

ECUACION DIFERENCIA PARA UN SISTEMA DE TIEMPO DISCRETO

CAPITULO VI

OBJETIVOS:

- Plantear y evaluar las Ecuaciones Diferencia que definen el comportamiento de un Circuito Digital, incorporando los bloques esenciales que componen este tipo de circuitos: Multiplicadores, Delays y Sumadores.
- Vincular los conceptos vistos sobre la Transformada-z y Transformada de Fourier en la determinación de la respuesta en frecuencia de este tipo de circuitos. Analizando temas como Función de Transferencia y Tipos de Sistemas: Recursivos y No-recursivos.
- Internalizar los conceptos de Análisis y Síntesis en circuitos de Sistemas Discretos. Considerando, primordialmente, la incidencia de la ubicación de los polos y ceros de los sistemas en el comportamiento en frecuencia del circuito.

34 - ECUACION DIFERENCIA PARA UN SISTEMA DE TIEMPO DISCRETO

Los dispositivos discretos con los cuales se habrá de trabajar satisfacen la relación I/O siguiente en forma de ecuación diferencia:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot x((n-k) \cdot T) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot y((n-r) \cdot T) \quad (34-1)$$

siendo T la tasa de muestreo.

Se puede mostrar que la forma de convolución se puede generar a partir de esta expresión considerando el caso para $b_r = 0$, $r > 1$. Esto produce:

$$b_0 \cdot y(n \cdot T) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x((n-k) \cdot T) \quad (34-2)$$

Si $a_k/b_0 = h(k \cdot T)$, se tiene

$$y(n \cdot T) = \sum_{k=0}^N h(k \cdot T) \cdot x((n-k) \cdot T) \quad (34-3)$$

la cual es la relación de convolución en tiempo discreto. Se supondrá que todos los sistemas de tiempo discreto a estudiar satisfacen la ecuación (34-1).

Si se expande la ecuación (34-1) y se examinan unos pocos términos, se pueden obtener algunos resultados generales:

$$a_0 \cdot x(n \cdot T) + a_1 \cdot x((n-1) \cdot T) + a_2 \cdot x((n-2) \cdot T) \dots + a_N \cdot x((n-N) \cdot T) = \dots$$

$$\mathbf{y}(n.T) = b_0 \cdot y(n.T) + b_1 \cdot y((n-1).T) + b_2 \cdot y((n-2).T) \dots + b_M \cdot y((n-M).T) \quad (34-4)$$

Despejando $y(n.T)$:

$$y(n.T) = \frac{1}{b_0} \left[a_0 \cdot x(n.T) + a_1 \cdot x((n-1).T) + a_2 \cdot x((n-2).T) + \dots + a_N \cdot x((n-N).T) - b_1 \cdot y((n-1).T) - b_2 \cdot y((n-2).T) - \dots - b_M \cdot y((n-M).T) \right] \quad (34-5)$$

Esto muestra que la salida del sistema general de tiempo discreto, $y(n.T)$, para cualquier valor $n.T$, está determinado por las N entradas presente y previas [$x(n.T)$, $x((n-1).T)$, etc.] y las M salidas pasadas [$y((n-1).T)$, $y((n-2).T)$, etc.].

Además, para un sistema causal, si $x(n.T) = 0$, para $n < k$, entonces $y(n.T)$ es también cero para $n < R$ donde R es un entero arbitrario.

35 - EVALUACION DE LA ECUACION DIFERENCIA DE TIEMPO DISCRETO

En este punto, se comenzará a ver cómo se pueden utilizar las técnicas digitales.

La ecuación (34-5) involucra sólo sumas y multiplicaciones las cuales pueden ser realizadas muy fácilmente usando técnicas digitales. Todo esto requiere que los valores de $\{a_k\}$ y $\{b_r\}$ sean almacenados en memoria y luego multiplicados con los valores apropiados de $x(n.T - k.T)$ e $y(n.T - r.T)$.

Estas entradas y salidas pasadas deben también ser almacenadas en memoria de modo que puedan estar disponibles para cuando se necesiten.

Debe mencionarse que la solución expuesta requiere $(N+M)$ multiplicaciones y otras tantas sumas para cada valor de n . Si se supone que $M=N$, se requieren $4.N$ operaciones por cada punto. Si hay también N puntos, hay $4.N^2$ operaciones requeridas para encontrar la secuencia completa de salida.

Un cálculo de 16 puntos requiere 1024 operaciones; un cálculo de 64 puntos requiere 16384 operaciones. Es obvio que aunque los cálculos son sencillos, los tiempos necesitados para hacerlos con valores de N grandes serían excesivos. Cada valor requerido para determinar la sumatoria de la ecuación (34-5) debe ser buscado desde la memoria al procesador, ejecutar una instrucción (ADD o MULTIPLY), y almacenar la suma o producto en la memoria.

Este fue un hecho que limitó el uso de las computadoras digitales y microprocesadores en aplicaciones de procesamiento de señal. Sin embargo, se ha visto que el tiempo puede ser reducido en un factor proporcional a $N \log_2(N)$, introduciendo un gran ahorro en tiempo.

Volviendo a la ecuación (34-5), varios términos pueden ser definidos a partir de ella. Estos términos estarán relacionados a un sistema general de tiempo discreto cuyas relaciones I/O (entrada/salida) son satisfechas por esta ecuación.

Si sólo las entradas pasadas y presentes determinan la salida presente (en este caso $b_i = 0$ con $1 \leq i \leq M$) el sistema de tiempo discreto se llama **NORECURSIVO**. Si además de las entradas presentes y pasadas, las salidas pasadas también determinan la salida presente, el sistema se llama **RECURSIVO**.

36 - CARACTERISTICAS DEL SISTEMA

Para tener alguna idea de los sistemas que son representados por la ecuación (34-5), considérese una como la siguiente:

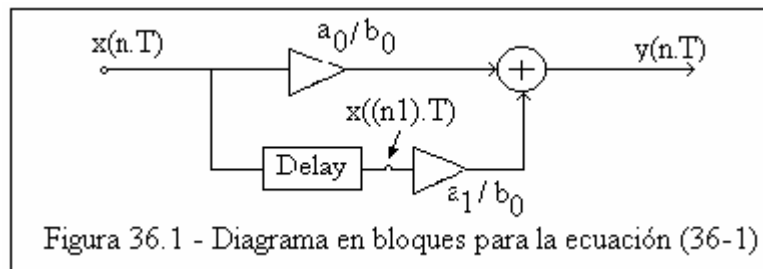
$$y(n.T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot x(n.T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x((n-1).T) \quad (36-1)$$

A partir de las definiciones previas, la ecuación (36-1) representa un sistema no recursivo con $N=1$. Se ve que la salida se obtiene por la presente $[x(n.T)]$ y la más reciente de las entradas $[x((n-1).T)]$ sin términos de salidas pasadas. Si se desea realizar esta ecuación con hardware, debe incluirse:

- (a) dos multiplicadores (por ejemplo, amplificadores o atenuadores),
- (b) un circuito sumador, y
- (c) un dispositivo que pueda almacenar la entrada previa por un intervalo de muestreo de modo que pueda ser sumada a la presente.

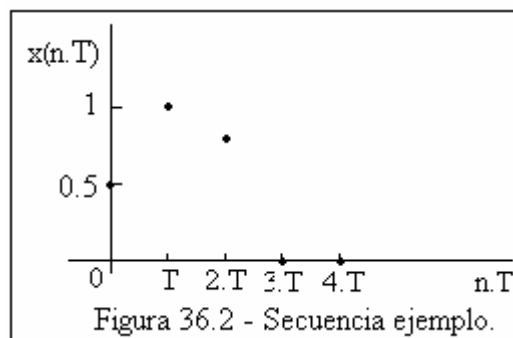
Los dos primeros dispositivos pueden ser fácilmente fabricados a partir de dispositivos analógicos o digitales; sin embargo, ya que se ha de trabajar con señales en formato digital, la propuesta es usar dispositivos de este tipo para el procesamiento.

El tercer ítem en el circuito debe proveer almacenamiento por un intervalo de muestreo $[\text{desde } (n.T-T) \text{ a } n.T]$. Esto puede ser llevado a cabo más fácilmente por una memoria o un registro de desplazamiento. La Figura 36.1 muestra el diagrama en bloques de un circuito que puede ser usado para realizar la ecuación (36-1).



La señal de entrada, para un instante de muestreo dado, se aplica a la entrada del sistema donde es multiplicada por a_0/b_0 y a la misma vez almacenada en un delay hasta el próximo instante de muestreo. La salida de la unidad delay para cualquier instante de muestreo es siempre la entrada del instante de muestreo previo.

