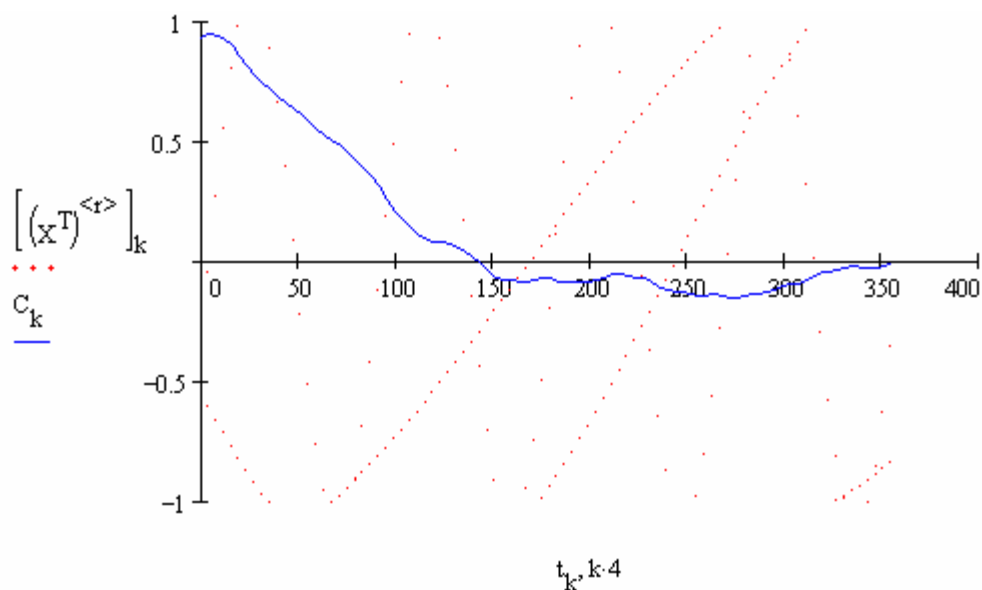
el vector S contiene las desviaciones standard en cada punto considerado de la función aleatoria Superponiendo la media y la desviación standard a las realizaciones, queda gráficamente:



Para hallar la función de correlación, se procede del siguiente modo:

$$C_k := \frac{\sum_i (X^{<0>})_i \cdot (X^{<k>})_i}{\text{rows}(X)}$$

El vector C contendrá, punto a punto, los valores de la función de correlación, que según la teoría es una de tipo exponencial decreciente.



FUNCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS

Generalmente se llama estacionarios a aquellos procesos y objetos cuyas características **no dependen del tiempo de observación**, es decir no cambian al decalar

arbitrariamente el tiempo (son **invariantes con respecto a cualquier decalaje del tiempo**).

De acuerdo con lo dicho, se denomina **ESTACIONARIA** a una función aleatoria $X(t)$ si determinadas características probabilísticas de la función de la función aleatoria $X(t+\Delta)$, cualquiera sea Δ , coincide idénticamente con las características correspondientes a $X(t)$.

Es evidente que **la esperanza matemática y la dispersión de la función aleatoria estacionaria son constantes y su función correlativa depende sólo de la diferencia de los argumentos $t - t'$** .

En efecto, según la definición general de la estacionariedad, la esperanza matemática y la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ satisfacen las condiciones:

$$m_X(t) = m_X(t + \Delta) \quad k_X(t, t') = k_X(t + \Delta, t' + \Delta)$$

cualquiera sea Δ . Poniendo en la primera $\Delta = -t$ se obtiene:

Poniendo en la segunda $\Delta = -t'$ se obtiene:

$$k_X(t, t') = k_X(t - t', 0)$$

La dispersión de la función aleatoria $X(t)$ es igual al valor de su función correlativa cuando $t = t'$.

Por eso, de lo anterior:

$$D_X(t) = k_X(t, t) = k_X(0, 0) = D_X(0) = \text{cte}$$

Designando la función de una variable $t - t'$ por $k_X(t - t')$, se puede escribir:

$$k_X(t, t') = k_X(t - t') = k_X(\tau) \quad \text{donde} \quad \tau = t - t'$$

Ahora bien, si la función aleatoria $X(t)$ es estacionaria, entonces, dondequiera que se elija un intervalo τ de longitud dada en el eje de las variables independientes t , los valores de la función aleatoria $X(t)$ tienen en los extremos de este intervalo un mismo momento de correlación $k_X(\tau)$.

Para todos los problemas prácticos en los que se trata sólo con momentos de los dos primeros órdenes (esperanzas matemáticas y funciones correlativas) basta la constancia de la esperanza matemática y la dependencia de la función de correlación sólo de la diferencia de los argumentos para considerar estacionaria a una función aleatoria.

Por eso, **las funciones aleatorias cuyas esperanzas matemáticas son constantes y las funciones correlativas dependen sólo de la diferencia de argumentos se llaman estacionarias en el sentido amplio**.

La estacionariedad en el sentido amplio representa el tipo más simple de estacionariedad.

Según la definición dada, la función aleatoria con esperanza matemática variable es no estacionaria incluso si la función de correlación de la misma depende sólo de la diferencia de los argumentos.. Sin embargo, tal estacionariedad es, evidentemente no esencial, puesto que la función aleatoria centrada $\mathbf{X}^0(\mathbf{t}) = \mathbf{X}(\mathbf{t}) - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ es estacionaria siempre que la función correlativa de la función aleatoria $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ dependa sólo de la diferencia de argumentos.

Como la función correlativa de cualquier función aleatoria es simétrica, es decir no cambia de valor al permutar los valores de los argumentos, entonces la función correlativa de una función aleatoria estacionaria satisface la condición:

$$k_{\mathbf{X}}(\mathbf{t} - \mathbf{t}') = k_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}' - \mathbf{t}) \quad \text{o bien} \quad k_{\mathbf{X}}(\tau) = k_{\mathbf{X}}(-\tau)$$

Así pues, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria es función par de la diferencia de los argumentos.

Por otro lado, de las propiedades de la función correlativa, aplicadas a funciones aleatorias estacionarias:

$$|k_{\mathbf{X}}(\tau)| \leq k_{\mathbf{X}}(0) = D_{\mathbf{X}}$$

De modo que, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, cualquiera sea τ , no puede ser en magnitud absoluta, mayor que su valor correspondiente en el origen de coordenadas.

Ejemplos:

1) En el último ejemplo anterior, había una función correlativa dependiente sólo de la diferencia de argumentos, de la forma:

$$k_{\mathbf{X}}(\tau) = D_{\mathbf{X}} \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|} \quad \text{donde} \quad \tau = \mathbf{t} - \mathbf{t}'$$

2) La función aleatoria:

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{U} \cdot \sin(\omega \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{V} \cdot \cos(\omega \cdot \mathbf{t})$$

es estacionaria solamente en el caso cuando las dispersiones de las magnitudes aleatorias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son iguales. En el caso general de diferentes dispersiones de las magnitudes aleatorias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ esta función aleatoria no es estacionaria.

Ahora bien, la oscilación armónica de cierta frecuencia, con amplitud y fase aleatorias representa en el caso general una función aleatoria no estacionaria y solo en el caso particular de ser iguales las dispersiones de los coeficientes aleatorios adjuntos al seno y coseno, es una función aleatoria estacionaria.

3) La función aleatoria:

$$X(t) = U \cdot \sin(\Omega \cdot t) + V \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

es estacionaria cualquiera que sea la densidad de probabilidad de la frecuencia aleatoria de las oscilaciones $f(\omega)$ puesto que su esperanza matemática es idénticamente igual a cero, mientras que la función correlativa, determinada por (4) depende sólo de la diferencia de argumentos.

4) Si:

$$m_X(t) = a + b \cdot t \quad k_X(t, t') = D \cdot e^{-\alpha \cdot (|t - t'|)}$$

entonces la función aleatoria $X(t)$ es no estacionaria. No obstante, esta no estacionariedad no es esencial, puesto que la correspondiente función aleatoria $X^0(t)$ es estacionaria.

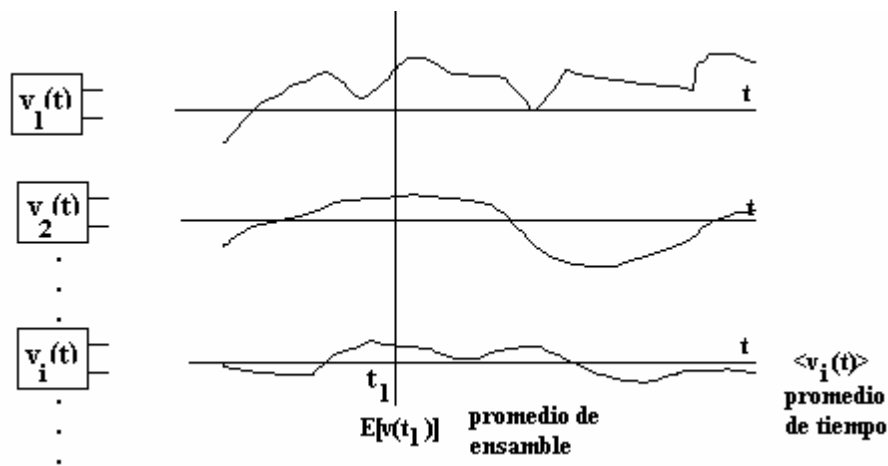
SEÑALES ALEATORIAS

Las señales aleatorias son manifestaciones de procesos eléctricos aleatorios que ocurren en el tiempo.

Si $v(t)$ es una señal aleatoria, V es una variable aleatoria que representa los valores de $v(t)$ en los tiempos de observación.

Bajo ciertas condiciones, se denomina **ergodicidad** a una relación comprensible de manera intuitiva, entre los promedios estadísticos y los promedios de tiempo que serán obtenidos.

