

TRANSFORMADA z Y DE FOURIER

OBJETIVOS:

- Exponer los conceptos de funciones discretas en cuanto a la visión del proceso de tratamiento de señales que parte de una versión analógica, la que a través de la conversión analógica-a-digital, se convierte precisamente en una discreta.
- Repasar los fundamentos necesarios para operar con la transformación más popular que se aplica a las funciones discretas (transformada z). Esto es, sin detenerse puntualmente en las formalidades matemáticas, sino apuntando a las propiedades más significativas y a la mecánica de cálculo de esta transformada.
- Repasar los fundamentos necesarios para operar con la Transformada de Fourier, puntualizando propiedades y mecánicas de cálculo que permitan el uso eficiente de esta herramienta.
- Operar adecuadamente con otras variantes tales como las Series de Fourier, aplicadas a funciones periódicas, puntualizando su solución de tipo discreta en el dominio de frecuencia, en contraposición a la Transformada que devuelve una función continua en el dominio de la frecuencia.

1 - FUNCIONES DISCRETAS

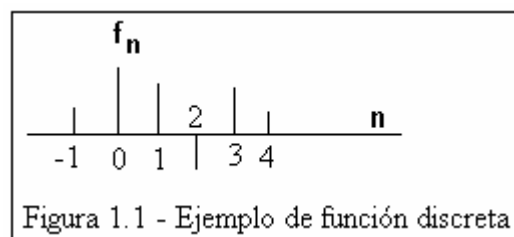
Una **función discreta**, f_n (o $f[n]$), es aquella que está representada por una secuencia definida para valores enteros del parámetro n . En otras palabras, representada dicha función en un sistema rectangular, sobre el eje de abscisas sólo habrá valores de ordenadas para puntos aislados.

Para las ordenadas no rige esta restricción y los valores representados son continuos.

En definitiva, f_n designará una secuencia de números reales o complejos definidos para todo entero n .

La secuencia f_n será denominada señal discreta y el índice n , tiempo discreto.

Expresando gráficamente lo anterior (figura 1.1):

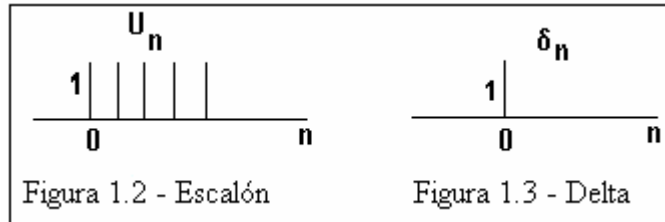


Dos funciones muy utilizadas y que constituyen un basamento hacia procesos más elaborados, son las llamadas **Escalón** y **Delta**.

$$U_n = \text{if}(n \geq 0, 1, 0) \quad \text{secuencia Escalón}$$

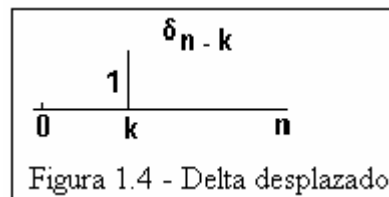
$$\delta_n = \text{if}(n = 0, 1, 0) \quad \text{secuencia Delta}$$

Que se aprecian en las figuras 1.2 y 1.3.



Es conveniente aclarar que será común extender la notación a expresiones como la siguiente, que representa una secuencia Delta desplazada k unidades hacia la derecha. Analíticamente se ve en (1.1) donde se ha aplicado la notación típica de Mathcad en el segundo miembro, y gráficamente en la figura 1.4.

$$\delta_{n-k} = \text{if}(n=k, 1, 0) \quad (1.1)$$



De aquí en adelante y a modo de generalización, n se considerará el tiempo discreto y k un parámetro constante.

Esto está dando un pie a lo que vendrá: Las señales con las que se habrá de trabajar y procesar a través de computadoras digitales, provendrán de la conversión **analógica-a-digital** de señales analógicas del mundo real. El "formato" de las mismas será precisamente el de una secuencia de tiempo discreto.

Volviendo al tema, de (1.1) se puede avizorar una muy importante propiedad que es la siguiente:

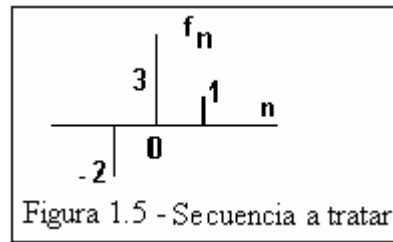
- f_n , una secuencia arbitraria, se puede representar como una suma de secuencias delta.

En otras palabras, es como si cada término de la secuencia arbitraria "modulara" a una Delta con desplazamiento dado por el parámetro n correspondiente a dicho término.

Expresado esto matemáticamente, lleva a la ecuación (1.2).

$$f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot \delta_{n-k} \quad (1.2)$$

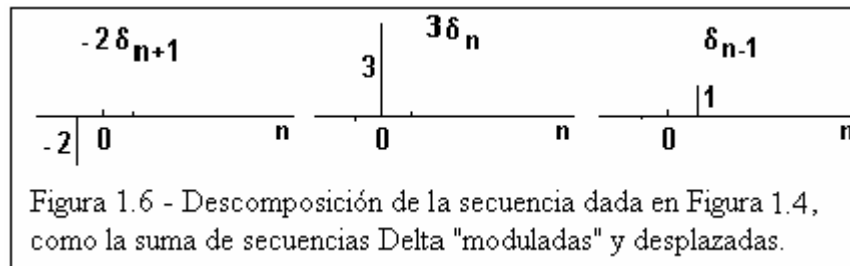
Ejemplo: Supóngase que se quiere aplicar lo expuesto a la siguiente secuencia (Figura 1.5).



Aplicando (1.2) queda:

$$f_n = -2 \cdot \delta_{n-1} + 3 \cdot \delta_n + \delta_{n-1}$$

Lo expresado se resume gráficamente en la figura 1.6.



2 - TRANSFORMADA z

La Transformada z se usa para llevar señales en el dominio del tiempo discreto al dominio de la frecuencia de variable compleja. Juega un rol similar al que la Transformada de Laplace lleva a cabo en el dominio de tiempo continuo.

Tal como en el caso de Laplace, la Transformada z abre nuevos caminos a la resolución de problemas y al diseño de aplicaciones en el dominio discreto.