Para ver cómo opera el circuito, considérese $\{x(n.T)\}$ como la secuencia mostrada en la Figura 36.2.



Los parámetros del circuito son elegidos como $a_0/b_0 = 1$ y $a_0/b_1 = 0.5$.

Para $n.T=0$, se aplica al sistema $x(0)=0.5$. Como $x((n-1).T) = x((n.T-T) = x(-T) = 0$, un valor 0 fue almacenado en la unidad delay en el instante de muestreo previo ($n.T = -T$). La salida es entonces:

$$y(n.T) = 1 \cdot x(n.T) + 0.5 \cdot x((n-1).T)$$

Para $n.T = 0$, esta se transforma en:

$$y(0) = 1 \cdot x(0) + 0.5 \cdot x(-T) = 1 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0 = 0.5$$

Al mismo tiempo que $x(0) = 0.5$ esta siendo multiplicada y alimentada al sumador de salida, está siendo almacenada en la unidad delay para ser usada en el próximo instante de muestreo.

Para $n.T = T$, $x(T) = 1$, $x((n-1).T) = x((n.T-T) = x(0) = 0.5$, la cual ha sido almacenada en el instante previo. La salida es entonces:

$$y(T) = 1 \cdot x(T) + 0.5 \cdot x(0) = 1 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 = 1.25$$

Como antes, el valor de $x(T)$ es almacenado para usarlo en $n.T = 2.T$.

Para $n.T = 2.T$, $x((n-1).T) = x((n.T-T) = x(T) = 1$. La salida es entonces:

$$y(2.T) = 1 \cdot x(2.T) + 0.5 \cdot x(T) = 1 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 1.25 = 1.25$$

Para $n.T = 3.T$

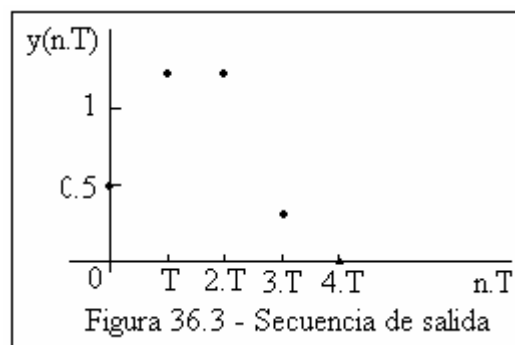
$$y(3.T) = 1 \cdot x(3.T) + 0.5 \cdot x(2.T) = 1 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.75 = 0.375$$

Para $n.T = 4.T$

$$y(4.T) = 1 \cdot x(4.T) + 0.5 \cdot x(3.T) = 1 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 = 0$$

De ahí en adelante todos los demás valores son nulos

El gráfico correspondiente a la función de salida se aprecia en la Figura 36.3.



Para tratar este problema con Mathcad, se crea un vector con los datos agregándole una entrada (la última) en cero ante la imposibilidad de trabajar con subíndices negativos.

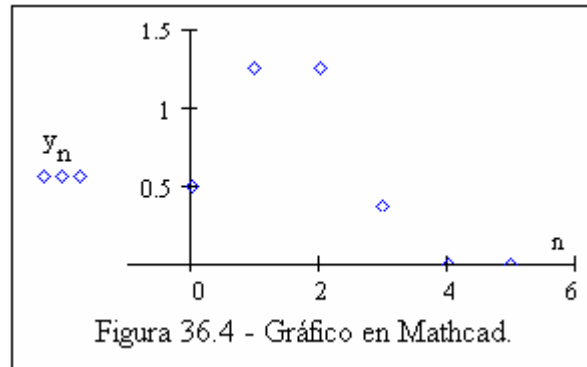
$$x := (0.5 \quad 1 \quad .75 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad x := x^T \quad \text{Vector de datos}$$

$$N := \text{length}(x) \quad \text{Longitud del vector}$$

$$n := 0 \dots \text{length}(x) - 1 \quad \text{Indice}$$

$$y_n := 1 \cdot x_n + 0.5 \cdot x_{\text{mod}(n-1+N, N)} \quad \text{Ecuación}$$

Mathcad entrega un gráfico como el de la Figura 36.4.



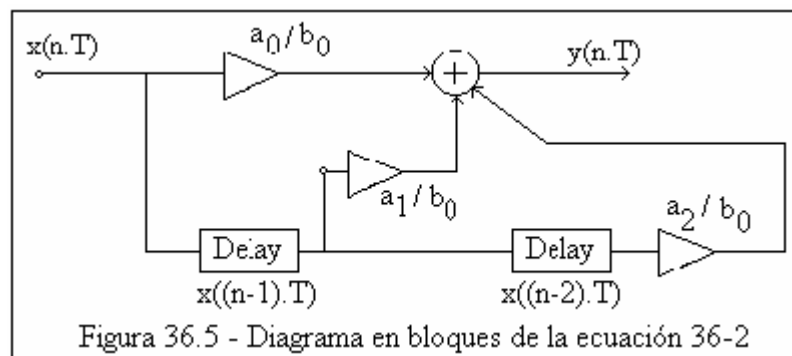
Aunque el ejemplo anterior era simple, establece las reglas basales para representar (y realizar) los términos en la ecuación (34-5) en un diagrama de bloques y hardware. (Es de destacar que esas simples operaciones matemáticas se pueden realizar con software).

Cada término en la ecuación requiere una sección multiplicadora y una delay: la salida de un delay, $x(n \cdot T - r \cdot T)$ fue almacenada en el tiempo de muestreo previo. Las unidades delay están conectadas de tal modo que cada una tenga su salida disponible, de manera que pueda ser usada como la entrada al sumador o a otra sección delay.

Para demostrar esto, se representará un sistema no recursivo con $N=2$ en forma de diagrama de bloque. La ecuación para este sistema está dada por:

$$y(n \cdot T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot x(n \cdot T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x((n-1) \cdot T) + \frac{a_2}{b_0} \cdot x((n-2) \cdot T) \quad (36-2)$$

Esto se realiza con el circuito mostrado en la Figura 36.5.

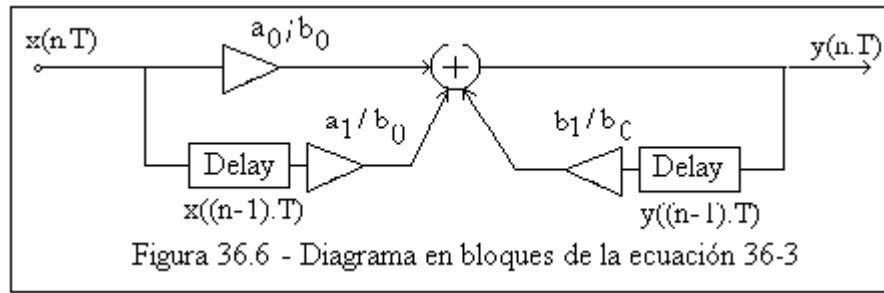


La salida presente de cada unidad delay es la entrada del instante de muestreo previo. Si el sistema incluye una o más salidas pasadas es recursivo.

Un simple sistema recursivo es uno con $N=M=1$.

$$y(n \cdot T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot x(n \cdot T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x((n-1) \cdot T) - \frac{b_1}{b_0} \cdot y((n-1) \cdot T) \quad (36-3)$$

La realización circuital usa los mismos dispositivos que para los sistemas no recursivos. El circuito que produce la ecuación (36-3) está dado en la Figura 36.6.



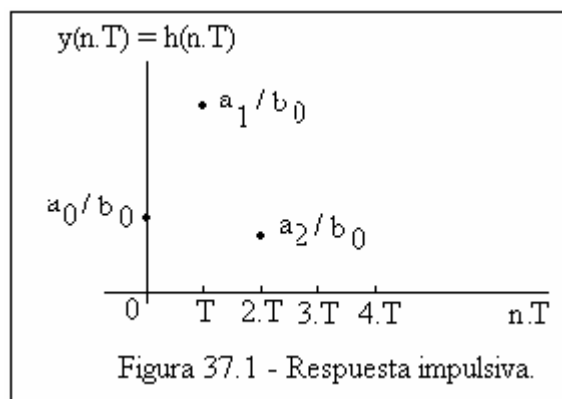
La salida del sistema en $n.T$ depende ahora de la salida del sistema en $n.T - T$ [$y((n-1).T)$] así también como de la presente [$y(n.T)$] y de la entrada más reciente pasada [$x((n-1).T)$] (en este caso la salida pasada debe también ser almacenada).