Sea $v(t)$ la forma de onda de tensión producida por algún generador de ruido, de tal manera que $v(t)$ es una señal aleatoria de potencia promedio finita. Si se examina la forma de onda durante un período largo, se pueden medir o calcular sus diferentes **promedios de tiempo**. Además el significado de estos promedios es aparente: $\langle v(t) \rangle$ es la **componente de continua** del ruido y $\langle v^2(t) \rangle$ es su **potencia promedio**.



$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \quad \langle v(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt$$

Por otro lado, supóngase que se pudiera disponer de un gran número de generadores idénticos, lo que se conoce como **ensamble**. Los miembros del ensamble son idénticos en el sentido de que tienen la misma descripción estadística; si importar que sus señales individuales - conocidas como **funciones muestra** - sean diferentes. Una señal en particular, designada ahora $v_i(t)$ para claridad, es una de la infinidad de funciones muestra que un determinado generador de ruido puede producir. La familia completa de funciones muestra se simbolizará con $v(t)$.

En la figura se puede apreciar las dos clases de promedios que se pueden hallar:

- 1) Se pueden efectuar mediciones sucesivas en una función muestra $v_i(t)$ para encontrar sus promedios de tiempo $\langle v_i(t) \rangle$
- 2) Se pueden examinar todas las funciones muestra durante un tiempo particular, por ejemplo t_1 , y encontrar los **promedios de ensamble** $E[v(t_1)]$.

Obviamente, los promedios de ensamble son los mismos que los promedios estadísticos en $t = t_1$.

En general, los promedios de ensamble pueden diferir de los promedios de tiempo. Esto ocurre cuando las propiedades estadísticas de los generadores varían en el tiempo, ya que la variación en el tiempo sería promediada en el tiempo y no en el ensamble.

Sin embargo, muchas de las señales aleatorias en sistemas de comunicaciones provienen de **procesos ergódicos**, significando esto que los promedios de tiempo y de ensamble son idénticos. O sea, $E[v(t)] = \langle v(t) \rangle$.

Un proceso ergódico es también **estacionario** puesto que los promedios de ensamble son independientes del tiempo de observación.

En lo sucesivo se tratará con señales aleatorias que son funciones muestra de procesos ergódicos. Por lo que estas señales son **de potencia**, ya que $E[v^2(t)]$ no depende de t , y se pueden hacer los siguientes enunciados:

- 1) El valor medio $\bar{v}$ es la **componente de continua** (CD) de la señal.
- 2) El valor medio al cuadrado es la potencia de la componente de continua, llamada **potencia de CD**.

$$\bar{v}^2$$

$$\overline{v^2}$$

- 3) El valor cuadrado medio es la **potencia promedio total**.
- 4) La varianza σ_v^2 es la potencia de la componente variando con el tiempo, es decir, la

potencia de CA.

5) La desviación standard σ_v es la raíz cuadrática media (valor eficaz) de la componente variando con el tiempo, es decir, el **valor rms**.

Las relaciones anteriores sólo se aplican a fuentes ergódicas.

CORRELACION

Dos son los motivos para considerar la **función de autocorrelación** de una señal aleatoria:

- 1) a $\mathbf{R}_v(\tau)$ le corresponde proporcionar información útil acerca de $\mathbf{v}(t)$.
- 2) según el teorema de Wiener-Kinchine, la descripción del dominio de la frecuencia de una señal aleatoria es su densidad espectral de potencia $\mathbf{G}_v(f) = \mathbf{F}[\mathbf{R}_v(\tau)]$.

Se va a plantear ahora cómo se puede interpretar $\mathbf{R}_v(\tau)$ cuando $\mathbf{v}(t)$ es aleatoria. Primero se define el **producto escalar** de dos señales aleatorias ergódicas como:

$$\langle v(t), w(t) \rangle = E[v(t) \cdot \overline{w(t)}]$$

por consiguiente, la norma al cuadrado es:

$$\|v\|^2 = E[|v(t)|^2]$$

De manera similar se define:

$$R_{vw}(\tau) = E[v(t) \cdot \overline{w(t - \tau)}]$$

También llamada **correlación cruzada**.

Ergodicidad implica que son intercambiables los promedios de tiempo y de ensamble. Por lo que, considerando real a $\mathbf{v}(t)$, su autocorrelación es:

$$R_v(\tau) = E[v(t) \cdot v(t - \tau)] = \langle v(t) \cdot v(t - \tau) \rangle$$

en la cual la segunda expresión es un promedio de tiempo y no un producto escalar (no va la coma). Se debe notar que $\mathbf{R}_v(\tau)$ es una función determinística aún cuando $\mathbf{v}(t)$ es aleatoria.

Obviamente, todas las propiedades matemáticas adjudicadas a $\mathbf{R}_v(\tau)$ también se aplican a la autocorrelación de señales aleatorias. En particular

$$\begin{aligned} R_v(-\tau) &= R_v(\tau) \\ R_v(0) &= \overline{v^2} = \sigma_v^2 + \bar{v}^2 \geq |R_v(\tau)| \end{aligned}$$

de tal manera que $\mathbf{R}_v(\tau)$ es una función par con un máximo en $\tau=0$. Además es verdad que: en el caso en que el proceso es no periódico, de serlo su autocorrelación también es

periódica con el mismo período.

3 - Ejemplo: Sinusoide en fase aleatoria

Sea la siguiente señal aleatoria:

$$v(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Gamma) \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f$$

A y ω_0 son constantes y Γ es una variable aleatoria con densidad de probabilidad uniforme.

$$p(\gamma) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \quad -\pi \leq \gamma \leq \pi \quad i := 0 \dots 999 \quad \text{índice para los valores}$$

$$\Gamma_i := 2 \cdot \pi \cdot (\text{rnd}(1) - 0.5) \quad \text{conjunto de valores aleatorios (entre } -\pi \text{ y } +\pi) \text{ con distribución uniforme}$$

$$n := 9 \quad \text{número de intervalos}$$

$$k := 0 \dots n \quad \text{índice para generar n intervalos}$$

$$m := -\pi \quad M := \pi \quad \text{Extremos del Intervalo}$$

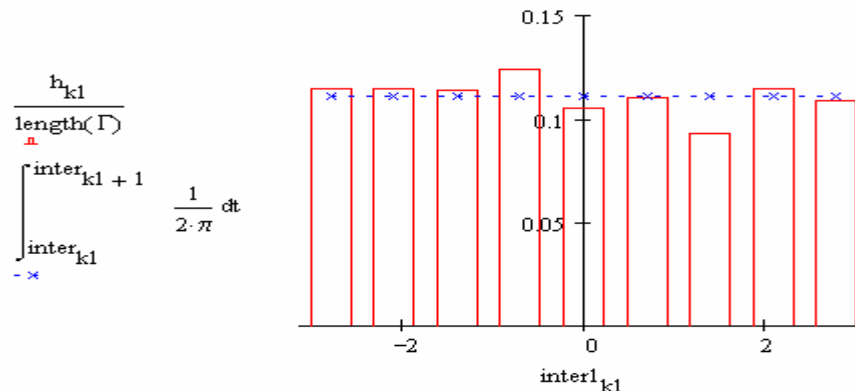
$$\text{inter}_k := m + \frac{M - m}{n} \cdot k \quad \text{vector de intervalos}$$

$$h := \text{hist}(\text{inter}, \Gamma) \quad \text{vector que cuenta las frecuencias en cada intervalo}$$

$$k1 := 0 \dots n - 1 \quad \text{índice auxiliar}$$

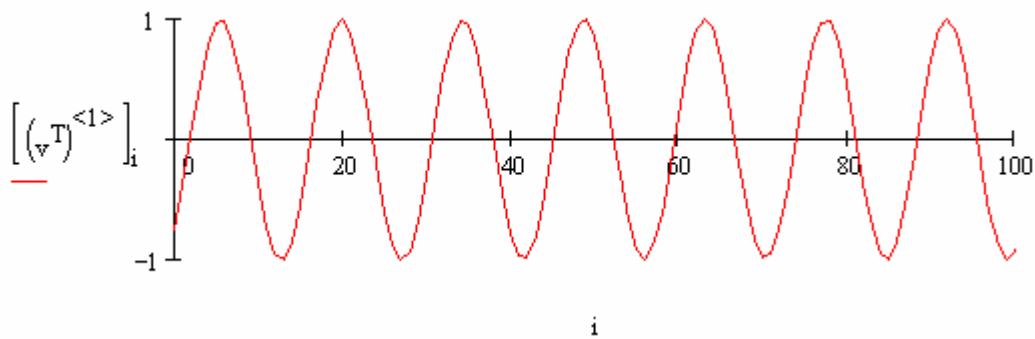
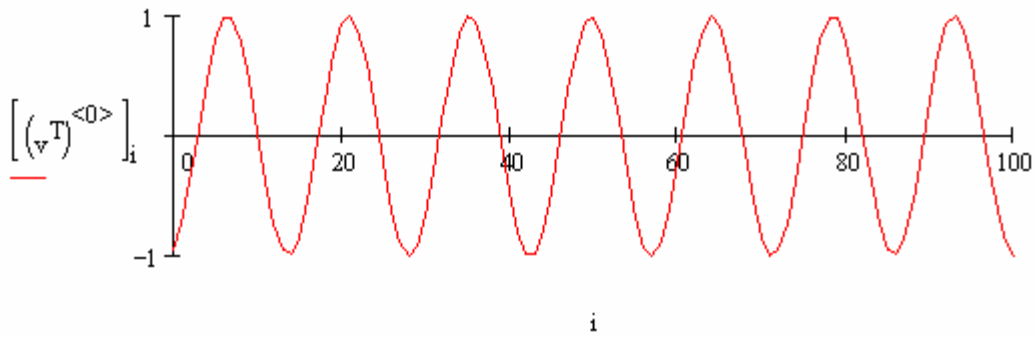
$$\text{inter1}_{k1} := \text{inter}_{k1} + \frac{\text{inter}_{k1+1} - \text{inter}_{k1}}{2}$$

gráficamente:



La línea de cruces indica los valores esperados en cada intervalo. La señal aleatoria se puede generar del siguiente modo:

$A := 1$ $\omega_0 := 25$ $n := 10$ constantes
 $i := 0 \dots 2^n - 1$ $j := 0 \dots 5$ índices para variación de t y número de realización.
 $v_{j,i} := A \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot i \cdot \frac{\pi}{180} + \Gamma_j\right)$ señal aleatoria



Según la teoría:

$$v(t - \tau) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t - \tau) + \Gamma) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + \Gamma)$$

$$R_v(\tau) = E\left(A^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Gamma) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + \Gamma)\right)$$

$$R_v(\tau) = E\left(\frac{A^2}{2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) + \frac{A^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + 2 \cdot \Gamma)\right)$$

$$E(\cos(\omega_0 \cdot \tau)) = \cos(\omega_0 \cdot \tau)$$

$$E(\cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + 2 \cdot \Gamma)) = \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + 2 \cdot \Gamma) \cdot p(\gamma) \, d\gamma$$

$$E(\cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + 2 \cdot \Gamma)) = \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + 2 \cdot \Gamma) \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \, d\gamma = 0$$

Luego:

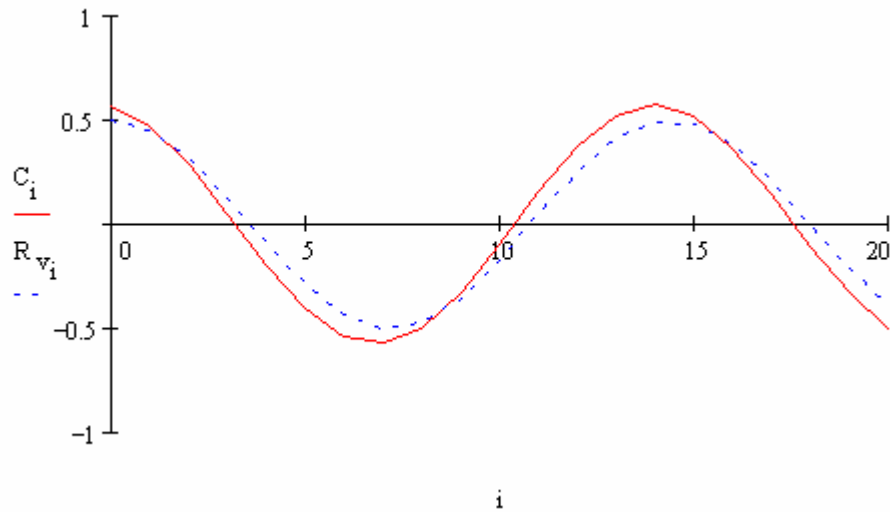
$$R_v(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)$$

Para hallar la función de correlación, se procede del siguiente modo:

$$C_i := \frac{\sum_j (v^{<0>})_j \cdot (v^{<i>})_j}{\text{rows}(v)}$$

El vector C contendrá, punto a punto, los valores de la función de correlación, que según la teoría es una de tipo cosenoidal.

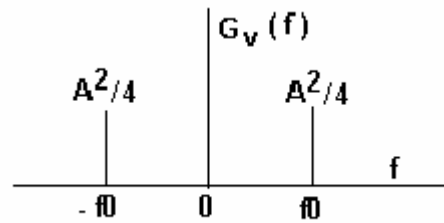
$$R_{v_i} := \frac{A^2}{2} \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot i \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$



La línea punteada es la función de autocorrelación esperada.

La Transformada de Fourier da entonces una densidad espectral de potencia del tipo impulsivo.

$$G_v(f) = \frac{A^2}{4} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \cdot \delta(f + f_0)$$



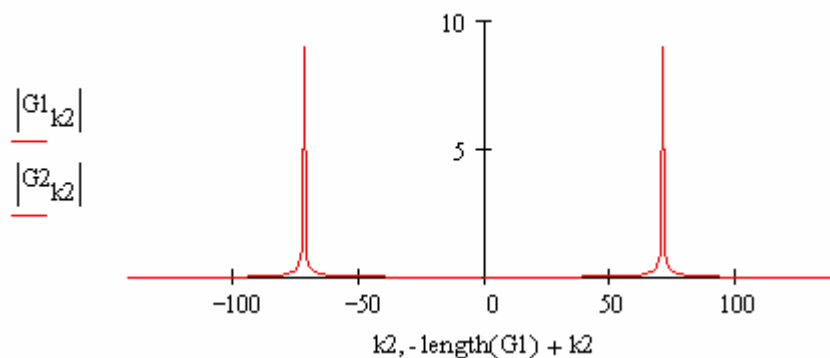
En forma aproximada:

$$G1 := \text{fft}(C) \quad k2 := 0 \dots \text{length}(G1) - 1$$

$$G2_{k2} := G1_{\text{length}(G1) - 1 - k2}$$

Para determinar $f0$ (en forma aproximada referido al índice), se recurre a:

$$f0 := \frac{\omega0 \cdot 2^{n-1}}{180} \quad f0 = 71.111$$



aquí se pueden apreciar los dos impulsos ubicados en $f0 = \omega0 / 2\pi$ y $f0 = -\omega0 / 2\pi$.

Esta señal aleatoria tiene cantidades específicas de potencia promedio concentradas en $f = f0$ y $f = -f0$ y no hay densidad espectral en ninguna otra parte.

Además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f) df = \frac{A^2}{2} = \overline{v^2}$$

que se ve que es igual a la **potencia promedio total**.

$$\overline{v^2} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (A \cdot \cos(\omega0 \cdot t + \Gamma))^2 dt$$

Para hallar este valor, no hay problema de considerar $\Gamma = 0$ y $T = 2\pi$. El valor

subintegral es:

$$F(t) = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot t \right)}{\omega_0} \cdot A^2$$

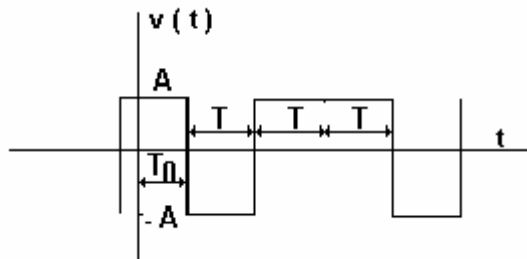
Luego el valor buscado es:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot (F(2 \cdot \pi) - F(0)) = \frac{A^2}{2}$$

Por último, el hecho que no hay impulso en $f = 0$ concuerda con:

$$\overline{v} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Gamma) dt = 0$$

Ejemplo: **Onda Binaria Aleatoria**



Durante cualquier intervalo $(n-1) \cdot T < t - T_0 < n \cdot T$ $v(t)$ adquiere los valores A y $-A$.

Estas dos amplitudes tienen igual probabilidad y la amplitud en uno cualquiera de los intervalos es independiente de todos los otros. El término T_0 es una variable aleatoria sobre el ensamble (realización) distribuido de manera uniforme sobre $[0, T]$.

Para encontrar la autocorrelación, considérese primero el caso $|\tau| > T$, así para cada función muestra $v(t)$ y $v(t-\tau)$ están en intervalos diferentes y por lo tanto **son independientes**. Así:

$$E[v(t) \cdot v(t - \tau)] = \overline{v(t)}^2 = 0$$

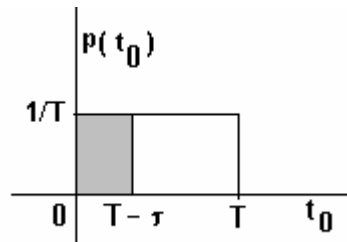
Ahora considérese $|\tau| < T$ y hágase $t = 0$, entonces $v(0)$ y $v(-\tau)$ están en el mismo intervalo sólo si $T_0 - T < -|\tau|$. Así:

$$E [v (0) \cdot v (- \tau)] = \begin{cases} A^2 & \text{si } T_0 < T - |\tau| \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La probabilidad de que $T_0 < T - |\tau|$ es

$$P(T_0 < T - |\tau|) = \int_0^{T - |\tau|} \frac{1}{T} dt_0 = \frac{T - |\tau|}{T}$$

Ya que la densidad de probabilidad para T_0 es uniforme en el intervalo $[0, T]$



De tal manera que:

$$E(v(0) \cdot v(-\tau)) = A^2 \cdot P(T_0 < T - |\tau|) = A^2 \cdot \frac{T - |\tau|}{T}$$

Por el mismo razonamiento para cualquier t :

$$R_v(\tau) = E [v (t) \cdot v (t - \tau)] = \begin{cases} A^2 \cdot (1 - |\tau|/T) & \text{si } T_0 < T - |\tau| \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

O bien: $R_v(\tau) = A^2 \cdot \Delta(\tau/T)$, donde $\Delta(\tau/T)$ es la **función triángulo**.