La transformada z de una señal discreta f_n está dada por la ecuación (2.1).

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot z^{-n} \quad (2.1)$$

Donde z es una variable compleja. La definición de arriba es para una señal no-causal (es decir, f_n es conocida para tiempo negativo, $n < 0$). En muchos casos la señal será casual dando origen a la Transformada z Unilateral, en contraposición a (2.1) que es la Bi-lateral.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

Con el objeto de facilitar la comprensión de la mecánica a utilizar para hallar la Transformada z, se considerarán varios ejemplos de señales discretas muy comunes.

Ejemplo 1: Impulso unitario, $\delta(n)$

Esta señal tiene la característica de valer cero para cualquier n , excepto para $n=0$ donde vale 1. Por lo tanto, aplicando (2.1):

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} = 1$$

Una forma de notación a utilizar para señalar la Transformada z de una señal, que se utilizará en adelante es $\Leftarrow \Rightarrow$. Luego:

$$\delta(n) \Leftarrow \Rightarrow 1$$

Ejemplo 2: Impulso unitario con desplazamiento k , $\delta(n - k)$

Esta señal tiene la característica de valer cero para cualquier n , excepto para $n=k$ donde vale 1. Por lo tanto, aplicando (2.1):

$$F(z) = \sum_{n=k}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} \quad F(z) = z^{-k}$$

Luego:

$$\delta(n - k) \Leftarrow \Rightarrow z^{-k}$$

Ejemplo 3: Combinación lineal de impulsos

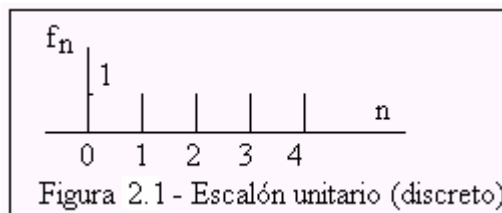
$$f_n = 3 \cdot \delta(n - 2) - 2 \cdot \delta(n - 5)$$

Aplicando (2.1):

$$3 \cdot \delta(n - 2) - 2 \cdot \delta(n - 5) \Leftarrow \Rightarrow 3 \cdot z^{-2} - 2 \cdot z^{-5}$$

Ejemplo 4: Escalón unitario, $\Phi(n)$

Esta señal tiene la característica de valer cero para cualquier $n < 0$, y 1 para $n \geq 0$. (figura 2.1).



Aplicando (2.1):

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n}$$

En este punto del desarrollo, es conveniente detenerse para revisar un concepto sumamente importante y revelador en el cálculo de la Transformada z de una señal discreta. Esto es la llamada serie geométrica.

Esta serie se caracteriza por quedar definida a partir de un término inicial (a_0) y una razón (q). El segundo término, surge de multiplicar el primero por la razón ($a_1 = a_0 \cdot q$); el tercero de multiplicar el segundo por la razón ($a_2 = q \cdot a_1 = a_0 \cdot q^2$); y así siguiendo.

Si se acota el número de términos a n , es posible hallar la suma de todos ellos como:

$$\sum_{i=0}^n a_0 \cdot q^i = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \dots + a_0 \cdot q^{n-1} = a_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (2.2)$$

Para el caso del escalón unitario, la suma de los primeros n términos es:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot z^{-i} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(n-1)}$$

y aplicando (2.2), queda:

$$S_n = \frac{1 - z^{-n}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-n}}{1 - z^{-1}} \quad (2-3)$$

Para hallar la Transformada z , esta sumatoria debe comprender infinitos términos. En otras palabras:

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (2-4)$$

Esta es la suma de la serie. Puede ser **divergente** (es decir, que tienda a infinito en la medida que crece n). O puede ser **convergente** (tiende a un valor finito cuando n crece indefinidamente), este es el caso que realmente importa.

De la observación de la ecuación (2.3) se desprende la existencia de dos términos. El primero de ellos no se modifica al tomar el límite indicado en (2.4) por no depender de n . En cambio, el segundo sí depende fuertemente de esta variable, ya que la misma figura como exponente.

Es aquí donde se juega la suerte la serie de ser convergente o no.

Evidentemente la “decisión” estará en la variable compleja z . Para n tendiendo a infinito, el segundo término se anula si $|z| > 1$. Y así la serie es **convergente**.

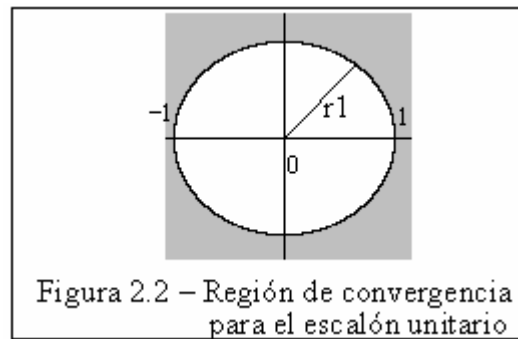
Bajo estas circunstancias:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{Si } |z| > 1$$

Resumiendo:

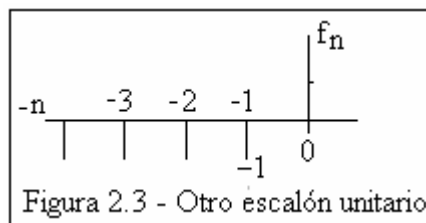
$$\Phi(n) \iff \frac{z}{z - 1} \quad \text{Si } |z| > 1 \quad (2.5)$$

La variable compleja z se representa en un sistema rectangular de ejes: Im (ordenadas), Re (abscisas). La región de convergencia es la grisada de la figura (2.2):



Ejemplo 5: Otro tipo de escalón unitario, $\Phi(-n - 1)$

Esta señal tiene la característica de valer **0** para cualquier $n \geq 0$, y **-1** para $n < 0$.(figura 2.3).