37 - RESPUESTA IMPULSIVA

La función de transferencia de los circuitos mostrados en las figuras anteriores se puede obtener haciendo que $x(n.T)$ sea la función impulsiva $\delta(n.T)$. Para el penúltimo circuito, representativo de un sistema no recursivo, se tiene:

$$\begin{aligned} h(0.T) &= \frac{a_0}{b_0} \cdot x(0.T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x((0-1).T) + \frac{a_2}{b_0} \cdot x((0-2).T) & h(0.T) &= \frac{a_0}{b_0} \\ h(T) &= \frac{a_0}{b_0} \cdot x(T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x(T-T) + \frac{a_2}{b_0} \cdot x(T-2.T) & h(T) &= \frac{a_1}{b_0} \\ h(2.T) &= \frac{a_0}{b_0} \cdot x(2.T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x(2.T-T) + \frac{a_2}{b_0} \cdot x(2.T-2.T) & h(2.T) &= \frac{a_2}{b_0} \end{aligned}$$

Para $n > 2$, $y(n.T) = 0$. Como la salida es el resultado de una entrada impulsiva, $y(n.T) = h(n.T)$, la respuesta impulsiva. Esto se muestra en la Figura 37.1, donde se han supuesto valores nulos para b_i / b_0 , $i > 0$. Como la respuesta impulsiva es 0 para $n > 2$, el sistema es FIR (Finite Impulsive Response).



Esto será siempre cierto para todos los sistemas no recursivos con $N = \text{finito}$. Además, la respuesta impulsiva de un sistema no recursiva es el conjunto de los coeficientes de las entradas presentes y pasadas: $\mathbf{h(k.T)} = \mathbf{a_k/b_0}$. Estas pueden ser obtenidas desde el circuito o de las ecuaciones del sistema por inspección.

Para encontrar la respuesta impulsiva de un sistema recursivo, se aplica el impulso al circuito de la última figura:

$$y(n.T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot x(n.T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x((n-1).T) - \frac{b_1}{b_0} \cdot y((n-1).T) \quad (37-1)$$

como el sistema es causal:

$$y(0.T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot 1 + \frac{a_1}{b_0} \cdot 0 - \frac{b_1}{b_0} \cdot 0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$y(T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot x(T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x(T-T) - \frac{b_1}{b_0} \cdot y(T-T)$$

$$y(T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot 0 + \frac{a_1}{b_0} \cdot 1 - \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{a_0}{b_0}$$

$$y(2.T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot x(2.T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x(2.T-T) - \frac{b_1}{b_0} \cdot y(2.T-T)$$

$$y(2.T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot 0 + \frac{a_1}{b_0} \cdot 0 - \frac{b_1}{b_0} \cdot \left(\frac{a_1}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{a_0}{b_0} \right) = -\frac{b_1}{b_0} \cdot \left(\frac{a_1}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{a_0}{b_0} \right)$$

Para $n > 2$, se ve fácilmente que todos los valores de $x(n.T)$ son ceros, sin embargo, como la salida previa es parte de la entrada (a diferencia del filtro no recursivo), la salida recursiva será no nula aunque la entrada se haya anulado.

Esto implica que el sistema recursivo es del tipo IIR (Infinite Impulse Response). Nótese que la respuesta impulsiva no puede ser obtenida por inspección y debe ser calculada para cada sistema.

Basado en lo expuesto, se ve que un sistema que es causal, lineal, de tiempo discreto, e invariante al desplazamiento puede ser representado por la ecuación (34-5). Dependiendo de la forma de la ecuación satisfecha por el filtro, será **recursivo** (y posiblemente IIR) o **no recursivo** (y FIR para N finito).

En el otro extremo, un sistema puede ser diseñado y realizado arrancando con la ecuación diferencia, estando sus características determinadas por el tipo de ecuación y por los valores de los coeficientes. $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$.

38 - TRANSFORMADA-z DE UNA ECUACION DIFERENCIA

La ecuación (34-1) provee la ecuación diferencia que se usará para representar un sistema lineal de tiempo discreto con características de filtro. El paso inicial es obtener su transformada-z. Se hará uso de la propiedad de delay de la transformada-z:

$$\begin{aligned} x(n.T) & \quad \langle \text{=====} \rangle \quad X(z) \\ x((n-r).T) & \quad \langle \text{=====} \rangle \quad X(z) \cdot z^{-r} \end{aligned}$$

Luego, la transformada-z de la ecuación (34-1) es:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot X(z) \cdot z^{-k} = \sum_{r=0}^M b_r \cdot Y(z) \cdot z^{-r}$$

que se convierte en:

$$X(z) \cdot \sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k} = Y(z) \cdot \sum_{r=0}^M b_r \cdot z^{-r} \quad (38-1)$$

39 - FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA, H(z)

Para encontrar la función de transferencia del sistema, H(z) se resuelve la ecuación (38-1) para Y(z)/H(z). Esto produce:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}}{\sum_{r=0}^M b_r \cdot z^{-r}} \quad (39-1)$$

Esta ecuación muestra que si el sistema es descripto por una ecuación diferencia con coeficientes constantes, su función de transferencia, H(z), es el cociente de dos polinomiales en z^{-1} [en este caso, H(z) es una función racional]. La ecuación (39-1) es equivalente en la forma a la función de transferencia en tiempo continuo, $H(s)=Y(s)/X(s)$ y será usada de una manera similar.

40 - EJEMPLO

Considérese ahora la respuesta de un filtro digital con una función de transferencia H(z) para una señal sinusoidal pura:

$$x_n = \begin{cases} A \cdot \sin(c \cdot n) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Para hallar la transformada-z, se descompone en:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot \sin(c \cdot n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot c \cdot n} - e^{-j \cdot c \cdot n}) \cdot z^{-n}$$

$$X(z) = \frac{A}{2 \cdot j} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{j \cdot c \cdot n} \cdot z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j \cdot c \cdot n} \cdot z^{-n} \right)$$

El primer término de la expresión entre paréntesis es una serie geométrica, de la que se puede calcular la razón (**q**):

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{j \cdot c \cdot n} \cdot z^{-n} = 1 + e^{j \cdot c \cdot 1} \cdot z^{-1} + \dots \quad q = e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}$$

Calculando la suma de la serie, cuando es convergente

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}}$$

Del mismo modo se puede hacer con el segundo término. El resultado final es:

$$X(z) = \frac{A}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}} \right)$$

Desarrollando la resta entre paréntesis:

$$X(z) = \frac{A}{2 \cdot j} \cdot \left[\frac{1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1} - (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1})}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \right] = \frac{A}{2 \cdot j} \cdot \left[\frac{e^{j \cdot c} \cdot z^{-1} - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \right]$$

$$X(z) = \frac{A \cdot z^{-1}}{2 \cdot j} \cdot \left[\frac{2 \cdot j \cdot \sin(c)}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \right] = \frac{A \cdot z^{-1} \cdot \sin(c)}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})}$$

La transformada-z de la salida, $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$, puede ser escrita como una fracción parcial:

$$Y(z) = \frac{A \cdot z^{-1} \cdot \sin(c) \cdot H(z)}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} = \frac{K}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1})} + \frac{L}{(1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})}$$

$$K \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}) + L \cdot (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) = A \cdot z^{-1} \cdot \sin(c) \cdot H(z)$$

Para: $z = e^{-j \cdot c}$

$$L \cdot (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) = A \cdot e^{j \cdot c} \cdot \sin(c) \cdot H(e^{-j \cdot c}) \quad L = \frac{A \cdot e^{j \cdot c} \cdot \sin(c) \cdot H(e^{-j \cdot c})}{1 - e^{j \cdot c} \cdot e^{j \cdot c}}$$

Para: $z = e^{j \cdot c}$

$$K \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}) = A \cdot e^{-j \cdot c} \cdot \sin(c) \cdot H(e^{j \cdot c}) \quad K = \frac{A \cdot e^{-j \cdot c} \cdot \sin(c) \cdot H(e^{j \cdot c})}{1 - e^{-j \cdot c} \cdot e^{-j \cdot c}}$$

Simplificando:

$$L = \frac{A \cdot \sin(c) \cdot H(e^{-j \cdot c})}{e^{-j \cdot c} - e^{j \cdot c}} = \frac{A \cdot \sin(c) \cdot H(e^{-j \cdot c})}{-j \cdot 2 \cdot \sin(c)} = \frac{A \cdot H(e^{-j \cdot c})}{-j \cdot 2}$$

$$K = \frac{A \cdot \sin(c) \cdot H(e^{j \cdot c})}{e^{j \cdot c} - e^{-j \cdot c}} = \frac{A \cdot \sin(c) \cdot H(e^{j \cdot c})}{j \cdot 2 \cdot \sin(c)} = \frac{A \cdot H(e^{j \cdot c})}{j \cdot 2}$$