Para hallar la **densidad espectral de potencia**:

$$G_v(\tau) = F [A^2 \cdot \Delta(\tau/T)]$$

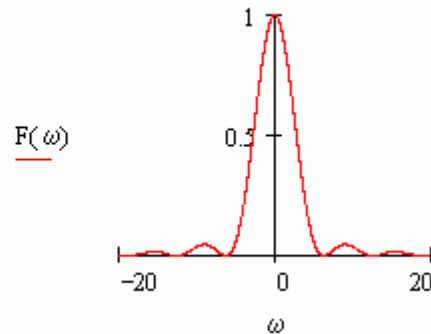
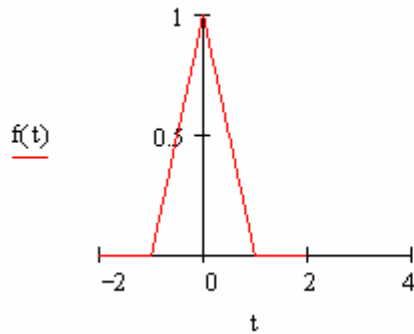
se debe echar mano al par transformado:

$$T := 1 \quad A := 1$$

$$f(t) := \text{if } |t| < T, \left[A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{T} \right), 0 \right] \quad \Longleftrightarrow \quad F(\omega) := 4 \cdot A^2 \cdot \frac{\sin^2\left(T \cdot \frac{\omega}{2}\right)}{T \cdot \omega^2}$$

$$\omega := -\frac{20}{T}, -\frac{20}{T} + 0.01 \dots \frac{20}{T}$$

$$t := -2 \cdot T, -2 \cdot T + 0.01 \dots 2 \cdot T$$



Operando sobre la transformada:

$$4 \cdot A^2 \cdot \frac{\sin\left(T \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{2}\right)^2}{T \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \cdot \frac{T}{T} = A^2 \cdot T \cdot \frac{\sin(T \cdot \pi \cdot f)^2}{(\pi \cdot f T)^2} \quad G_v(f) = A^2 \cdot \frac{\sin(T \cdot \pi \cdot f)^2}{(\pi \cdot f T)^2}$$

En forma aproximada:

$A := 1$ $T := 20$ $t := 1 \dots 255 + T$ $m := 200$ número de realizaciones

$w := 0 \dots m - 1$ índice para el número de realización

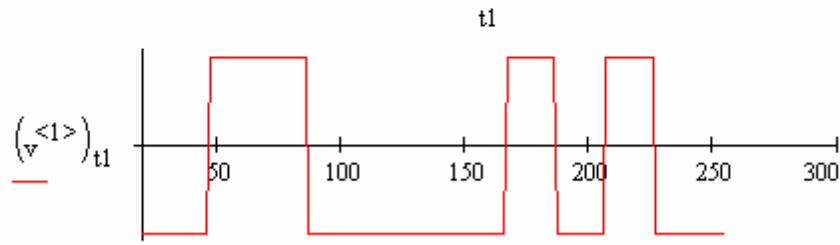
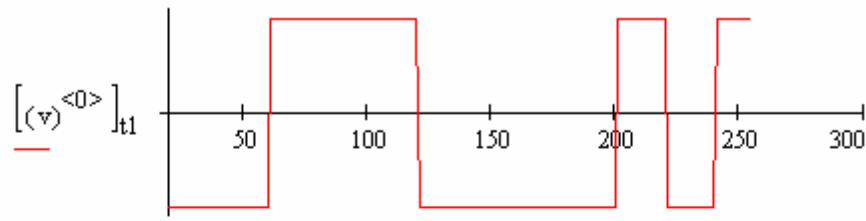
$T0_w := \text{floor}(T \cdot \text{rnd}(1))$ T_0 distribuido uniformemente

$x_{t,w} := \text{ceil}(\text{rnd}(2))$ Matriz base

$$x_{t,w} := \text{if}(\text{mod}(t + T0_w, T) = 0, \text{if}(\text{ceil}(\text{rnd}(2)) > 1, A, -A), x_{t-1,w})$$

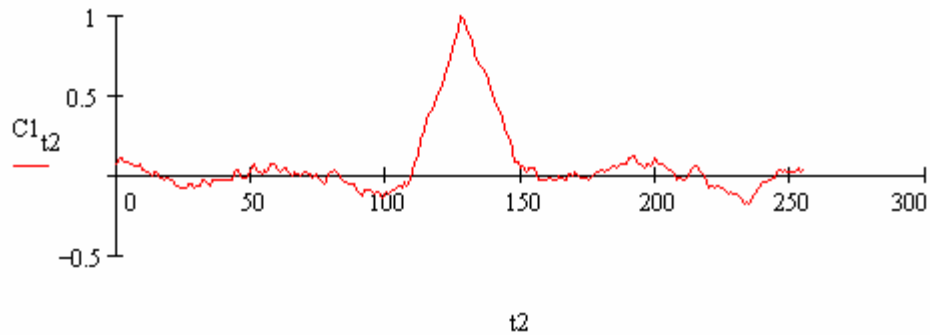
Cada columna de esta matriz tiene una realización. Se considerará el comienzo de la realización desde T en adelante.

$$v := \text{submatrix}(x, T, \text{rows}(x) - 1, 0, m - 1) \quad t1 := T \dots \text{rows}(v) - 1$$



$$v := v^T \quad t2 := 0 \dots \text{cols}(v) - 1$$

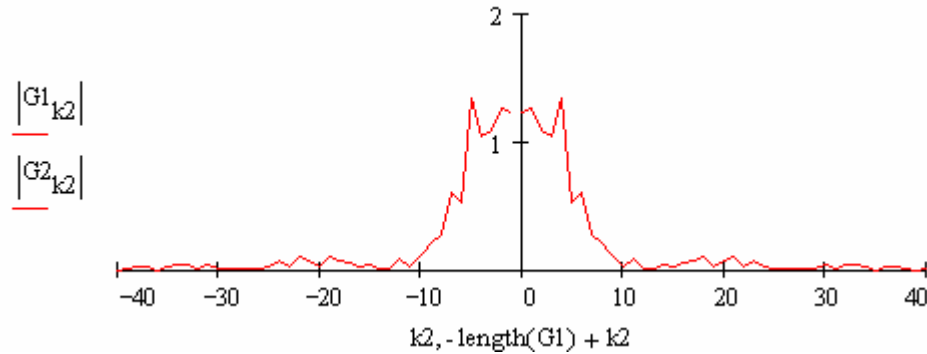
$$C1_{t2} := \frac{\sum_w \left(v_{\frac{\text{cols}(v)}{2}}^{\langle \text{cols}(v) \rangle} \right)_w \cdot \left(v_{t2}^{\langle \rangle} \right)_w}{\text{rows}(v)}$$



La Transformada de Fourier da entonces la densidad espectral de potencia:

$$G1 := \text{fft}(C1) \quad k2 := 0 \dots \text{length}(G1) - 1$$

$$G2_{k2} := G1_{\text{length}(G1) - 1 - k2}$$



SEÑALES ALEATORIAS MODULADAS

En sistemas de comunicación es común tener **procesos modulados** de la forma $\mathbf{v(t)} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ donde $\mathbf{v(t)}$ es una señal aleatoria. Aún cuando $\mathbf{v(t)}$ es ergódico el proceso modulado no es ergódico.

Sin embargo, se puede trabajar con el ensamble:

$$z(t) = v(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Gamma)$$

el cual será ergódico si Γ es una variable aleatoria independiente distribuida uniformemente sobre $[-\pi, +\pi]$.

El agregado de Γ reconoce la selección arbitraria del origen de tiempo cuando $\mathbf{v(t)}$ y $\cos(\omega_0 \cdot t)$ provienen de fuentes físicamente independientes como es siempre el caso.

Para encontrar $\mathbf{R_z(\tau)}$ en términos de $\mathbf{R_v(\tau)}$ se siguen los lineamientos del penúltimo ejemplo, excepto en el sentido de que los promedios de ensamble se deben efectuar tanto con respecto a $\mathbf{v(t)}$ como con respecto a Γ . Desarrollando $\mathbf{z(t) \cdot z(t - \tau)}$:

$$R_z(\tau) = E(v(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Gamma) \cdot (v(t - \tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t - \tau) + \Gamma)))$$

$$R_z(\tau) = E(v(t) \cdot v(t - \tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Gamma) \cdot (\cos(\omega_0 \cdot (t - \tau) + \Gamma)))$$

$$R_z(\tau) = E \left[v(t) \cdot v(t - \tau) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\omega_0 \cdot \tau) + \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t + 2 \cdot \Gamma - \omega_0 \cdot \tau)) \right]$$

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2} \cdot E(v(t) \cdot v(t - \tau)) \cdot (E(\cos(\omega_0 \cdot \tau)) + E(\cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t + 2 \cdot \Gamma - \omega_0 \cdot \tau)))$$

donde:

$$E(\cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t + 2 \cdot \Gamma - \omega_0 \cdot \tau)) = 0 \quad \text{y} \quad E(v(t) \cdot v(t - \tau)) = R_v(\tau)$$

Por lo tanto:

Aplicando Wiener-Kinchine, $\mathbf{G_v(f) = F[R_v(\tau)]}$.

$$G_z(f) = \frac{1}{4} \cdot (G_v(f - f_0) + G_v(f + f_0))$$

Por lo que la modulación ha trasladado a la densidad espectral $\mathbf{G_v(f)}$ por encima y por debajo en $\mathbf{f_0}$ unidades.