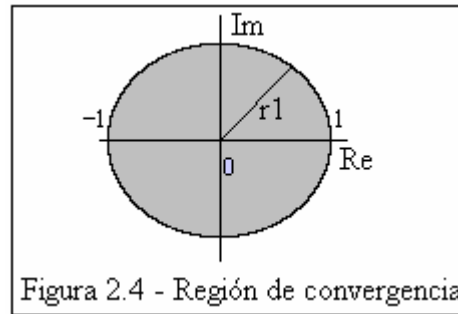
Aplicando (2.1) y (2.2):

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1) \cdot z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -z^n = -z \cdot \frac{1 - z^{\infty}}{1 - z} = \frac{-z}{1 - z} = \frac{-z}{1 - z} + \frac{z^{n+1}}{1 - z}$$

Para n tendiendo a infinito, el segundo término se anula si $|z| < 1$:

$$F(z) = \frac{-z}{1 - z} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{Si } |z| < 1$$

La región de convergencia es la grisada de la figura:



Resumiendo:

$$-\Phi(-n-1) \iff \frac{z}{z-1} \quad \text{Si } |z| < 1 \quad (2.6)$$

Ejemplo 6: Término exponencial $a^n \cdot \Phi(n)$

Aplicando (2.1) y (2.2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^{\infty}}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} + \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^{\infty}}{1 - \frac{a}{z}}$$

Para n tendiendo a infinito y siendo a/z menor que 1 (esto es, $|z| > a$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

Resumiendo:

$$a^n \cdot \Phi(n) \iff \frac{z}{z-a} \quad \text{Si } |z| > a \quad (2.7)$$

Diferenciando (2.7) respecto de a :

$$\frac{z}{(a-z)^2} \iff n \cdot a^{n-1} \cdot \Phi(n)$$

Diferenciando m veces respecto de a :

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot a^{n-m} \cdot z^{-n} \right] = \frac{m! \cdot z}{(z-a)^{m+1}}$$

Resumiendo:

$$C_{n,m} \cdot a^{n-m} \cdot \Phi(n) \iff \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad \text{Válido para: } |z| > a \quad (2.8)$$

3 – PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA z.

La Transformada z tiene muy importantes y útiles propiedades que son beneficiosas a la hora de manipular y resolver problemas.

- 3.1 Linealidad: Si $X_1(z)$ es la Transformada z de f_{1n} y $X_2(z)$ es la Transformada z de f_{2n}

$$a_1 \cdot f_{1n} + a_2 \cdot f_{2n} \iff a_1 \cdot X_1(z) + a_2 \cdot X_2(z)$$

- 3.2 Desplazamiento: Si $F(z)$ es la transformada z de f_n , para cualquier entero m:

$$f_{n-m} \iff z^{-m} \cdot F(z)$$

- 3.3 Convolución: Si $F_1(z)$ es la transformada-z de f_{1n} y $F_2(z)$ es la transformada-z de f_{2n} :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{1k} \cdot f_{2n-k} \iff F_1(z) \cdot F_2(z)$$

- 3.4 Secuencias Conjugadas: Si $F(z)$ es la transformada-z de f_n , se tiene

$$\overline{f_n} \iff \overline{F(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f_n} \cdot z^n$$

- 3.5 Fórmula de Parseval: Si $X(z)$ es la Transformada-z de x_n y si $Y(z)$ es la Transformada-z de y_n , entonces para todo $T = \pi/\sigma$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \overline{y_n} = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} X(e^{j\omega \cdot t}) \cdot \overline{Y(e^{j\omega \cdot t})} d\omega$$

Corolario:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|x_n|)^2 = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} (|X(e^{j\omega \cdot t})|)^2 d\omega$$

4 - METODOS DE CALCULO DE LA TRANSFORMADA INVERSA

Hasta aquí se ha visto como hallar la Transformada z de una señal discreta, pero cómo se puede hacer para volver al dominio del tiempo a partir del dominio de la variable compleja z ?

Se han desarrollado varios métodos para resolver este problema, se expondrán aquí los mas utilizados, a través de ejemplos particulares.

Supóngase que se desea hallar la Transformada Inversa z de la siguiente función:

$$F(z) = \frac{z^{-5}}{z+2}$$

• 4.1 – Transformaciones matemáticas

La cual se puede expresar como:

$$F(z) = z^{-6} \cdot \frac{z}{z+2} = z^{-6} \cdot \frac{1}{1+2 \cdot z^{-1}}$$

El último factor viene del desarrollo de una Serie Geométrica [véase ecuación (2.2) con $a_0 = 1$; $q = -2 \cdot z^{-1}$]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-2 \cdot z^{-1})^k$$

Siempre y cuando $|2 \cdot z^{-1}| < 1$ (condición para la convergencia). O bien, despejando, $|z| > 2$.

Por lo tanto, la función en consideración queda:

$$F(z) := z^{-6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-2 \cdot z^{-1})^k = z^{-6} - 2 \cdot z^{-7} + 4 \cdot z^{-8} - 16 \cdot z^{-9} + \dots$$

$$F(z) = z^{-6} \cdot [1 + (-2) \cdot z^{-1} + (-2)^2 \cdot z^{-2} + \dots] = (-2)^{n-6} \cdot \Phi(n)$$

De aquí resulta que la Transformada Inversa es (recurriendo a la propiedad 3.1, desplazamiento) :

$$f_n = (-2)^{n-6} \cdot \Phi(n) \quad \text{para } n \geq 6 \quad \text{en la región } |z| > 2$$

$$f_n = 0 \quad \text{para } n < 6$$

También se puede resolver haciendo otra disposición de la misma función:

$$F(z) = \frac{z^{-5}}{z+2} \quad F(z) = z^{-5} \cdot \frac{1}{z+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot z + \frac{1}{8} \cdot z^2 - \frac{1}{16} \cdot z^3 + \frac{1}{32} \cdot z^4 + O(z^6) \right) \cdot z^{-5}$$

$$F(z) := z^{-5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2} \right)^k = \frac{z^{-5}}{2} - \frac{z^{-4}}{4} + \frac{z^{-3}}{8} - \frac{z^{-2}}{16} + \dots$$

Esta es una Serie Geométrica [véase ecuación (2.2) con $a_0 = z^{-5}/2$; $q = -z/2$]. Dicha Serie será convergente siempre y cuando $|z/2| < 1$. O bien, despejando, $|z| < 2$.