Finalmente:

$$Y(z) = \frac{A \cdot H(e^{j \cdot c})}{2 \cdot j \cdot (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1})} - \frac{A \cdot H(e^{-j \cdot c})}{2 \cdot j \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} + \text{terminos_debidos_a_polos_de_H(z)}$$

Examínese el comportamiento en el límite de y_n cuando n tiende a infinito. Cuando se toma la transformada-z inversa de $Y(z)$, los términos debidos a los polos de $H(z)$ llevan a sinusoides que tienden a cero cuando n tiende a infinito. Los dos primeros términos de la ecuación anterior se pueden reescribir como:

$$\frac{A \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}) - A \cdot H(e^{-j \cdot c}) \cdot (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1})}{2 \cdot j \cdot (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})}$$

$$\frac{A \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot [1 - (\cos(c) - j \cdot \sin(c)) \cdot z^{-1}] - A \cdot H(e^{-j \cdot c}) \cdot [1 - (\cos(c) + j \cdot \sin(c)) \cdot z^{-1}]}{2 \cdot j \cdot (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})}$$

El numerador queda:

$$A \cdot H(e^{j \cdot c}) - A \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot \cos(c) \cdot z^{-1} - j \cdot A \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot \sin(c) \cdot z^{-1} \dots$$

$$+ A \cdot H(e^{-j \cdot c}) \cdot \cos(c) \cdot z^{-1} - A \cdot H(e^{-j \cdot c}) - j \cdot A \cdot H(e^{-j \cdot c}) \cdot \sin(c) \cdot z^{-1}$$

Agrupando partes reales e imaginarias:

$$A \cdot H(e^{j \cdot c}) - A \cdot H(e^{-j \cdot c}) - A \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot \cos(c) \cdot z^{-1} + A \cdot H(e^{-j \cdot c}) \cdot \cos(c) \cdot z^{-1} \dots$$

$$+ (-j) \cdot (A \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot \sin(c) \cdot z^{-1} + A \cdot H(e^{-j \cdot c}) \cdot \sin(c) \cdot z^{-1})$$

$$A \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot (1 - \cos(c) \cdot z^{-1}) - A \cdot H(e^{-j \cdot c}) \cdot (1 - \cos(c) \cdot z^{-1}) \dots$$

$$+ (-j \cdot A \cdot \sin(c) \cdot z^{-1}) \cdot (H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c}))$$

$$A \cdot (1 - \cos(c) \cdot z^{-1}) \cdot (H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})) - j \cdot A \cdot \sin(c) \cdot z^{-1} \cdot (H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c}))$$

quedando la fracción completa:

$$\frac{A \cdot (1 - \cos(c)) \cdot z^{-1} \cdot (H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})) - j \cdot A \cdot \sin(c) \cdot z^{-1} \cdot (H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c}))}{2 \cdot j \cdot (1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})}$$

Reacomodando:

$$A \cdot \frac{\sin(c) \cdot z^{-1}}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c})}{2} \dots$$

$$+ A \cdot \frac{(1 - \cos(c)) \cdot z^{-1}}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \cdot \left(\frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{2 \cdot j} \right)$$

Siendo:

$$\frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}} \right) \longleftrightarrow \sin(n \cdot c)$$

$$\frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left[\frac{e^{j \cdot c} \cdot z^{-1} - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \right] \longleftrightarrow \sin(n \cdot c)$$

$$\frac{z^{-1} \cdot \sin(c)}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \longleftrightarrow \sin(n \cdot c)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1}} \right) \longleftrightarrow \cos(n \cdot c)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1} + 1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \right] \longleftrightarrow \cos(n \cdot c)$$

$$\frac{1 - \cos(c) \cdot z^{-1}}{(1 - e^{j \cdot c} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j \cdot c} \cdot z^{-1})} \longleftrightarrow \cos(n \cdot c)$$

Hallando la transformada-z inversa, queda:

$$y_n = A \cdot \sin(n \cdot c) \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c})}{2} + A \cdot \cos(n \cdot c) \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{2 \cdot j}$$

Al ser una suma de seno y coseno se plantea una solución senoidal con desfase:

$$\begin{aligned}
 R \cdot \sin(nc + S) &= A \cdot \sin(nc) \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c})}{2} + A \cdot \cos(nc) \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{2 \cdot j} \\
 R \cdot \sin(nc) \cdot \cos(S) + R \cdot \cos(nc) \cdot \sin(S) &= A \cdot \sin(nc) \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c})}{2} \dots \\
 &\quad + A \cdot \cos(nc) \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{2 \cdot j} \\
 R \cdot \cos(S) &= A \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c})}{2} \quad R \cdot \sin(S) = A \cdot \frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{2 \cdot j}
 \end{aligned}$$

Elevando cada expresión al cuadrado y sumando

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \frac{1}{4} \cdot \left(H(e^{j \cdot c})^2 + 2 \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot H(e^{-j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c})^2 - H(e^{j \cdot c})^2 \dots \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot H(e^{j \cdot c}) \cdot H(e^{-j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})^2 \right) \\
 R^2 &= H(e^{j \cdot c}) \cdot H(e^{-j \cdot c}) = (|H(e^{j \cdot c})|)^2 \quad R = |H(e^{j \cdot c})|
 \end{aligned}$$

En cambio, dividiendo miembro a miembro:

$$\begin{aligned}
 \frac{R \cdot \sin(S)}{R \cdot \cos(S)} &= \frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{2 \cdot j} \cdot \frac{2}{H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c})} \\
 R \cdot \tan(S) &= \frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{j \cdot (H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c}))} \quad S = \text{atan} \left[\frac{H(e^{j \cdot c}) - H(e^{-j \cdot c})}{j \cdot (H(e^{j \cdot c}) + H(e^{-j \cdot c}))} \right]
 \end{aligned}$$

Dado que $H(e^{j \cdot c})$ es un complejo con parte real y parte imaginaria y $H(e^{-j \cdot c})$ es su conjugado. Haciendo:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j \cdot c}) &= R + j \cdot I \quad H(e^{-j \cdot c}) = R - j \cdot I \\
 S &= \text{atan} \left[\frac{R + j \cdot I - (R - j \cdot I)}{j \cdot (R + j \cdot I + (R - j \cdot I))} \right] = \text{atan} \left(\frac{j \cdot 2 \cdot I}{j \cdot 2 \cdot R} \right) = \text{atan} \left(\frac{I}{R} \right) \\
 S &= \arg(H(e^{j \cdot c}))
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$y_n = A \cdot (|H(e^{j \cdot c})| \cdot \sin(nc + \arg(H(e^{j \cdot c}))))$$

Así, la respuesta en estado estacionario de un filtro digital estable para una entrada sinusoidal de frecuencia c es una senoide de la misma frecuencia. Su amplitud es la de

la entrada escalada por $|H(e^{j\omega})|$, la **ganancia** del filtro y su **fase** es cambiada por $\arg[H(e^{j\omega})]$.

El comportamiento del filtro en el círculo unidad $|z| = 1$ es, por lo tanto, de especial interés.

Se llama a $H(e^{j\lambda})$ la **respuesta en frecuencia**. Su amplitud $|H(e^{j\lambda})|$ con $-\pi < \lambda < \pi$ es la **respuesta en amplitud** del filtro digital; y su argumento $\arg[H(e^{j\lambda})]$ la **característica de fase**. λ es la **frecuencia digital**.

41 - SISTEMA NO RECURSIVO

Para valores de $b_0=1$ y $b_i=0$, para todo $i > 0$, el sistema bajo consideración es **no recursivo**. Su función de transferencia está dada por:

$$H(z) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k} \quad (41-1)$$

Para N finito, la respuesta del sistema es de duración finita (FIR). Un ejemplo de sistema FIR está dado por la ecuación (36-1):

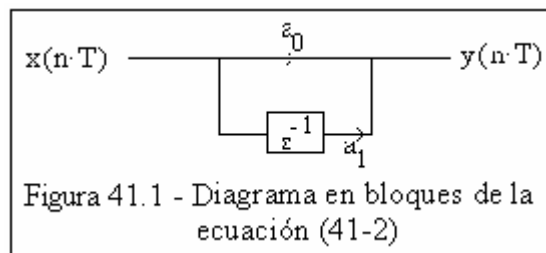
$$y(n \cdot T) = \frac{a_0}{b_0} \cdot x(n \cdot T) + \frac{a_1}{b_0} \cdot x((n-1) \cdot T) \quad (36-1)$$

Donde $b_0 = 1$. La función de transferencia de este sistema esta dada por:

$$H(z) = a_0 \cdot z^{-0} + a_1 \cdot z^{-1} = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} \quad (41-2)$$

En la representación de este sistema por medio del diagrama de bloques, cada bloque delay está definido por z^{-1} , lo cual representa un delay (o más) de sus entradas en $(n \cdot T - T)$ hasta $n \cdot T$.