Prácticamente:

$i := 0..99$ índice para los valores

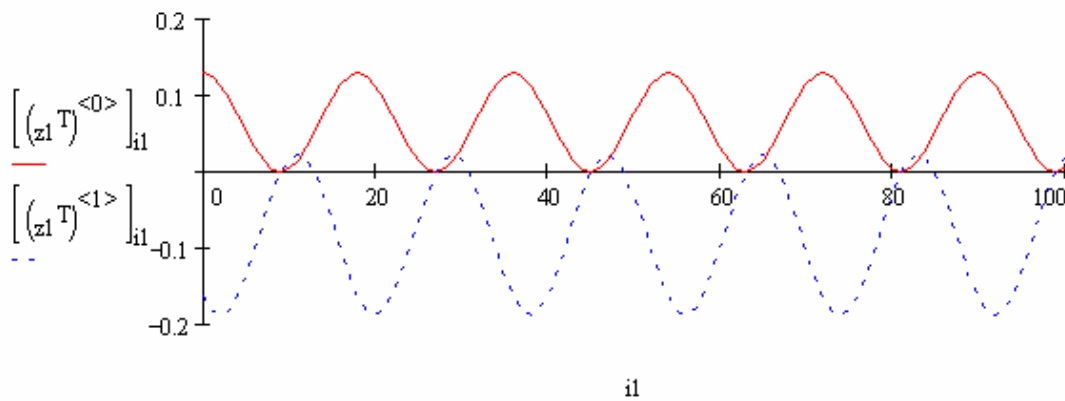
$\Gamma_{j1} := 2 \cdot \pi \cdot (\text{rnd}(1) - 0.5)$ conjunto de valores aleatorios (entre $-\pi$ y $+\pi$) con distribución uniforme

$\omega_0 := 10$ $n := 10$ constantes

$i1 := 0..2^n - 1$ $j1 := 0..25$ índices para variación de t y número de realización.

$$A_{j1} := \text{rnd}(1) \quad v1_{j1,i1} := A_{j1} \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot i1 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$z1_{j1,i1} := v1_{j1,i1} \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot i1 \cdot \frac{\pi}{180} + \Gamma_{j1}\right) \quad \text{señal aleatoria}$$



$$C3_{i1} := \frac{\sum_{j1} (z1^{<0>})_{j1} \cdot (z1^{<i1>})_{j1}}{\text{rows}(z1)}$$

Función de autocorrelación de z(t).

Según datos.

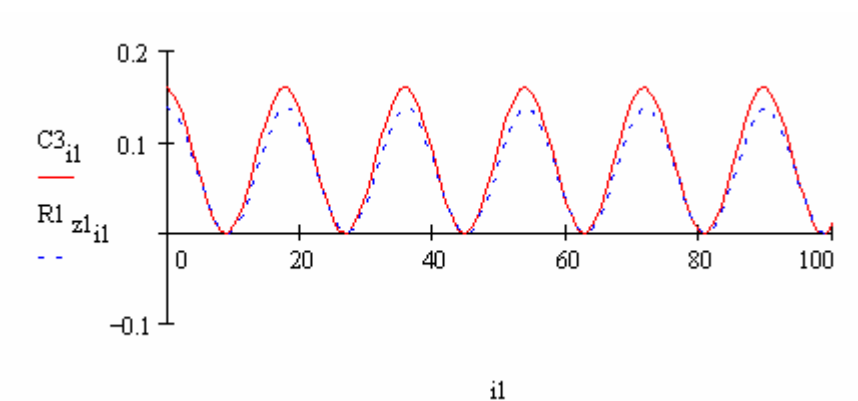
$$C2_{i1} := \frac{\sum_{j1} (v1^{<0>})_{j1} \cdot (v1^{<i1>})_{j1}}{\text{rows}(v1)}$$

Función de autocorrelación de v(t)

$$R1_{z1_{i1}} := 0.5 \cdot C2_{i1} \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot i1 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

Función de autocorrelación de $z(t)$.

Teórica.



$G1 := \text{fft}(C3)$ densidad espectral de potencia de $z(t)$.

$k2 := 0 \dots \text{length}(G1) - 1$

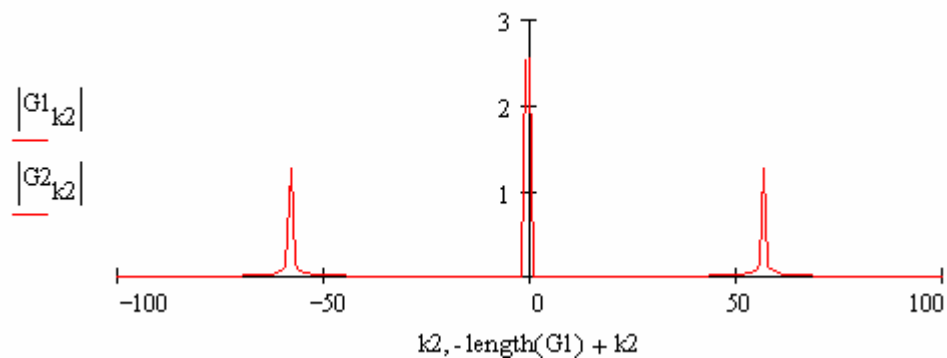
$G2_{k2} := G1_{\text{length}(G1) - 1 - k2}$

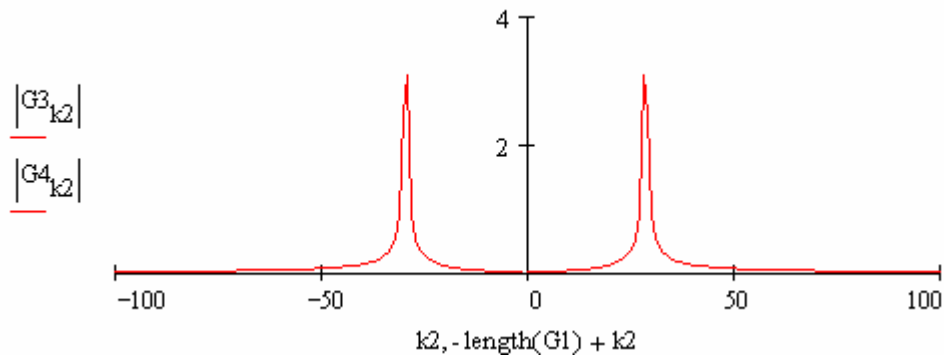
Para determinar f_0 (en forma aproximada referido al índice), se recurre a:

$$f0 := \frac{\omega_0 \cdot 2^{n-1}}{180} \quad f0 = 28.444$$

$G3 := \text{fft}(C2)$ densidad espectral de potencia de $v(t)$.

$G4_{k2} := G3_{\text{length}(G3) - 1 - k2}$





SEÑALES ALEATORIAS INCOHERENTES

Se dice que dos señales aleatorias son incoherentes si son ortogonales para toda τ , es decir:

$$R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$$

Una condición suficiente para la incoherencia es que $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ y $\mathbf{w}(\mathbf{t})$ sean estadísticamente independientes y una o la otra tengan valor medio cero, es decir:

$$\overline{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})} = 0$$

Cuando se aplica la penúltima ecuación, la señal $\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}(\mathbf{t}) + \mathbf{w}(\mathbf{t})$ tiene:

$$R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau)$$

y haciendo $\tau = 0$:

$$\overline{z^2} = \overline{v^2} + \overline{w^2} \quad \text{potencia promedio}$$

A partir de la linealidad de la transformada de Fourier:

$$G_z(f) = G_v(f) + G_w(f) \quad \text{densidad espectral de potencia}$$

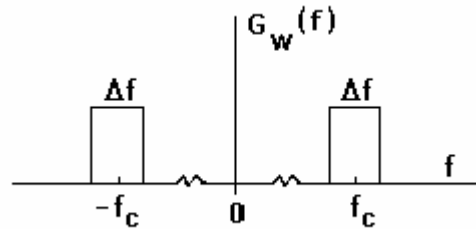
por lo tanto se tiene superposición de la densidad espectral de potencia, así como superposición de potencia promedio.

REPRESENTACION EN SERIE DE FOURIER DE UNA SEÑAL ALEATORIA

Las funciones de autocorrelación $[R_v(\tau)]$ y de densidad espectral de potencia $[G_v(f)]$ son representaciones **determinísticas** de una señal aleatoria en el dominio de τ y f

respectivamente. Hay también representaciones en serie en el dominio del tiempo. Sin embargo, tales representaciones son aproximaciones e incluyen coeficientes **no determinísticos** (es decir aleatorios).

Considérese la señal aleatoria $w(t)$ que tiene la $G_w(f)$ de la figura, donde $\Delta f \ll f_c$.



Su función de autocorrelación (la antitransformada de Fourier de $G_w(f)$) es:

$$R_w(\tau) = \left(F(G_w(f)) \right)^{(-1)} = 2 \cdot G_w(f_c) \cdot \Delta f \cdot \text{sinc}(\tau \cdot \Delta f) \cdot \cos(\omega_c \cdot \tau)$$

donde:

$$\text{sinc}(\tau \cdot \Delta f) = \frac{\sin(\pi \cdot \Delta f \cdot \tau)}{(\pi \cdot \tau \cdot \Delta f)}$$

Puesto que $G_w(f)$ consiste de dos funciones rectangulares de la misma altura, $G_w(f_c) = G_w(-f_c)$.

Si se concentra la atención en τ relativamente pequeños o sea $|\tau| \ll 1 / \Delta f$, esto implica $\text{sinc}(\tau \cdot \Delta f)$ prácticamente igual a 1.

$$R_w(\tau) = 2 \cdot G_w(f_c) \cdot \Delta f \cdot \cos(\omega_c \cdot \tau)$$

comparando esta ecuación con la del primer ejemplo [$R_v(\tau) = (A^2 / 2) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)$] Sugiere la aproximación:

$$w(t) = A \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \Gamma)$$

Donde A y Γ son variables aleatorias. Haciendo $\tau = 0$:

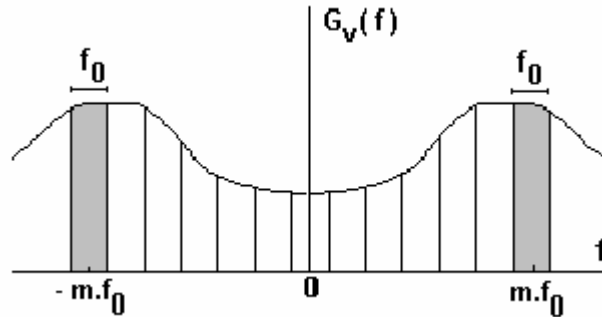
$$R_w(0) = 2 \cdot G_w(f_c) \cdot \Delta f = \overline{w^2}$$

por lo que:

$$\overline{A^2} = 4 \cdot G_w(f_c) \cdot \Delta f$$

Supóngase que Γ está distribuida uniformemente, ya que $G_w(f)$ no suministra información de fase. De esta forma se ha aproximado $w(t)$ a una senoide a la frecuencia f_c con amplitud y fase aleatorias. Cuanto más pequeño Δf mejor aproximación. En realidad si Δf tiende a cero, $w(t)$ es una senoide, pero de amplitud sumamente pequeña.

