

Práctico Unidad 3 – Transformada z y de Fourier

1. Hallar la transformada Z de estas señales (incluyendo la ROC):

a) $x = (\dots; 0; 5; 3; 2; 0; 4; 3; 0; \dots)$

b) $x[t] = 3 \delta[t] + \delta[t - 2] + \delta[t + 2]$

c) $x[t] = u[t] - u[t - 10]$

d) $x[t] = 2^t u[t] + 3 (1/2)^t u[t]$

e) $x[t] = \cos(\alpha_0 t) u[t]$

f) $x[t] = (1/2)^t u[-t]$

g) $x[t] = (3^t u[-t - 1]) + (1/2)^t u[t + 2]$

Solución:

a) $X(z) = 5z^2 + 3z - 2 + 4z^{-2} - 3z^{-2}; \quad 0 < |z| < \infty$

b) $X(z) = 3 + z^{-2} + z^2; \quad 0 < |z| < 1$

c) $X(z) = (1 - z^{-10}) / (1 - z^{-1}); \quad |z| > 0$

d) $X(z) = (4 - (13/2) z^{-1}) / [(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})]; \quad |z| > 2$

e) $X(z) = [1 - (\cos \alpha_0) z^{-1}] / [1 - 2(\cos \alpha_0) z^{-1} + z^{-2}]; \quad |z| > 1$

f) $X(z) = 1 / (1 - 3z); \quad |z| < 1/3$

2.Cuál es la región de convergencia de la transformada Z para estas señales?

$$a) \ x[t] = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^t + \left(\frac{3}{4} \right)^t \right) u[t - 10]$$

$$b) \ x[t] = \begin{cases} 1 & -10 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$c) \ x[t] = 2^t u[-t]$$

Solución:

$$a) \ |z| > \frac{3}{4}$$

$$b) \ 0 < |z| < \infty$$

$$c) \ |z| < 2$$

2. Usar la transformada Z para hallar la convolución de estas señales:

$$x_1[t] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \right)^t & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$x_2[t] = \delta[t] + \delta[t - 1] + 4\delta[t - 2]$$

Solución:

$$(x_1 * x_2)[t] = \delta[t] + \frac{3}{2}\delta[t - 1] + \frac{19}{4}\delta[t - 2] + \frac{9}{4}\delta[t - 3] + \delta[t - 4]$$

3. Hallar la antittransformada de

$$X(z) = z^2 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) (1 - z^{-1}) (1 + 2z^{-1}), 0 < |z| < \infty$$

$$\text{Solución: } x[t] = \left(\dots, 0, 1, \frac{1}{2}, \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}, 1, 0, \dots \right)$$

4. Hallar la transformada inversa en los siguientes casos:

$$a) \ X(z) = 4 + 3(z^2 + z^{-2}), 0 < |z| < \infty.$$

$$b) \ X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}.$$

$$c) \ X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}, |z| > 2.$$

$$d) \ X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-2})}, |z| > 1$$

Solución:

$$a) \ x[t] = (\dots, 0, 3, 0, \underline{4}, 0, 3, 0, \dots)$$

$$b) \ x[t] = \left(\frac{1}{2}\right)^t u[t] + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^t u[t]$$

$$c) \ x[t] = 2(-2)^t u[t] - (-1)^t u[t]$$

$$d) \ x[t] = \left(\frac{1}{4}\right)^t ((-1)^t + 1 + 2(t+1)) u[t]$$

5 . Calcular la transformada de Fourier de la función f dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{7\pi t}{2}\right) & -\pi < t < \pi \\ 0 & \text{demás casos} \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \cos \frac{7\pi}{2} t\right) e^{-i\omega t} dt$$

6. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \frac{5}{4 + it}$$

SOLUCIÓN

$$\boxed{\frac{5}{4 + it} \leftrightarrow 10\pi e^{4\omega} [1 - u(\omega)]}$$

7. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = 6[u(t-3) - u(t-7)]$$

SOLUCIÓN

$$F(\omega) = 6e^{-i\omega 5} 4\text{sinc}(2\omega) = 24e^{-i\omega 5} \text{sinc}(2\omega)$$

8. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = e^{-a^2 t^2} \ (a > 0)$$

9. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$$

10. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = t + 1 \quad (-1 \leq t \leq 0)$$

$$f(t) = -t + 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

0 en otro caso

Apéndice: Tabla de Transformadas de Fourier

$x(t)$	$X(\omega)$
$\alpha \cdot \delta(t)$	α
$\frac{\alpha}{2 \cdot \pi}$	$\alpha \cdot \delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\frac{1}{2} \cdot \delta(t) - \frac{1}{j \cdot 2 \cdot t}$	$u(\omega)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot \tau}{2}\right)$
$\left(\frac{W}{\pi}\right) \cdot \text{sinc}(W \cdot t)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2 \cdot W}\right)$
$\text{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{2}{\omega \tau}\right)^2$
$\left(\frac{W}{\pi}\right) \cdot \text{sinc}(W \cdot t)^2$	$\text{tri}\left(\frac{\omega}{2 \cdot W}\right)$
$e^{j\omega_0 \cdot t}$	$2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-j\omega \cdot \tau}$
$\cos(\omega_0 \cdot t)$	$\pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\sin(\omega_0 \cdot t)$	$-j \cdot \pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$u(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$	$\frac{\pi}{2} \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + \frac{j \cdot \omega}{(\omega_0)^2 - \omega^2}$
$u(t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$	$-j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + \frac{j \cdot \omega}{(\omega_0)^2 - \omega^2}$

$u(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{1}{\alpha + j \cdot \omega}$
$u(t) \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{1}{(\alpha + j \cdot \omega)^2}$
$u(t) \cdot t^2 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{2}{(\alpha + j \cdot \omega)^3}$
$u(t) \cdot t^3 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{6}{(\alpha + j \cdot \omega)^4}$