El diagrama en bloques de la ecuación (41-2) se muestra en la Figura 41.1.

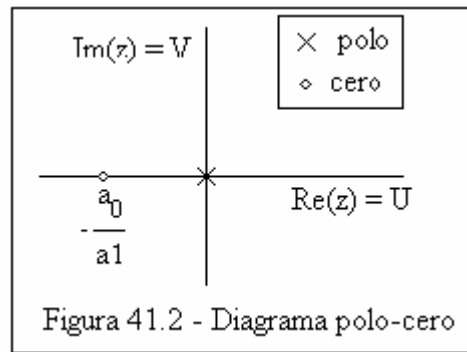


Del examen de la ecuación (41-2), se ve que:

Para $z = -\frac{a_0}{a_1}$ $H(z) = 0$

Para $z = 0$ $H(z) = \infty$

Esto se grafica en un diagrama polo-cero, de la Figura 41.2, donde se supone que a_0 y a_1 son reales y positivos.



La Región de Convergencia (ROC) para $H(z)$ es $0 < |z| < \infty$, la cual incluye el círculo unidad, $|z| = 1$. Como **el interior del círculo unidad corresponde a la mitad izquierda del plano-s**, se puede inferir que el sistema representado por la ecuación (41-2) **es estable**. Esto puede ser generalizado estableciendo que: **Un sistema estable tendrá todos sus polos dentro del círculo unidad** (en este caso, el ROC incluirá el círculo unidad). También como la región de convergencia incluye **$|z| = \infty$** , **el sistema es causal**.

Finalmente, se puede establecer que **todos los sistemas no recursivos son estables** ya que sus regiones de convergencia siempre incluirán el círculo unidad: Todos sus polos están localizados en el origen, $|z| = 0$.

Como el sistema de la ecuación (41-2) tiene todos los valores de los $b_i = 0$, $i > 0$, la forma de su ecuación diferencia es la misma que la de la ecuación de convolución:

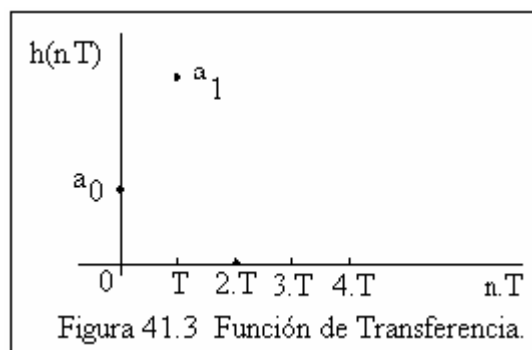
$$y(n \cdot T) = \sum_{r=0}^{\infty} h(r \cdot T) \cdot x((n-r) \cdot T) \quad (41-3)$$

Por lo tanto, los valores de $h(r \cdot T)$ son justamente los coeficientes de z^{-r} en $H(z)$. Se puede entonces establecer que **para los sistemas no recursivos, los coeficientes de z^{-r} son los términos de la secuencia respuesta impulsiva del sistema y viceversa**.

La secuencia correspondiente a la función de transferencia de la ecuación (41-2) es:

$$h(0) = a_0 \quad h(T) = a_1 \quad h(n \cdot T) = 0 \quad \text{Para } n > 1$$

Esto se representa en la Figura 41.3.



Como la ROC incluye el círculo unidad, se puede obtener la Transformada de Fourier de $|h(n \cdot T)|$ (en este caso, su **respuesta en frecuencia**) evaluando $H(z)$ sobre el círculo unidad, $z = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$.

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n \cdot T) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T) \quad (41-4)$$

Para el sistema de ecuación (41-2), esto se convierte en:

$$H(f) = a_0 + a_1 \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T) \quad (41-5)$$

$$H(f) = a_0 + a_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T) - j \cdot a_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

$$H(f) = (a_0 + a_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)) - j \cdot a_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

Luego $|H(f)|$ queda:

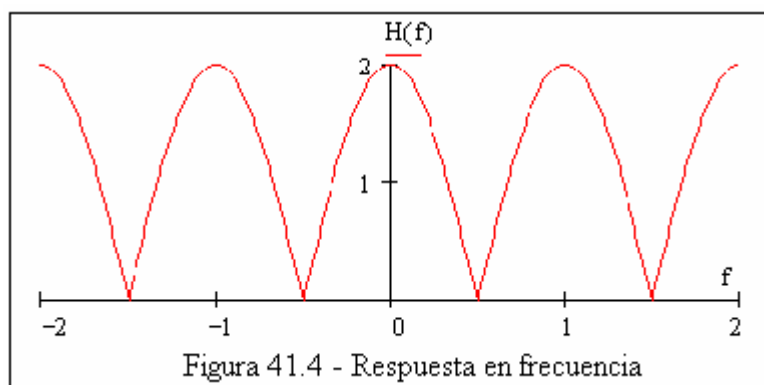
$$\begin{aligned} |H(f)| &= \sqrt{H(f) \cdot \overline{H(f)}} = \sqrt{(a_0 + a_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T))^2 + (a_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T))^2} \\ |H(f)| &= \sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T) + 2 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T) + (a_1)^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)} \\ |H(f)| &= \sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 + 2 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)} \end{aligned} \quad (41-6)$$

La respuesta en frecuencia del sistema se ve que es periódica en f_s , esto es, $|H(f)|$ se repite para $f \rightarrow f + f_s$.

A modo de ejemplo:

$$\begin{aligned} a_0 &:= 1 & a_1 &:= 1 & T &:= 1 & f &:= -2, -1.99 \dots 2 \\ H(f) &:= \sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 + 2 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)} \end{aligned}$$

Lo que se puede apreciar en la Figura 41.4.



42 - SISTEMA RECURSIVO

Si la función de transferencia del sistema incluye términos en los cuales algunos de los coeficientes de las ecuaciones diferencia b_i no son nulos, el sistema es recursivo. Se retornará a la ecuación (36-3) como un ejemplo. Para este sistema, la salida presente (en $t = n \cdot T$) requiere el valor de su salida más reciente [en $t = (n-1) \cdot T$]. La ecuación diferencial (36-3) se escribe como:

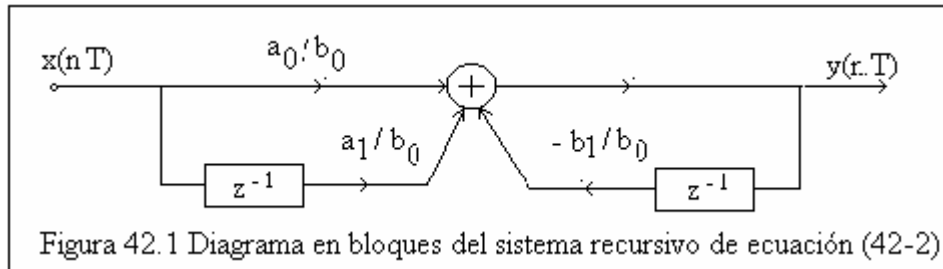
$$a_0 \cdot x(n \cdot T) + a_1 \cdot x((n-1) \cdot T) = b_0 \cdot y(n \cdot T) + b_1 \cdot y((n-1) \cdot T) \quad (42-1)$$

Tomando la transformada-z y encontrando $Y(z) / X(z)$:

$$(a_0 + a_1 \cdot z^{-1}) \cdot X(z) = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1}) \cdot Y(z) \quad (42-2)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{b_0 + b_1 \cdot z^{-1}}$$

42.1 - Representación en Diagrama de Bloques: La representación en diagrama de bloques de un filtro recursivo será similar a la que se construyó en su momento. En la representación presente, se usará el bloque z^{-1} para simbolizar la unidad delay. El diagrama en bloques del sistema recursivo de ecuación (42-2) se muestra en la Figura 42.1.



Esta será la forma standard usada para representar sistemas digitales.