La aproximación anterior se puede extender a una $G_w(f)$ arbitraria fraccionándola en bandas muy angostas de ancho $\Delta f = f_0$ con centro en $f = m \cdot f_0$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Cada par de bandas en $f = \pm m \cdot f_0$ corresponde a:

$$v_m(t) = A_m \cdot \cos(m \cdot \omega_0 + \Gamma_m)$$

donde Γ_m está distribuida de manera uniforme, y

$$\overline{(A_m)^2} = 4 \cdot f_0 \cdot G_v(m \cdot f_0)$$

Entonces, dado que no se traslapan dos pares diferentes de bandas:

$$v(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot \tau + \Gamma_m)$$

y todos los términos de la suma son incoherentes entre sí.

La ecuación anterior es un desarrollo de Fourier con período $T_0 = 1/f_0$ puesto que las componentes son armónicas de f_0 . Si f_0 es pequeña (T_0 grande) se mejora la aproximación.

Convirtiendo la expresión anterior en exponencial:

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot \tau + \Gamma_m)$$

donde se pueden encontrar los coeficientes aleatorios C_m a partir de cualquier función

muestra:

$$C_m = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) \cdot \exp(-j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

Se demuestra rápidamente que:

$$\overline{C_m} = v \quad \text{si } m = 0 \quad \overline{C_m} = 0 \quad \text{si } m \neq 0$$

Además:

$$A_m = 2 \cdot |C_m| \quad \theta_m = \arg(C_m)$$

$$\text{Por lo que:} \quad E[|C_m|^2] = f_0 \cdot G_v(m \cdot f_0) \quad E(C_m \cdot C_n) = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

Los coeficientes de la serie son variables aleatorias no correlacionadas, cuyos promedios estadísticos están relacionados con la densidad espectral.

RUIDO Y SU FILTRADO - Ruido Térmico

Lo común es tratar con tensiones de ruido provenientes del movimiento aleatorio de partículas cargadas (por lo general electrones) en medios conductores. Según la teoría cinética, la energía promedio de una partícula a la temperatura absoluta Ψ es proporcional a $k \cdot \Psi$ siendo k la **constante de Boltzmann**.

Se esperan así valores de ruido térmico que incluyan el producto $k \cdot \Psi$. En síntesis, se obtendrá una medida de la potencia de ruido en términos de temperatura.

Cuando una resistencia metálica se encuentra a la temperatura Ψ , existe una tensión aleatoria $v(t)$ producida en los terminales a circuito abierto a causa del movimiento aleatorio de los electrones.

De acuerdo al Teorema Central del Límite, $v(t)$ tiene una distribución gaussiana con media igual a cero y varianza:

$$\sigma_v^2 = \overline{v^2} = \frac{2 \cdot (\pi \cdot k \cdot \Psi)^2}{3 \cdot h} \cdot R \quad \text{en volts}^2$$

donde:

$$k := 1.37 \cdot 10^{-23} \quad \text{constante de Boltzmann (en J / } ^\circ\text{K)}$$

$$h := 6.62 \cdot 10^{-34} \quad \text{constante de Planck (en J . seg)}$$

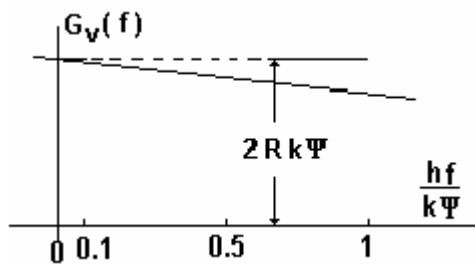
y Ψ en grados Kelvin (°K). La presencia de h indica un resultado de mecánica cuántica. Se demuestra en mecánica cuántica que la **densidad espectral del ruido térmico** es:

$$G_v(f) = \frac{2 \cdot R \cdot h \cdot |f|}{\exp\left(\frac{h \cdot |f|}{k \cdot \Psi}\right) - 1} \quad \text{en volt}^2 / \text{Hz}$$

Para $f = 0$ se presenta una indeterminación de la forma "0/0", para salvarla se aplica L'Hopital:

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{2 \cdot R \cdot h \cdot |f|}{\exp\left(\frac{h \cdot |f|}{k \cdot \Psi}\right) - 1} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{2 \cdot R \cdot h}{h \cdot \frac{1}{(k \cdot \Psi)} \cdot \exp\left(\frac{h \cdot |f|}{k \cdot \Psi}\right)} = 2 \cdot R \cdot k \cdot \Psi$$

gráficamente, si se define (para frecuencia positivas):



Se considera la **Temperatura de Salón** o **Temperatura Normal** a:

$$\Psi_0 := 290 \cdot \text{K} \quad (\text{grados Kelvin o } 17 \text{ grados Celsius})$$

así:

$$k \cdot \Psi_0 = 3.973 \cdot 10^{-21} \cdot \text{sec} \cdot \text{watt}$$

aproximadamente **$4 \cdot 10^{-21}$ w-seg.**

Entonces si la resistencia está en Ψ_0 , $G_v(f)$ es constante de manera esencial para:

$$|f| < 0.1 \cdot k \cdot \Psi_0 / h = 10^{12} \text{ Hz.}$$

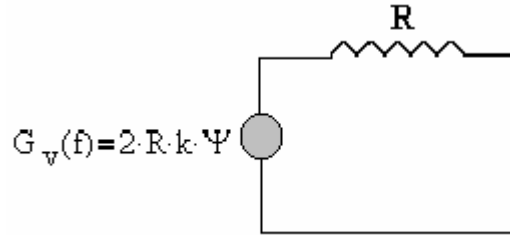
Pero este límite superior cae en la porción **infrarroja** del espectro electromagnético, más arriba del punto donde los componentes eléctricos dejan de responder.

Luego, se puede decir que: **La densidad espectral de ruido térmico es CONSTANTE.**

$$G_v(f) = 2 \cdot R \cdot k \cdot \Psi \quad (\text{en volt}^2 / \text{Hz})$$

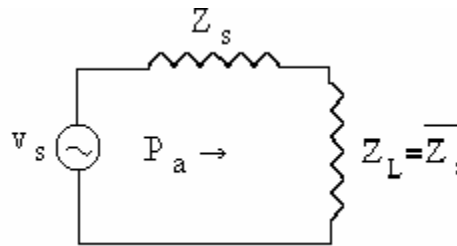
Aplicando Thevenin, Si R se reemplaza por una resistencia sin ruido de valor R y al

ruido se lo indica por un generador de tensión:



El sombreado se debe a que la fuente es no convencional.

Sea una fuente convencional con una impedancia $\mathbf{Z_s = R_s + j X_s}$ y sea $\mathbf{v_s}$ la tensión a circuito abierto.

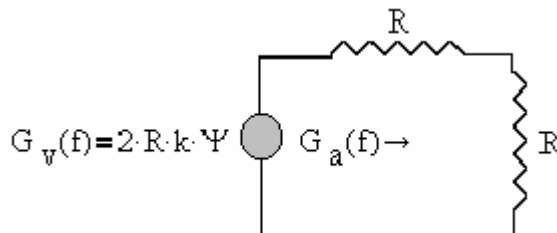


Esto es si la carga está acoplada de tal manera que $\mathbf{Z_L}$ es el conjugado de $\mathbf{Z_s}$.

La tensión en terminales vale $\mathbf{v_s / 2}$ y la potencia disponible es:

$$P_a = \frac{\langle [v_s(t)/2]^2 \rangle}{R_s} = \frac{\langle v_s'^2(t) \rangle}{4 \cdot R_s} \quad (\text{en w / Hz})$$

Para el caso del resistor térmico visto como fuente de ruido:



Siendo $\mathbf{G_a(f)}$ la densidad espectral disponible, la cual depende de la temperatura. Por lo tanto, **un resistor térmico entrega un máximo de $\mathbf{k*\Psi/2}$ [w/Hz] a una carga adaptada sin importar el valor de R.**

RUIDO BLANCO Y TEMPERATURA DE RUIDO

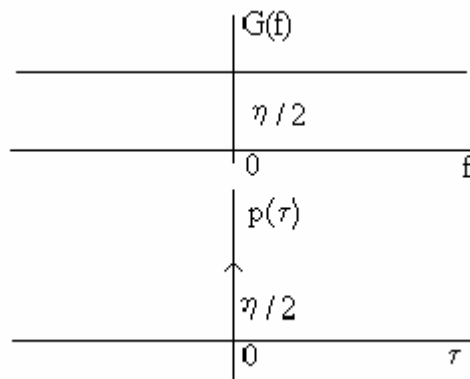
Además de los resistores térmicos, hay otros tipos de fuentes que tienen densidad

espectral plana sobre un amplio intervalo de frecuencias.

Tal espectro tiene todos los componentes de frecuencia en igual proporción y se lo designa **Ruido Blanco**. La densidad espectral de ruido blanco se exhibe en general como:

$$G(f) = \frac{\eta}{2}$$

donde el factor **1/2** se incluye para que asocie la mitad de la potencia con la frecuencia positiva y la otra mitad con la negativa. En otras palabras, **η** es la densidad de frecuencia de potencia positiva.



Puesto que se conoce $G(f)$, la función de autocorrelación se obtiene por Transformada de Fourier.