De aquí resulta que la Transformada Inversa es:

$$f_n = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{5-n} \cdot \Phi(n) \quad \text{para } n \leq 5$$

$$f_n = 0 \quad \text{para } n > 5 \quad \text{en la región } 0 < |z| < 2$$

• 4.2 División larga

Un procedimiento más sencillo, es utilizar la llamada **división larga**. Siguiendo con el mismo ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r} z^{-5} \\ z^{-5} + 2 \cdot z^{-6} \\ \hline -2 \cdot z^{-6} \\ -2 \cdot z^{-6} - 4 \cdot z^{-7} \\ \hline 4 \cdot z^{-7} \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{) z + 2} \\ z^{-6} - 2 \cdot z^{-7} + 4 \cdot z^{-8} - \dots \end{array}$$

$$F(z) = z^{-6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-2 \cdot z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot z^{-6} \cdot z^{-n} \iff (-2)^{n-6} \cdot \Phi(n)$$

Con la condición de convergencia para $F(z)$: $2/|z| < 1$, esto es $|z| > 2$.

También la división se puede plantear de la siguiente manera (se permutan los términos del divisor):

$$\begin{array}{r} z^{-5} \\ z^{-5} + \frac{z^{-4}}{2} \\ \hline -\frac{z^{-4}}{2} \\ -\frac{z^{-4}}{2} - \frac{z^{-3}}{4} \\ \hline \frac{z^{-3}}{4} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2+z \\ \hline \frac{z^{-5}}{2} - \frac{z^{-4}}{4} + \frac{z^{-3}}{8} - \end{array}$$

$$F(z) = \frac{z^{-5}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot z^{-5} \cdot z^n \iff \left(-\frac{1}{2}\right)^{5-n} \cdot \Phi(n)$$

Con la condición de convergencia para $F(z)$: $\frac{1}{2}|z| < 1$, o sea $|z| < 2$.

• 4.3 – Uso de Tablas

En ocasiones en que se pueden utilizar Tablas de Transformada z (como la que se muestra a continuación), y luego se puede preparar la expresión para aplicar este procedimiento.

Señal Discreta

- $x(n)$
- $\delta(n)$
- $a^n \cdot \Phi(n)$
- $a^n \cdot \cos(n \cdot \alpha) \cdot \Phi(n)$

Transformada z

$$\begin{array}{l} X(z) \\ 1 \\ \hline 1 - a \cdot z^{-1} \\ \hline 1 - a \cdot z^{-1} \cdot \cos(\alpha) \\ \hline 1 - 2 \cdot a \cdot z^{-1} \cdot \cos(\alpha) + a^2 \cdot z^{-2} \end{array}$$

- $a^n \cdot \sin(n \cdot \alpha) \cdot \Phi(n)$ $\frac{a \cdot z^{-1} \cdot \sin(\alpha)}{1 - 2 \cdot a \cdot z^{-1} \cdot \cos(\alpha) + a^2 \cdot z^{-2}}$
- $n \cdot a^n \cdot \Phi(n)$ $\frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}$
- $n \cdot (n - 1) \cdot a^n \cdot \Phi(n)$ $\frac{2 \cdot a^2 \cdot z^{-2}}{(1 - a \cdot z^{-1})^3}$
- $a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)$ $a_1 \cdot X_1(z) + a_2 \cdot X_2(z)$
- $x(n - m)$ $z^{-m} \cdot X(z)$
- $x_1(n) * x_2(n)$ $X_1(z) \cdot X_2(z)$
- $a^n \cdot x(n)$ $X(a^{-1} \cdot z)$
- $n \cdot x(n)$ $z^{-1} \cdot \left[z \frac{d}{dz} X(z) \right]$

Ejemplo:

$$F(z) = \frac{z^3}{z-1} = \frac{z^3 - z^2 + z^2}{z-1} = \frac{z^2 \cdot (z-1) + z^2}{z-1} = z^2 + \frac{z^2}{z-1}$$

$$F(z) = z^2 + \frac{z^2 - z + z}{z-1} = z^2 + \frac{z \cdot (z-1) + z}{z-1} = z^2 + z + \frac{z}{z-1}$$

$$f_n = \delta(n+2) + \delta(n+1) + \Phi(n) = \Phi(n+2)$$

• 4.4 – Fracciones parciales

Un método muy útil para resolver la Transformada Inversa z es tomando fracciones parciales de $X(z)$. De cada fracción parcial se tiene la esperanza que se encuentre en una forma tan simple que se pueda hallar en una Tabla de Transformadas z de señales, la cual suministrará la secuencia correspondiente en el dominio del tiempo.

Para ello se desarrolla $F(z)$ en fracciones simples y se emplea el par:

• 4.4.1 - Raíces simples

Se hace uso el siguiente par:

$$\left(\frac{z}{z_1} \right)^n \cdot \Phi(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z - z_1} \quad \text{válido para } |z| > |z_1| \quad (4-1)$$

Sea la siguiente función a la que se le quiere hallar la Transformada Inversa z :

$$F(z) = \frac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}$$

Siempre será conveniente hacer la conversión a fracciones simples de la “F(z) dividida por z” en vez de la F(z) sola.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}$$

Esto es para aplicar directamente la transformación (4-1).

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{z+2}{2z^2 - 7z + 3} = \frac{2}{(3 \cdot z)} - \frac{2}{(2z - 1)} + \frac{1}{(3 \cdot (z - 3))}$$

$$\frac{2}{3} \cdot z^{-1} - \frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z - 3} \quad f_n = \frac{2}{3} \cdot \Delta(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \Phi(n) + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3^n \cdot \Phi(n)$$

• 4.4.2 - Raíces múltiples

Se hace uso el siguiente par:

$$C_{n,m} \cdot z_1^{n-m} \cdot \Phi(n) \iff \frac{z}{(z - z_1)^{m+1}} \quad \text{Válido para: } |z| > z_1$$

Sea la siguiente función a la que se le quiere hallar la Transformada Inversa z:

$$F(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (z - 1)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (z - 1)^2} = \frac{8}{(2z - 1)} + \frac{2}{(z - 1)^2} - \frac{4}{(z - 1)} = \frac{4}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{(z - 1)^2} - \frac{4}{(z - 1)}$$

$$f_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \Phi(n) + 2 \cdot n \cdot \Phi(n) - 4 \cdot \Phi(n) \quad f_n = \left[4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot n - 4 \right] \cdot \Phi(n)$$

• 4.5 - Variable Compleja

Este método usa integración de contorno en la región de convergencia donde la integral es evaluada usando residuos.