42.2 - Polos y ceros: Si se multiplica a $H(z)$ [ecuación (42-2)] por z/z , se obtiene:

$$H(z) = \frac{a_0 \cdot z + a_1}{b_0 \cdot z + b_1} \quad (42-3)$$

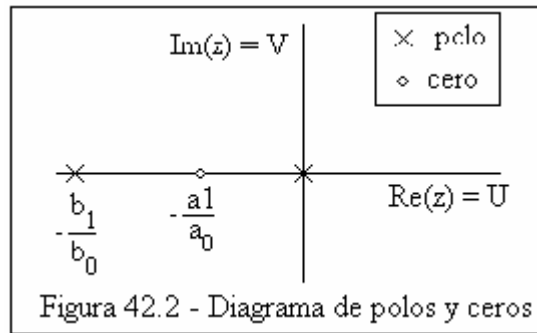
Esto puede ser puesto en la forma:

$$H(z) = \frac{a_0 \cdot \left(z + \frac{a_1}{a_0} \right)}{b_0 \cdot \left(z + \frac{b_1}{b_0} \right)} \quad (42-4)$$

En esta forma, se pueden establecer fácilmente los polos y ceros de $H(z)$. Para este sistema:

$$z = -\frac{a_1}{a_0} \quad \text{cero} \quad \quad z = -\frac{b_1}{b_0} \quad \text{polo}$$

Gráficamente se ve en la Figura 42.2.



En la figura 42.2 se ha supuesto que a_0 , a_1 , b_0 , b_1 son reales y positivos. Esta no siempre es la situación.

42.3 - Región de Convergencia: La Región de Convergencia (ROC) para el sistema de la ecuación (42-4) se determina por la ubicación de los polos, $z = -b_1 / b_0$.

Si $|-b_1 / b_0| < 1$, el polo está dentro del círculo unidad $|z| = 1$, lo cual indica que el sistema es estable; si $|-b_1 / b_0| > 1$, el polo está fuera del círculo unidad o sobre él. Ambas situaciones son indicativas de un sistema inestable: $h(n.T)$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Si los polos están dentro de un círculo de radio a , la secuencia $\{h(n.T)\}$ estará ubicada a la derecha: $h(n.T) = 0$ para todo $n < -N$. Si $H(z)$ tiende a un valor constante cuando z tiende a infinito, el sistema es causal.

42.4 - Determinación de los valores de $\{h(n.T)\}$: Si no hay polos fuera o sobre el círculo unidad (en el ejemplo anterior, $|-b_1 / b_0| < 1$) $H(z)$ se dice que es analítica en esta región. Los valores de $h(n.T)$ pueden ser determinados si $H(z)$ es analítica para $|z| \geq 1$ dividiendo el numerador por el denominador de la polinomial.

Se examinará el sistema bajo consideración [ecuación (42-2)] para los valores:

$$a_0 := 1 \quad a_1 := 1 \quad b_0 := 1 \quad b_1 := 0.5$$

Esto produce:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-4} \dots \quad (42-5)$$

Los coeficientes de potencia z^{-n} son los $h(n.T)$. Esto da:

$$h(n.T) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 \leq n \leq \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El sistema es causal, estable, a la derecha, y con respuesta impulsiva infinita. Esta función de transferencia puede ser representada por:

$$h(0) = 1$$

$$h(n.T) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \Phi(n.T - T) \quad (42-6)$$

La respuesta impulsiva se puede también obtener aplicando $\delta(n.T)$ a la entrada del sistema y poniendo $y(n.T) = h(n.T)$. Técnicas adicionales para obtener $h(n.T)$ desde $H(z)$ dependen de la forma de esta última y su región de convergencia. Estas técnicas son:

- a) Teorema de los Residuos y
- b) expansión en fracciones parciales.

$H(z)$ se puede expresar como:

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{1 - p_i \cdot z^{-1}} \quad (42-7)$$

donde p_i es un polo de $H(z)$. Los a_i son formados desde la ecuación que sigue:

$$a_i = \left(1 - p_i \cdot z^{-1}\right) \cdot H(z) \Big|_{z=p_i}$$

La secuencia para $h(n.T)$ es entonces la transformada-z inversa de cada término de la ecuación (42-7) y está dada por:

$$h(n.T) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot (p_i)^n \quad (42-8)$$

Ejemplo: Encontrar $\{h(n.T)\}$ para $H(z)$ dado como:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 1.2 \cdot z^{-1} + .35 \cdot z^{-2}}$$

$$\frac{1 + z^{-1}}{1 + 1.2 \cdot z^{-1} + 0.35 \cdot z^{-2}} \quad \left| \frac{1 + 1.2 \cdot z^{-1} + 0.35 \cdot z^{-2}}{1 - 0.2 \cdot z^{-1} + 0.11 \cdot z^{-2}} \right.$$

$$\frac{-0.2 \cdot z^{-1} - 0.35 \cdot z^{-2}}{-0.2 \cdot z^{-1} - 0.24 \cdot z^{-2} - 0.07 \cdot z^{-3}}$$

$$\frac{-0.11 \cdot z^{-2} + 0.07 \cdot z^{-3}}{-0.11 \cdot z^{-2} + 0.07 \cdot z^{-3}}$$

Se expresa $H(z)$ en forma de fracciones parciales:

$$\frac{-1.2 + \sqrt{1.2^2 - 4 \cdot .35}}{2} = -0.5 \quad \frac{-1.2 - \sqrt{1.2^2 - 4 \cdot .35}}{2} = -0.7 \quad \text{raíces}$$

$$H(z) = \frac{a_1}{1 + 0.7 \cdot z^{-1}} + \frac{a_2}{1 + 0.5 \cdot z^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \left(1 + 0.7 \cdot z^{-1}\right) \cdot \left[\frac{1 + z^{-1}}{\left(1 + 0.7 \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 + 0.5 \cdot z^{-1}\right)} \right] \Bigg|_{z=-0.7} \\
 &= \left[\frac{1 + (-0.7)^{-1}}{1 + 0.5 \cdot (-0.7)^{-1}} \right] = -1.5 \\
 a_2 &= \left(1 + 0.5 \cdot z^{-1}\right) \cdot \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 + 0.7 \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 + 0.5 \cdot z^{-1}\right)} \Bigg|_{z=-0.5} \\
 &= \frac{1 + (-0.5)^{-1}}{+ 0.7 \cdot (-0.5)^{-1}} = 2.5
 \end{aligned}$$

Finalmente, se encuentran los tres primeros términos de la secuencia como:

$$\begin{aligned}
 h(n.T) &= \sum_{i=1}^2 a_i \cdot (p_i)^n \\
 h(0.T) &= -1.5 \cdot (-0.7)^0 + 2.5 \cdot (-0.5)^0 = 1 \\
 h(1.T) &= -1.5 \cdot (-0.7)^1 + 2.5 \cdot (-0.5)^1 = -0.2 \\
 h(2.T) &= -1.5 \cdot (-0.7)^2 + 2.5 \cdot (-0.5)^2 = -0.11
 \end{aligned}$$

Es también posible encontrar $h(n.T)$ poniendo $H(z)=Y(z)/X(z)$, tomando la transformada- z inversa (usando la relación presentada), y luego aplicando la señal impulso al sistema; la salida del sistema, $y(n.T)$, es $h(n.T)$.

43 - FORMA GENERAL DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA

Dado que $H(z)$ es la razón de dos polinomios, ambos se pueden factorar:

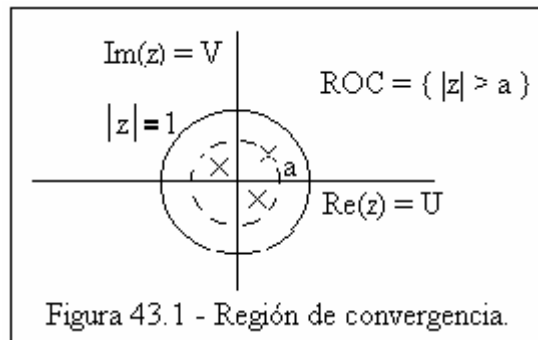
$$H(z) = K \cdot \left[\prod_{n=1}^N \left(1 - O_n \cdot z^{-1}\right) \right] \cdot \frac{1}{\left[\prod_{r=1}^M \left(1 - p_r \cdot z^{-1}\right) \right]} \quad (43-1)$$

donde O_n es un cero de $H(z)$ y p_r es un polo. Además, cuando $z = 0$, cada término en el numerador provee un polo de orden n , mientras que cada término en el denominador provee un cero.

Se supondrá que se está tratando con sistemas del mundo real que son estables y causales. La región de convergencia será para todos los valores de z que residen en el exterior a un círculo cuyo radio es igual al valor de máximo polo.

$$\text{ROC} = |z| > \max(p_r) \quad (43-2)$$

Esto se muestra en la Figura 43-1.