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \tau} df = \frac{\eta}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \cdot \omega \cdot \tau} df = \frac{\eta}{2} \cdot \delta(\tau) \quad (1)$$

Se observa que **$R(\tau > 0) = 0$** . De modo que dos muestras diferentes cualesquiera de una señal de ruido blanco gaussiano son no correlacionadas y por lo tanto **estadísticamente independientes**.

El valor de **η** depende de dos factores:

- el tipo de fuente de ruido
- el tipo de densidad espectral, es decir la tensión cuadrática media, la corriente cuadrática media o la potencia disponible. Si la fuente es un resistor térmico:

$$\eta_v = 4 \cdot R \cdot k \cdot \Psi \quad \eta_i = \frac{4 \cdot k \cdot \Psi}{R} \quad \eta_0 = k \cdot \Psi$$

donde el tipo de densidad espectral se indica por medio de subíndices.. Además, cualquier tipo de fuente de ruido térmico tiene por distribución: $\eta_0 = k \cdot \Psi$.

Otras fuentes de ruido blanco no térmicas, en el sentido de la potencia disponible, no está relacionada con la temperatura física. Sin embargo, se puede hablar de **temperatura de ruido** Ψ_N de cualquier fuente de ruido blanco térmico o no térmico por medio de la definición:

$$\Psi_N = \frac{2 \cdot G_0(f) \cdot \eta_0}{k} = \frac{\eta_0}{k}$$

donde $\eta_0/2$ es la máxima potencia de ruido que la fuente puede entregar por unidad de frecuencia.

Entonces, dada una temperatura de ruido de fuente $\eta_0 = k \cdot \Psi_N$ (donde Ψ_N no es necesariamente una temperatura física).

Por ejemplo, ciertos generadores de ruido electrónico tienen $\Psi_N = 10 \cdot \Psi_0 = 3000 \text{ }^\circ\text{K}$ (2727 °C) pero es obvio que los dispositivos no pueden estar a estas temperaturas.

RUIDO BLANCO FILTRADO

El modelo de ruido blanco resulta razonable siempre y cuando se lo relacione con la salida de un filtro y la densidad espectral sea más o menos constante sobre la banda de paso., una situación muy común en los sistemas de comunicación. Para el estudio del ruido blanco filtrado - o filtración de señales aleatorias en general - la relación de espectros de potencia de entrada y salida:

$$G_y(f) = (|H(f)|)^2 \cdot G_x(f)$$

es una herramienta básica, donde $\mathbf{H(f)}$ es la función de transferencia del filtro. Así, si la entrada a un sistema lineal invariante en el tiempo, es la señal $\mathbf{x(t)}$, la salida será una señal aleatoria $\mathbf{y(t)}$ con $\mathbf{G_y(f)}$ como en la ecuación anterior, y

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (|H(f)|)^2 \cdot G_x(f) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \tau} df$$

$$\overline{y^2} = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (|H(f)|)^2 \cdot G_x(f) df$$

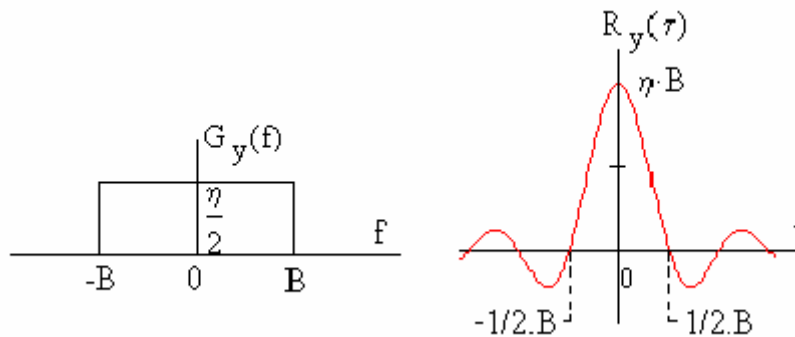
Se supone, por consiguiente, que $\mathbf{x(t)}$ proviene de un proceso ergódico, en cuyo caso también $\mathbf{y(t)}$ será ergódico.

Para ilustrar, si el ruido blanco es la entrada de un filtro pasabajos ideal de ganancia unitaria y de ancho de banda **B**, entonces:

$$G_y(f) = \frac{\eta}{2} \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot B}\right)$$

el espectro de potencia de salida es, de esta manera, una función rectangular y la autocorrelación de la salida es una función **senc**, de manera específica:

$$R_y(\tau) = \eta \cdot B \cdot \text{senc}(2 \cdot \pi \cdot B \cdot \tau)$$



Como se evidencia en la figura, el proceso de filtrado ha dado lugar a tres cosas:

- 1) El espectro de potencia no es mayor que el blanco, aunque es constante sobre un intervalo finito de frecuencia.
- 2) La potencia de salida es finita. En efecto: $\overline{y^2} = \eta \cdot B$
- 3) La señal de potencia de salida está correlacionada a intervalos aproximados $1/(2 \cdot B)$.

Aunque las conclusiones anteriores tuvieron como base los filtros pasabajo ideales, se obtienen resultados similares con cualquier filtro real. Se debe notar en forma particular, que el espectro del ruido blanco filtrado se mezcla con el **contorno** de $|H(f)|^2$. Puesto que el espectro resultante no es mayor que el blanco, al ruido blanco filtrado se lo llama a menudo **ruido coloreado**.

También sería deseable conocer la descripción probabilística de la señal filtrada, esto es su función de densidad de probabilidad, y de esta observación obtener tanto buenas como malas noticias. Las malas noticias son estas: no hay reglas generales que relacionen a las funciones de densidad de probabilidad de entrada y salida, salvo para un caso especial. En este caso especial están las buenas noticias, a saber:

Si la entrada a un sistema lineal invariante en el tiempo, es una señal aleatoria gaussiana, entonces la salida también es gaussiana.

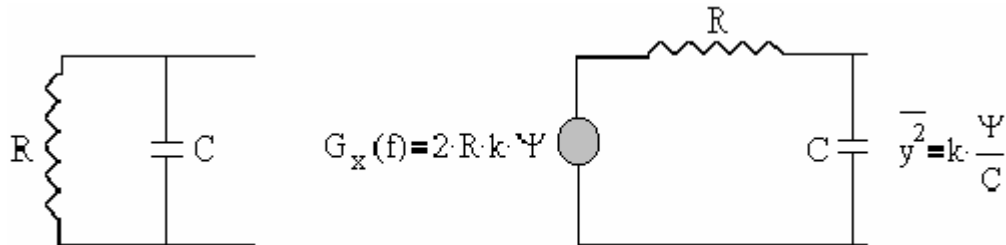
Esto proviene del hecho de que cualquier transformación lineal de una variada

gaussiana conduce a otra variada gaussiana. Pueden cambiarse los promedios estadísticos, pero no el modelo de probabilidad.

Se considera en este caso como una buena noticia, simplemente porque el modelo gaussiano es válido para muchas (pero no todas) señales aleatorias que hay en la ingeniería de comunicación.

EJEMPLO: RUIDO TERMICO EN UN CIRCUITO RC

Para resumir varios de los temas tratados hasta aquí, se considerará el circuito RC de la figura de la derecha, donde el resistor está a la temperatura Ψ .



Sustituyendo este resistor por su modelo de Thevenin, se llega a la figura de la derecha, que es una fuente de ruido blanco con $G_x(f) = 2 \cdot R \cdot k \cdot \Psi$ [V² / Hz] aplicada a un filtro pasabajos RC **sin ruido**.

Puesto que:

$$(|H(f)|)^2 = \left[1 + \left(\frac{f}{B} \right)^2 \right]^{-1}$$

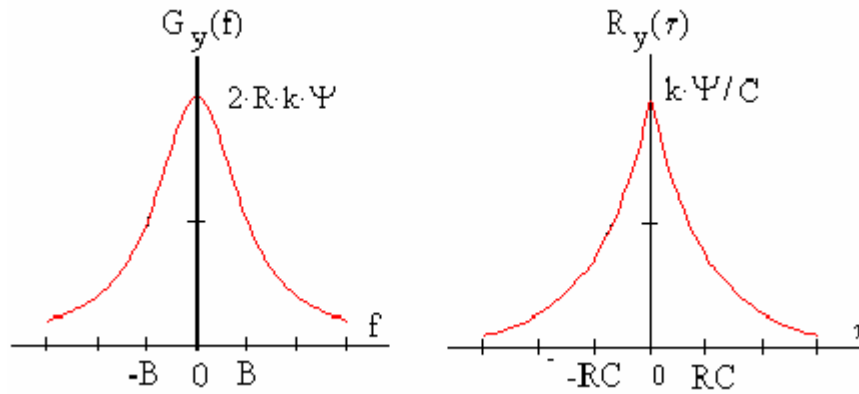
la densidad espectral de salida es:

$$G_y(f) = (|H(f)|)^2 \cdot G_x(f) = \frac{2 \cdot R \cdot k \cdot \Psi}{1 + \left(\frac{f}{B} \right)^2} \quad \text{con} \quad B = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

y la autocorrelación de $y(t)$ [transformada de Fourier de $G_y(f)$] es:

$$R_y(\tau) = 2 \cdot R \cdot k \cdot \Psi \cdot \pi \cdot B \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot B \cdot |\tau|} = \frac{k \cdot \Psi}{C} \cdot e^{-\frac{|\tau|}{R \cdot C}}$$

$G_y(f)$ y $R_y(\tau)$ se ven en el siguiente gráfico:



La figura de la derecha muestra que el intervalo sobre el que el ruido filtrado tiene una correlación apreciable es aproximadamente igual a la constante de tiempo, RC , del circuito, como se podría sospechar.