Haciendo $z = \exp(j\omega T)$ en la definición de transformada z [ecuación (2-1)], queda:

$$F(e^{j\omega \cdot T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T}$$

Así pues en el círculo unidad, $F(z)$ es una función periódica de ω con período $2\pi/T$ y coeficientes dados por el desarrollo en Serie de Fourier (exponencial)

$$f_n = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(e^{j\omega \cdot T}) \cdot e^{j\omega \cdot n \cdot T} d\omega \quad \sigma = \frac{\pi}{T}$$

Forma Compleja: En el círculo unidad

$$z = e^{j\omega \cdot T} \quad dz = j \cdot T \cdot e^{j\omega \cdot T} \cdot d\omega \quad dz = j \cdot T \cdot z \cdot d\omega$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi \cdot j} \oint_{\mathbf{c}} F(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Donde $\mathbf{c}$ es el círculo Unidad

5 - INVERSA NO CAUSAL

Dada una función $F(z)$ como la siguiente:

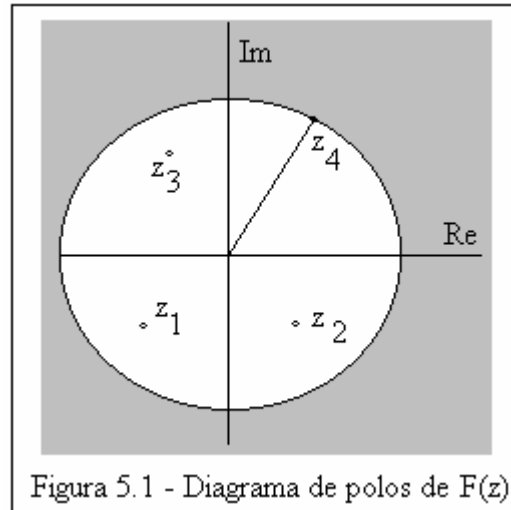
$$F(z) = \sum_i A_i \cdot \frac{z}{z - z_i}$$

del tipo de las que pueden descomponerse en fracciones simples, la misma tiene una Inversa Causal f_n dada por:

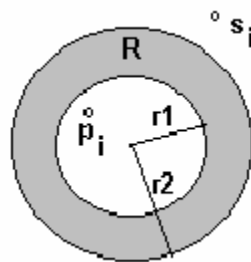
$$f_n = \Phi(n) \cdot \left[\sum_i A_i \cdot (z_i)^n \right]$$

siempre y cuando se la defina para valores de z ubicados en la región externa al círculo de radio $|z| = r_1 = \max |z_i|$. O dicho en otras palabras, si los polos de la función están **todos** contenidos en el círculo del radio citado.

En la figura 5.1 se observa el caso de una función con cuatro polos (z_1, z_2, z_3, z_4) donde $|z_4|$ define el radio de la circunferencia. La zona $z > |z_4|$ (grisada) es la de convergencia de $F(z)$. Vale decir, para que halla Transformada Inversa z **causal**, todos los polos deben estar en el interior del círculo o sobre él.



Se determinará la inversa de $F(z)$ suponiendo que R es un anillo arbitrario.



Se había visto en (2-6) la siguiente transformación;

$$a^n \cdot \Phi(-n-1) \iff -\frac{z}{z-a} \quad \text{para } |z| < a$$

Diferenciando la anterior m veces con respecto de a :

$$C_{n,m} \cdot a^{n-m} \cdot \Phi(-n-1) \iff \frac{-z}{(z-a)^{m+1}} \quad \text{Válido para: } |z| < a$$

Designando por p_i y s_i a los polos de $F(z)$ que están en el interior y exterior de la región R respectivamente.

$$|p_i| \leq r1 \quad |s_i| \geq r2$$

Vista la función como un todo, el total de sus polos lo constituyen los z_i , con lo que $F(z)$ quedará.

$$F(z) = \sum_i A_i \cdot \frac{z}{z - z_i}$$

y su correspondiente Transformada Inversa z será:

$$f_n = \Phi(n) \cdot \left[\sum_i A_i \cdot (z_i)^n \right]$$

Esto sería totalmente correcto si **todos** los polos estuvieran situados dentro de un círculo de radio mayor igual al máximo z_i en valor absoluto.

En cambio, si el radio puede ser cualquiera, habrá polos que quedarán fuera de la región que delimita este círculo (s_i) y polos que quedarán dentro. (p_i)

$$F(z) = \sum_i B_i \cdot \frac{z}{z - p_i} + \sum_i C_i \cdot \frac{z}{z - s_i}$$

$$f_n = \Phi(n) \cdot \left[\sum_i B_i \cdot (p_i)^n \right] - \Phi(-n-1) \cdot \left[\sum_i C_i \cdot (s_i)^n \right]$$

Ejemplo:

$$F(z) = \frac{z+2}{2 \cdot z^2 - 7 \cdot z + 3}$$

Convirtiendo a fracción parcial:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+2}{2 \cdot z^2 - 7 \cdot z + 3} \cdot \frac{1}{z} \quad \text{queda:}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-2}{(2 \cdot z - 1)} + \frac{1}{(3 \cdot (z - 3))} + \frac{2}{(3 \cdot z)} \quad \text{o bien:}$$

$$F(z) = \frac{2}{3} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z - 3}$$

con polos en $z_1 = 1/2$ y $z_2 = 3$

a) En la región $|z| > 3$ todos los polos son interiores.

$$f_n = \frac{2}{3} \cdot \Delta(n) + \Phi(n) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^n - \Phi(n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 3^n$$

b) En la región $1/2 < |z| < 3$ el polo $p_1 = 1/2$ es interior y el polo $s_1 = 3$ es exterior

$$f_n = \frac{2}{3} \cdot \Delta(n) - \Phi(-n-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^n - \Phi(n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 3^n$$

c) En la región $|z| < 1/2$ todos los polos son exteriores.

$$f_n = \frac{2}{3} \cdot \Delta(n) - \Phi(-n-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^n + \Phi(-n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 3^n$$

6 - TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

La siguiente integral permite la transformación de una función en el dominio del tiempo, **f(t)** en otra en el dominio de la frecuencia, **F(ω)**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \quad (6-1)$$

La integral (6-1) debe ser interpretada como el valor principal de Cauchy y se supondrá que existe para toda ω en las funciones bajo consideración.