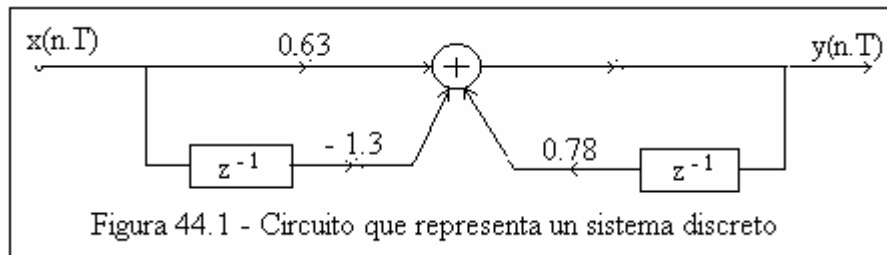


El ROC en la figura 43.1 es el conjunto de todos los z tales que:

$$\max\{ |p_r| \} = a < |z| < \text{infinito}$$

44- ANALISIS DEL CIRCUITO DE SISTEMA DISCRETO

Dado un circuito que representa un sistema discreto, sería importante conocer su respuesta en frecuencia. El punto de vista opuesto, la síntesis, se verá más adelante. Se da el circuito de la Figura 44.1 como un ejemplo de la técnica utilizada para analizar sistemas de tiempo discreto.



El primer paso es determinar su ecuación diferencia por inspección:

$$y(n.T) = 0.63 \cdot x(n.T) - 1.3 \cdot x((n-1) \cdot T) + 0.78 \cdot y((n-1) \cdot T) \quad (44-1)$$

La transformada-z de esta ecuación es:

$$Y(z) = 0.63 \cdot X(z) - 1.3 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 0.78 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} \quad (44-2)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.63 - 1.3 \cdot z^{-1}}{1 - 0.78 \cdot z^{-1}}$$

Se puede ver que $H(z)$ tiene un cero en $z = 1.3/0.63$ y un polo en $z = 0.78$, el cual está dentro del círculo unidad indicando que $H(z)$ es estable.

Para encontrar la **Respuesta en Frecuencia del Sistema**, $H(z)$ es evaluada sobre el círculo unidad:

$$H(z) \Big|_{z=e^{j \cdot \omega \cdot T}} = H(\omega \cdot T)$$

$$H(\omega \cdot T) = \frac{0.63 - 1.3 \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot T})^{-1}}{1 - 0.78 \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot T})^{-1}} = \frac{0.63 - 1.3 \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot T})}{1 - 0.78 \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot T})} \quad (44-3)$$

Esto es lo mismo que la transformada de Fourier de $h(n \cdot T)$. Operando algebraicamente, se obtiene la magnitud y la fase de $H(\omega \cdot T)$:

$$|H(\omega \cdot T)| = \frac{\sqrt{(0.63 - 1.3 \cdot \cos(\omega \cdot T))^2 + (1.3 \cdot \sin(\omega \cdot T))^2}}{\sqrt{(1 - 0.78 \cdot \cos(\omega \cdot T))^2 + (0.78 \cdot \sin(\omega \cdot T))^2}} \quad (44-4)$$

$$\Phi(\omega \cdot T) = \text{atan}\left(\frac{0.81 \cdot \sin(\omega \cdot T)}{1.64 - 1.79 \cdot \cos(\omega \cdot T)}\right) \quad (44-5)$$

De expresiones previas se sabe que $H(\omega \cdot T)$ es periódica en f (o ω) con periodo f_s o ω_s . En este punto se debe considerar el término $\omega \cdot T$ para tener alguna idea de la respuesta en frecuencia del sistema con la frecuencia de muestreo de Nyquist in mente. Se tiene:

$$\omega \cdot T = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s} = 2 \cdot \pi \cdot \Omega \quad (44-6)$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo. El término f / f_s se define usualmente como la **Frecuencia Normalizada**. Ya que $f_s \geq 2 \cdot f_{\max}$, donde $f_{\max}$ es el componente de frecuencia máximo de la señal muestreada, se ve que:

$$0 \leq \Omega \leq 0.5 \quad \text{o bien} \quad 0 \leq \frac{f}{f_s} \leq \frac{1}{2} \quad (44-7)$$

Esto permite presentar la respuesta en frecuencia de un sistema discreto en términos de la frecuencia normalizada.

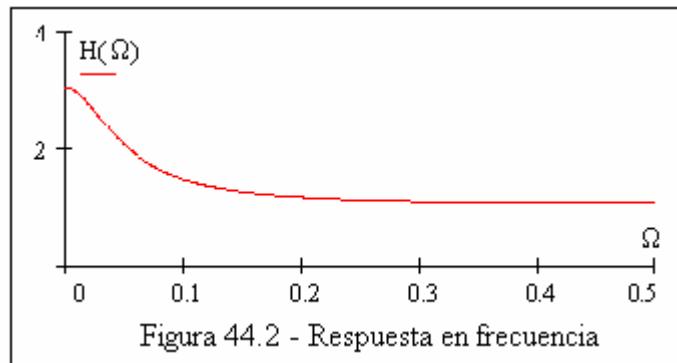
$$|H(\Omega)| = \frac{\sqrt{(0.63 - 1.3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2 + (1.3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2}}{\sqrt{(1 - 0.78 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2 + (0.78 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2}}$$

La respuesta es:

$$H(\Omega) := \left| \frac{(0.63 - 1.3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2 + (1.3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2}{(1 - 0.78 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2 + (0.78 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \Omega))^2} \right|$$

$$\Omega := 0, 0.001 \dots 0.8 \quad \text{rango}$$

La representación gráfica se ve en la Figura 44.2.



Esta es la respuesta en frecuencia del sistema de filtro digital del ejemplo, que muestra que una señal de tiempo discreto con frecuencia $f \leq f_s/2$, muestreada a una frecuencia f_s , será atenuada por una cantidad $|H(e^{j2\pi\Omega})|$ a medida que pase a través del sistema.

Además, también tendrá un desplazamiento de fase $\Phi(2\pi\Omega)$. El sistema muestra las características similares a un filtro Paso Bajo. Además, se necesita sólo un segmento de la respuesta debido a la periodicidad y el hecho que se supone que la máxima frecuencia de cualquier señal de entrada es menor que $f_s/2$.

45 - SINTESIS DE FILTROS DIGITALES

Dado un conjunto determinado de características del filtro, ¿Qué circuito puede ser utilizado para realizarlo?. A partir de este momento se considerará el diseño de filtro digital donde su realización puede ser descripta en la forma de un circuito analógico o digital (desde el punto de vista del hardware) o un software de computadora. La técnica usada para generar los parámetros depende si el filtro es IIR o FIR.

46 - FILTRO IIR

Si una señal impulsiva se aplica a un filtro IIR, hay usualmente una salida presente para grandes valores de $n.T$. Esto puede ser establecido en términos de la respuesta con $|h(n.T)| > 0$ para n tendiendo a infinito. El filtro IIR será del tipo recursivo, requiriendo salidas pasadas para determinar la presente.

También como el sistema IIR tiene posibilidades de ser inestable, se debe determinar que todos los polos del filtro residan dentro del círculo unidad.

Se verán a continuación varias técnicas usadas para diseñar filtros IIR. Una característica adicional del filtro IIR es el altamente no-lineal comportamiento del desplazamiento de fase en el pasa-banda. Si se desea una respuesta en fase lineal, se debe usar un filtro FIR.