Se puede decir además que $y(t)$ es una señal aleatoria gaussiana con $\bar{y}=0$ es decir sin componente de CD, puesto que $x(t)$ es gaussiana con valor medio 0, y:

$$\overline{y^2} = R_y(0) = \frac{k \cdot \Psi}{C}$$

Como se puede apreciar, este último valor depende de C pero no de R , aunque la fuente de ruido es el resistor térmico.

Si el resistor térmico está a la temperatura ambiente Ψ_0 y $C = 0.1 \mu F$; entonces:

$$k := 1.37 \cdot 10^{-23} \quad \Psi_0 := 290 \quad C := 0.1 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{k \cdot \Psi_0}{C} = 3.973 \cdot 10^{-14} \quad \overline{y^2} = 4 \cdot 10^{-14} \text{ [V}^2\text{]}$$

Luego, la **tensión de salida rms** es $\sigma_y = 2 \cdot 10^{-7} = 0.2 \mu V$.

Estos valores excesivamente pequeños son característicos en ruido térmico, lo cual explica porqué no se nota en situaciones ordinarias. Sin embargo, si la señal recibida en un sistema de comunicación de larga distancia, puede ser del mismo orden de magnitud o incluso menor, lo cual muestra por qué un ruido térmico es una limitación fundamental en la comunicación eléctrica.

ANCHO DE BANDA EQUIVALENTE DE RUIDO

El ruido blanco filtrado por lo general tiene potencia finita. Para recalcar esto, se designa a la **potencia de ruido promedio** con:

$$N = \overline{y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (|H(f)|)^2 \cdot \frac{\eta}{2} df = \eta \cdot \int_0^{\infty} (|H(f)|)^2 df$$

Haciéndose notar que la integral depende sólo de la función de transferencia del filtro, por lo que se puede simplificar el análisis de la potencia del ruido definiendo un **ancho de banda equivalente de ruido, B_N** , como:

$$B_N = \frac{1}{\xi} \cdot \int_0^{\infty} (|H(f)|)^2 df$$

donde:

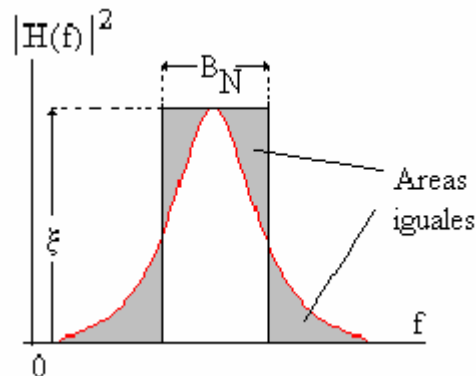
$$\xi^2 = (|H(f)|)_{\max}^2$$

es la relación de amplitudes de frecuencia central, es decir la ganancia de tensión. (Esta definición supone que el filtro tienen una frecuencia central significativa). Por lo tanto la potencia de ruido filtrado es:

$$N = \xi \cdot \eta \cdot B_N$$

El examen de esta ecuación muestra que el efecto del filtro se ha separado en dos partes: la **selectividad de frecuencia relativa**, como fue descrita por medio de B_N , y la **ganancia de potencia** (o atenuación), representada por medio de ξ .

En la siguiente figura se ilustra para un filtro pasabanda, que B_N es igual al ancho de banda de un filtro rectangular ideal que permitiera el paso de tanta potencia de ruido blanco como el filtro en cuestión, siendo iguales sus ganancias máximas.



Por definición, el **ancho de banda equivalente de ruido** de un filtro ideal es su ancho de banda real. Para filtros prácticos, B_N es algo mayor que el ancho de banda a 3 dB; por ejemplo, un filtro pasabajos RC tienen $B_N = 2 \cdot \pi \cdot B$ donde B_N es aproximadamente 50% mayor que B. Sin embargo, como el filtro resulta ser más selectivo (con características de corte agudo), su ancho de banda de ruido se aproxima al ancho de banda a 3 dB, y para

muchas aplicaciones no está muy lejos de la realidad considerarlos iguales.

Resumiendo, si $y(t)$ es un ruido blanco filtrado de valor medio cero, entonces:

$$\overline{y} = 0 \quad \overline{y^2} = \sigma_y^2 = N = \xi \cdot \eta \cdot B_N \quad \sigma_y = \sqrt{N} = \sqrt{\xi \cdot \eta \cdot B_N}$$

Esto significa que dada una fuente de ruido blanco, un medidor de potencia promedio (o un medidor de tensión rms) acusará una lectura:

$$\overline{y^2} = N = \eta \cdot B_N$$

donde B_N es el ancho de banda equivalente de ruido del medidor mismo. Despejando, la densidad de potencia de la fuente se puede deducir por medio de:

$$\eta = \frac{N}{\xi \cdot B_N}$$

siempre y cuando se esté seguro que el ruido es en realidad blanco dentro del intervalo de respuesta de frecuencia del medidor.

EJEMPLO: ANCHO DE BANDA EQUIVALENTE DE RUIDO DE UN FILTRO PASABAJOS RC

Volviendo al filtro pasabajos RC del ejemplo anterior, la frecuencia central del filtro es $f=0$. Así:

$$\xi = (|H(0)|)^2 = 1 \quad B_N = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2} df = \frac{\pi}{2} \cdot B = \frac{1}{4 \cdot R \cdot C}$$

La razón de por qué

$$\overline{y^2} = R_y(0) = \frac{k \cdot \Psi}{C}$$

en el ejemplo anterior es independiente de R resulta ahora aparente si se escribe:

$$\overline{y^2} = \eta \cdot B_N = (4 \cdot R \cdot k \cdot \Psi) \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot R \cdot C} \right)$$

Así, cuando aumenta R aumenta la densidad de ruido η (como debe ser) pero disminuye el ancho de banda del ruido B_N . Estos dos efectos se cancelan uno al otro en forma precisa, de modo que:

$$\overline{y^2} = \frac{k \cdot \Psi}{C}$$

RUIDO BLANCO Y MEDICIONES DE FILTRO

Dado que el ruido blanco contiene todas las frecuencia en igual proporción, resulta una señal conveniente para mediciones de filtros y para trabajo de diseño experimental.

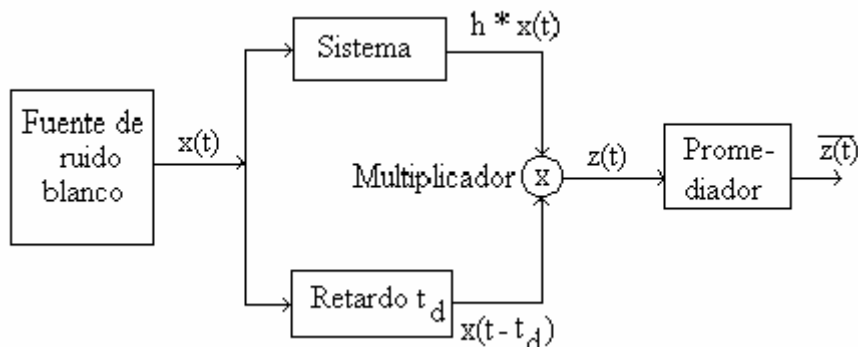
En consecuencia, las fuentes de ruido blanco con densidad de potencia calibrada han venido a ser instrumentos del laboratorio standard. A continuación se analizarán algunas de las mediciones que se pueden hacer con estas fuentes.

Ancho de Banda Equivalente de Ruido - Supóngase que se conoce la ganancia de un amplificador y se desea conocer su ancho de banda equivalente de ruido. Para hacerlo, se aplica ruido blanco a la entrada y se mide la potencia de salida promedio con un medidor cuya respuesta de frecuencia sea constante de manera esencial dentro de la banda de paso del amplificador. El ancho de banda de ruido será entonces:

$$B_N = \frac{N}{\xi \cdot \eta}$$

Respuesta de amplitud - Para encontrar la respuesta de amplitud de un filtro dado, se aplica ruido blanco a la entrada de manera que el espectro de potencia de salida sea proporcional a $|H(f)|^2$. Entonces se explora el espectro de salida con un filtro pasabanda sintonizable cuyo ancho de banda sea constante y pequeño en comparación con las variaciones de $|H(f)|^2$. Así, si el filtro de exploración se centra en f_c , la tensión de ruido rms en su salida será proporcional a $|H(f_c)|$. Variando f_c se obtiene, punto por punto, la gráfica de $|H(f)|$.

Respuesta al impulso - En la siguiente figura se muestra un método para la medición de la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema dado:



El instrumental que se requiere es una fuente de ruido blanco, un retardador de tiempo variable, un multiplicador y un dispositivo promediante.

Denotando el ruido de entrada como $x(t)$, la salida del sistema será $h * x(t)$, y la señal

retardada $\mathbf{x(t-t_d)}$. Así, la salida del multiplicador será:

$$z(t) = x(t - t_d) \cdot (h \cdot x(t)) = x(t - t_d) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \cdot x(t - \lambda) d\lambda$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ K \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 10 \\ 100 \cdot K & x > 10 \end{cases}$$

Pero, con $\mathbf{x(t)}$ que es el ruido blanco, la ecuación (1) dice que:

$$R_v(\tau) = f_0 \cdot G_v(0) + 2 \cdot f_0 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} G_v(m \cdot f_0) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot \tau)$$

por lo tanto, $\mathbf{h(t)}$ se mide por medio de la variación del retardo de tiempo $\mathbf{t_d}$.

Se puede cuestionar lo práctico de este método, en forma particular, puesto que $\mathbf{h(t)}$ se puede obtener inmediatamente con la aplicación de un impulso (o un pulso breve e intenso) al sistema. En tanto esta sea una conclusión válida para muchas mediciones de filtros, hay muchos sistemas, tales como el procesamiento industrial y sistemas de control, para los cuales no se puede dar una entrada impulsiva, o si se hace, podría dañar o destruir al sistema.