El valor principal de Cauchy para (6-1) es por definición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

Ejemplo: Dada la función **f(t)**, hallar la Transformada de Fourier de la misma.

$$f(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot U(t) \quad \text{dato} \quad \alpha := 1 \quad f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\alpha \cdot t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Antes de comenzar con el cálculo es necesario hacer algunas acotaciones:

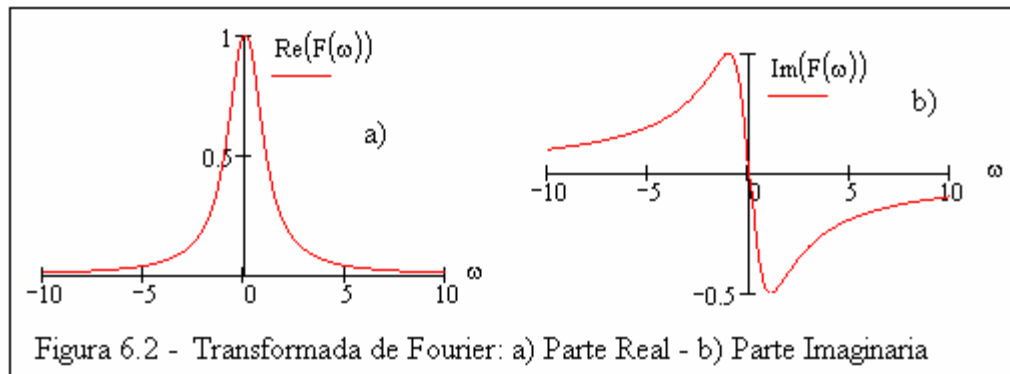
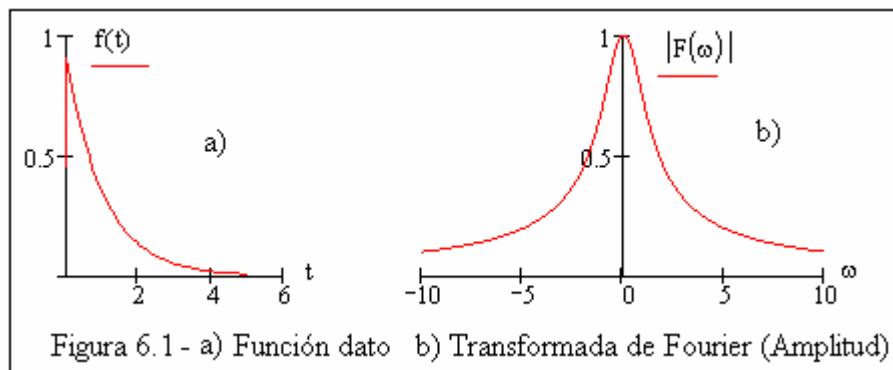
- La función $U(t)$ representa el Escalón Unitario de tiempo continuo.
- Se utilizará la nomenclatura de Mathcad en las expresiones matemáticas, de modo que a través de esta herramienta se puedan verificar y experimentar todos los conceptos vertidos. Así también como las graficaciones pertinentes.

Aplicando (6-1):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha + j \cdot \omega) \cdot t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-(\alpha + j \cdot \omega)} \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad F(\omega) := \frac{1}{\alpha + j \cdot \omega}$$

para: $\alpha := 1 \quad t := -5, -4.9..5 \quad \omega := -10, -9.9..10$



7 - FORMULA DE INVERSION

La idea ahora es rescatar $f(t)$ desde $F(\omega)$. Esto se hace mediante la siguiente expresión:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega \quad (7-1)$$

Demostración: Si se forma la función

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega \quad (7-2)$$

Se desea demostrar que:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_{\sigma}(t) = f(t)$$

Insertando (7-1) en (7-2):

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau d\omega$$

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{j \cdot \omega \cdot (t - \tau)} d\omega d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \frac{\sin(\sigma(t - \tau))}{\pi \cdot \sigma(t - \tau)} d\tau$$

La integral anterior es igual a la convolución de $f(t)$ con el **Kernel de la Integral de Fourier**, $k(t-\tau)$, y tiende a $f(t)$ en todo punto de continuidad de $f(t)$ si σ tiende a infinito.

$$k(t - \tau) = \frac{\sin(\sigma(t - \tau))}{\pi \cdot \sigma(t - \tau)} \quad \text{kernel}$$

Si $f(t)$ es discontinua en un punto t , entonces:

$$f_{\sigma}(t) \quad \text{tiende a} \quad \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad (7-3)$$

Nota: Si $f(t)$ es discontinua en $t = t_0$, en la vecindad de t_0 la función $f_{\sigma}(t)$ no se acerca a $f(t)$ aunque σ sea muy grande. Al acercarse t a t_0 , $f_{\sigma}(t)$ oscila rápidamente (Fenómeno de Gibbs).

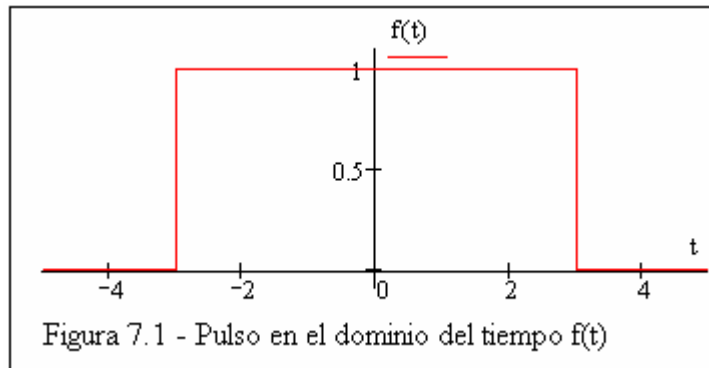
Sin embargo, para σ grande, el rizado se concentra cerca de t_0 , no afectando a ningún punto $t \neq t_0$.

Ejemplo: Para hacer más didáctico el proceso de conceptualización de la Transformada Inversa, se cumplimentarán los siguientes pasos:

- Se considerará un pulso de ancho **2.a** y altura **1**.

- A este pulso se le hallará la Transformada de Fourier $[F(\omega)]$. De modo que, en el proceso de inversión, se conozca el resultado exacto con el objeto de realizar comparaciones.
- Finalmente se aplicará la Fórmula de Inversión (7-2) para hallar $f_{\sigma}(t)$.

$a := 3$ mitad del ancho del pulso
 $t := -5, -4.99 \dots 5$ rango
 $f(t) := \text{if}(|t| < a, 1, 0)$ Función en el dominio del tiempo



Para hallar la Transformada de Fourier, se hace uso de (6-1):

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-a}^a e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \\
 F(\omega) &= \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot a} - e^{-j \cdot \omega \cdot a}) \cdot \frac{2}{2} \\
 F(\omega) &:= 2 \cdot \frac{\sin(a \cdot \omega)}{\omega}
 \end{aligned}$$

Se requiere hacer el proceso inverso (Antitransformada)

$$f_{\sigma}(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\sin(\sigma \cdot (t - \tau))}{\pi \cdot (t - \tau)} d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot (\text{Si}(\sigma \cdot (t + a)) - \text{Si}(\sigma \cdot (t - a)))$$

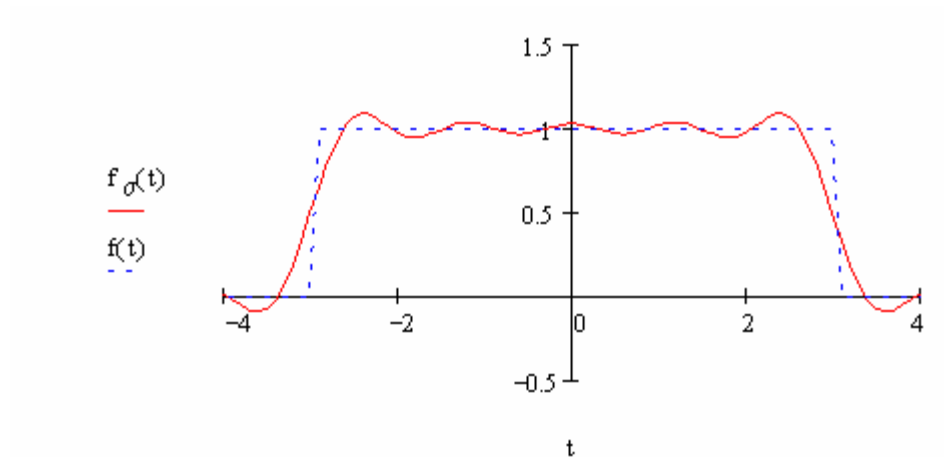
Donde:

$$\text{Si}(\tau) := \int_0^{\tau} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau$$

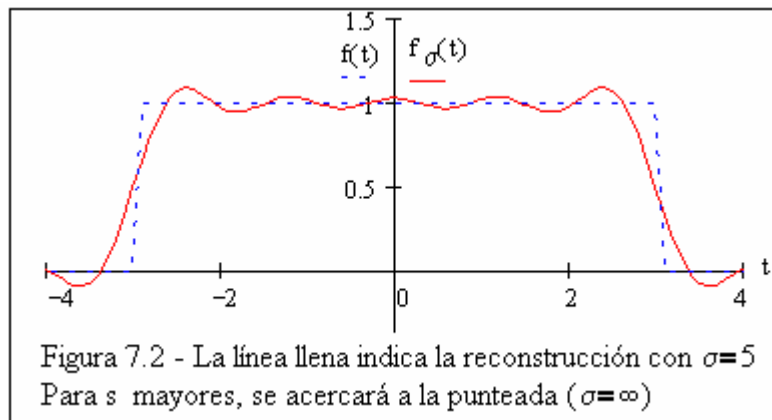
Es la llamada función **Seno Integral**. Existen tablas para calcular sus valores, pero resultará más práctico resolver el problema a través de Mathcad.

para: $\sigma := 5$ $t := -5, -4.9 \dots 5$

$$f_{\sigma}(t) := \frac{1}{\pi} \cdot (\text{Si}(\sigma \cdot (t + a)) - \text{Si}(\sigma \cdot (t - a)))$$



Si ahora se observa el gráfico resultante:



8 - PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

En general, las funciones $f(t)$ y $F(\omega)$ son complejas

$$f(t) = f_1(t) + j \cdot f_2(t) \quad \text{y} \quad F(\omega) = R(\omega) + j \cdot X(\omega)$$

Al ser:

$$e^{j \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

De (6-1), al igualar partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) + f_2(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)) dt \\ X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_2(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) - f_1(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)) dt \end{aligned} \quad (8-1)$$

De (7-1), al realizar el mismo proceso:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) - X(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t)) d\omega \\ f_2(t) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) + R(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t)) d\omega \end{aligned} \quad (8-2)$$

A partir de estos conceptos básicos, se analizarán los distintos casos para transformada de Fourier directa e inversa que se presentan según:

- 8.1 - Si $f(t)$ es real, de (8-1) y ya que $f_2(t) = 0$:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$$

de lo que se deduce:

$$R(-\omega) = R(\omega) \quad X(-\omega) = -X(\omega) \quad \overline{F(\omega)} = F(-\omega)$$

- 8.1.1 - Si $f(t)$ además de **REAL** es **PAR**, esto es $f(t) = f(-t)$. **$X(\omega) = 0$**
Por lo tanto, la **Transformada de Fourier de una función real y par es real**.
En este caso:

$$F(\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

- 8.1.2 - Si $f(t)$ además de **REAL** es **IMPARE**, esto es $f(t) = -f(-t)$. **$R(\omega) = 0$**
Por lo tanto, la **Transformada de Fourier de una función real e impar es imaginaria pura**.
En este caso:

$$F(\omega) = j \cdot X(\omega) = -j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = -j \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$$

Ejemplo:

$$f(t) = \exp(-|t|) \quad \text{función par}$$

Para hallar la Transformada de Fourier se aplica la expresión (6-1)

$$F(z) = \int_{-\infty}^0 \exp(t) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) d\omega + \int_0^{\infty} \exp(-t) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) d\omega$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^0 \exp(t(1 - j \cdot \omega)) d\omega + \int_0^{\infty} \exp(-t(1 + j \cdot \omega)) d\omega$$

$$F(z) = \frac{\exp(t(1 - j \cdot \omega))}{1 - j \cdot \omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{\exp(-t(1 + j \cdot \omega))}{-(1 + j \cdot \omega)} \Big|_0^{\infty}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1 - j \cdot \omega} + \frac{1}{1 + j \cdot \omega} = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

Como era de esperar, la Transformada es una función real.

Si $F(\omega)$ es la Transformada de Fourier de $f(t)$, lo que se puede expresar como:

$$f(t) \iff F(\omega)$$

se cumplen las siguientes propiedades:

- **Simetría:** $F(t) \iff 2 \cdot \pi \cdot f(-\omega)$

- **Funciones Conjugadas:** $\overline{f(t)} \iff \overline{F(-\omega)}$

- **Escalado:** $f(a \cdot t) \iff \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

- **Desplazamiento:** Para cualquier a real:

$$f(t - a) \iff e^{-j \cdot a \cdot \omega} \cdot F(\omega) \quad e^{j \cdot a \cdot t} \cdot f(t) \iff F(\omega - a)$$

- **Modulación:**

$$f(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \iff \frac{1}{2} \cdot (F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0))$$

- **Derivadas:**

$$(-j \cdot \omega)^n \cdot f(t) \iff \frac{d^n}{d \omega^n} F(\omega) \quad \frac{d^n}{d t^n} f(t) \iff (j \cdot \omega)^n \cdot F(\omega)$$

- **Teorema de Convolución:** Si

$$f_1(t) \iff F_1(\omega) \quad \text{y} \quad f_2(t) \iff F_2(\omega) \quad \text{entonces:}$$

$$f_1(t) * f_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

- **Fórmula de Parseval:**

$$y_1(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y_1(\omega) \quad \text{e} \quad y_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y_2(\omega)$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(t) \cdot \overline{y_2(t)} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(\omega) \cdot \overline{Y_2(\omega)} \, d\omega$$

- **Teorema de la Energía:**

Si $y_1(t)$ es igual a $y_2(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|y(t)|)^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|Y(\omega)|)^2 \, d\omega$$

9 - SERIES DE FOURIER

Dada una función $f(t)$ periódica de período T , es posible expresarla por medio de la siguiente Serie:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) \right) \right]$$

Donde los coeficientes a_0 , a_k y b_k se determinan por las expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) \, dt$$

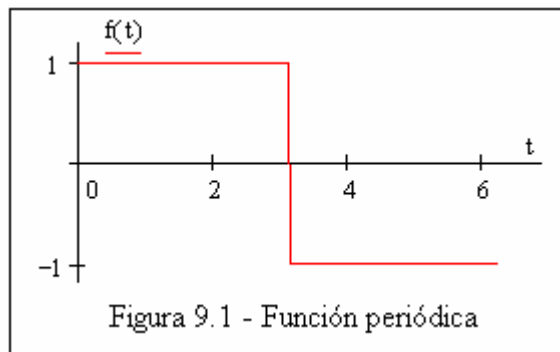
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) \, dt$$

A modo de ejemplo, supóngase que se quiere determinar el desarrollo en serie de Fourier de la siguiente función (figura 9.1):

$T := 2 \cdot \pi$ período de la función

$f(t) := \text{if}\left(t < \frac{T}{2}, 1, -1\right)$ función

$t := 0, 0.01 \dots T$ rango



Es necesario aclarar que la función se está representando en un período completo, pero la misma se repite infinitamente hacia $+t$ y $-t$.

Para calcular los coeficientes:

$N := 10$ número para el máximo índice de coeficientes

$k := 0 \dots N$ rango para los coeficientes

$$a_0 := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

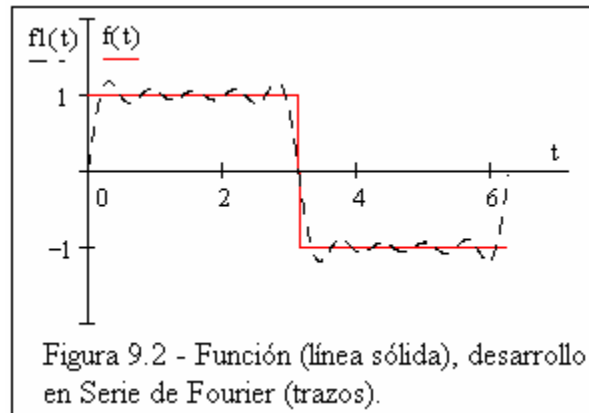
$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T}\right) dt$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T}\right) dt$$

Reconstruyendo $f(t)$, de acuerdo a la expresión de Fourier (se la pasa a llamar $f_1(t)$ a los efectos de comparación posterior):

$$f_1(t) := \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^N \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T}\right) \right) \right]$$

El gráfico comparativo se observa en la figura 9.2.



10 - SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Dada una señal periódica $f(t)$ de período T , la misma puede ser representada por una serie exponencial compleja que responde a la forma:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot \exp \left[j \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T} \cdot t \right) \right]$$

Donde:

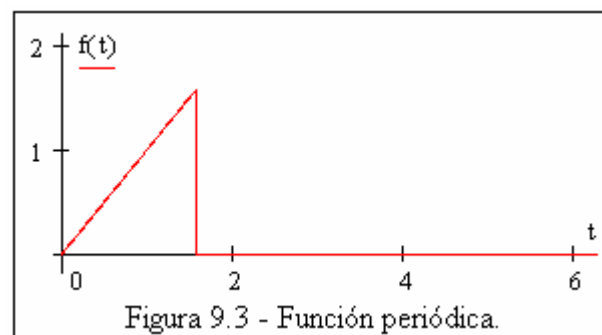
$$X_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \exp \left[-j \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T} \cdot t \right) \right] dt$$

A modo de ejemplo, supóngase que se quiere determinar el desarrollo en serie exponencial de Fourier de la siguiente función (figura 9.3):

$T := 2 \cdot \pi$ período de la función

$f(t) := \text{if} \left(t < \frac{T}{4}, t, 0 \right)$ función

$t := 0, 0.01 \dots T$ rango



Para calcular los coeficientes:

$N := 5$ número para el máximo índice de coeficientes

$k := 0..N$ rango para los coeficientes

$$X_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \exp \left[-j \cdot \left[\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(k - \frac{N}{2} \right)}{T} \cdot t \right] \right] dt$$

$$f_l(t) := \sum_{k=0}^N X_k \cdot \exp \left[j \cdot \left[\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(k - \frac{N}{2} \right)}{T} \cdot t \right] \right]$$

El gráfico comparativo se observa en la figura 9.4.