46.1 - Ubicación de los polos y ceros en el plano z : En la ecuación (43-1) la función de transferencia se expresaba como un producto racional de términos involucrando las raíces de las polinomiales en el numerador y denominador.

$$H(z) = \left[\prod_{n=1}^N (1 - O_n \cdot z^{-1}) \right] \cdot \frac{1}{\left[\prod_{r=1}^M (1 - p_r \cdot z^{-1}) \right]} \quad (46-1)$$

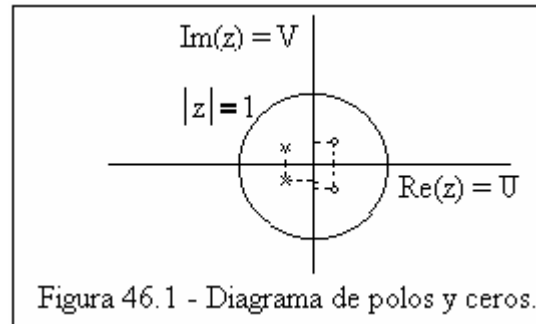
donde $\mathbf{O}_k$ y $\mathbf{p}_r$ son las raíces de las polinomiales que forman $H(z)$. A título de ejemplo, para $N = M = 2$, se puede expresar la ecuación anterior como:

$$H(z) = \frac{(1 - O_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - O_2 \cdot z^{-1})}{(1 - p_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - p_2 \cdot z^{-1})} = \frac{1 - (O_1 + O_2) \cdot z^{-1} + O_1 \cdot O_2 \cdot z^{-2}}{1 - (p_1 + p_2) \cdot z^{-1} + p_1 \cdot p_2 \cdot z^{-2}} \quad (46-2)$$

Eliendo arbitrariamente los ceros como $0.3 + j0.4$ y $0.3 - j0.4$, y los polos como $-0.4 + j0.3$ y $-0.4 - j0.3$, la última ecuación queda:

$$H(z) = \frac{1 - 0.6 \cdot z^{-1} + 0.25 \cdot z^{-2}}{1 + 0.8 \cdot z^{-1} - 0.25 \cdot z^{-2}} \quad (46-3)$$

El diagrama de polos y ceros para esta ecuación está dado por la Figura 46.1.



Se considerarán sólo sistemas con polos dentro del círculo unidad (en ese caso, sistemas estables).

La respuesta en frecuencia de $H(z)$ será determinada para proveer alguna idea en la solución de diseño. Esto se hace para obtener la magnitud de $H(z)$ en la ecuación (46-2). Antes de hacer esto, se obtiene la forma general de la magnitud de respuesta a partir de la ecuación (46-1):

$$|H(z)| = \frac{\prod_{k=1}^N M_k^O}{\prod_{r=1}^M M_r^P} \quad (46-4)$$

con:

$$M_k^O = |1 - O_k \cdot z^{-1}| \quad M_r^P = |1 - p_r \cdot z^{-1}| \quad (46-5)$$

El ángulo de fase de $H(z)$ está dado por:

$$\Phi(H(z)) = \sum_{k=1}^N \Theta_k^O - \sum_{r=1}^M \Theta_r^P \quad (46-6)$$

$$\Theta_k^O = \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(1 - O_k \cdot z^{-1})}{\text{Re}(1 - O_k \cdot z^{-1})} \right) \quad (46-7)$$

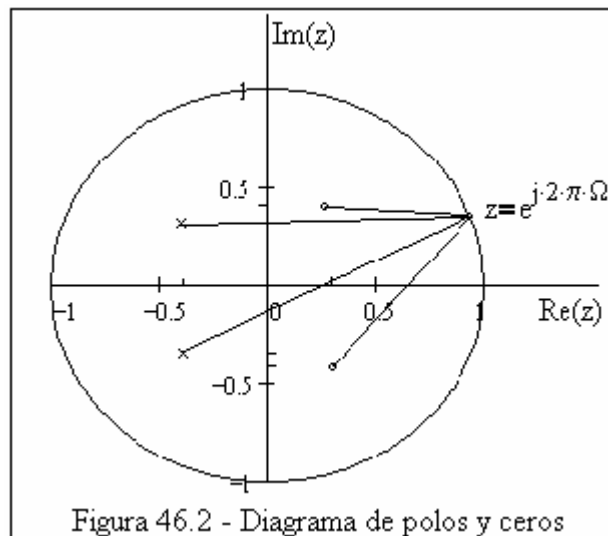
$$\Theta_r^P = \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(1 - p_k \cdot z^{-1})}{\text{Re}(1 - p_k \cdot z^{-1})} \right) \quad (46-8)$$

Para la función de transferencia de (46-2), se tiene:

$$\Phi(H(z)) = (\Theta_1^O + \Theta_2^O) - (\Theta_1^P + \Theta_2^P) \quad (46-9)$$

$$|H(z)| = \frac{M_1^O \cdot M_2^O}{M_1^P \cdot M_2^P} \quad (46-10)$$

Tratando a cada término en la ecuación (46-2) como un vector, se obtiene el valor de $|H(z)|$ y $\Phi(H(z))$ para cualquier valor de Ω . Esto se muestra en la Figura 46.2.



Midiendo la longitud de los vectores entre los puntos sobre el círculo unidad y el correspondiente polo/cero e insertándolo en la ecuación (46-9), se puede determinar la amplitud de $|H(z)|$ en ese punto.

El ángulo que cada vector forma con el semieje $\text{Re}(z)$ positivo producirá el ángulo de fase de $H(z)$ cuando se use en la ecuación (46-10). Para el gráfico polo-cero de la figura anterior, la variación de $|H(z)|$ con Ω oscilando entre $-1/2$ y $+1/2$.

La respuesta exacta está dada por:

$$H(z) = \frac{1 - 0.6 \cdot z^{-1} + 0.25 \cdot z^{-2}}{1 + 0.8 \cdot z^{-1} - 0.25 \cdot z^{-2}}$$

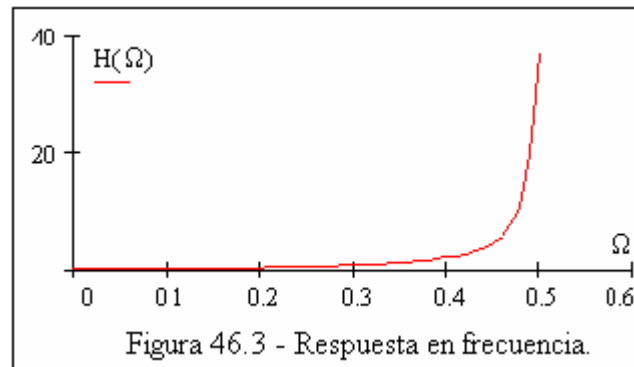
$$H(e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}) = \frac{1 - 0.6 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T})^{-1} + 0.25 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T})^{-2}}{1 + 0.8 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T})^{-1} - 0.25 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T})^{-2}}$$

Si se ha de usar la variable:

$$\gamma = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s} = 2 \cdot \pi \cdot \Omega$$

$$H(\Omega) := \left| \frac{1 - 0.6 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-1} + 0.25 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-2}}{1 + 0.8 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-1} - 0.25 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-2}} \right| \quad \Omega := 0, 0.01 \dots 0.5$$

Gráficamente se observa en la figura 46.3.

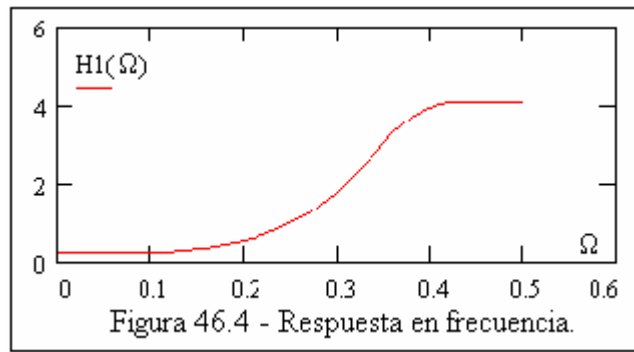


Otro ejemplo:

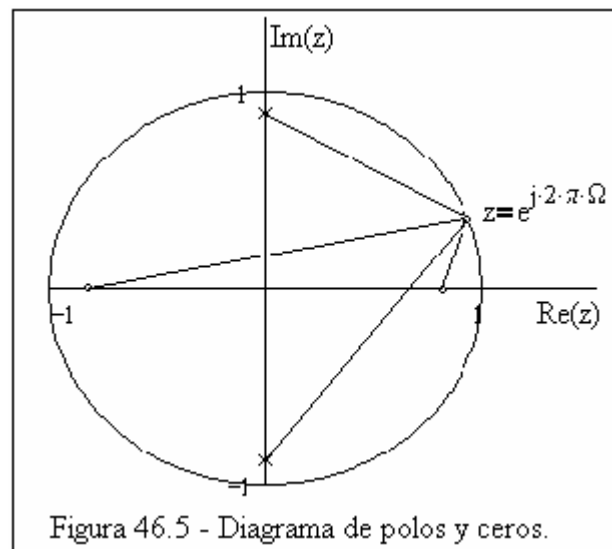
$p_1 := -0.4 + j \cdot 0.4$	$p_2 := -0.4 - j \cdot 0.4$	polos
$O_1 := 0.4 + j \cdot 0.4$	$O_2 := 0.4 - j \cdot 0.4$	ceros

$$H1(\Omega) := \left| \frac{1 - (O_1 + O_2) \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-1} + O_1 \cdot O_2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-2}}{1 - (p_1 + p_2) \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-1} + p_1 \cdot p_2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-2}} \right|$$

Gráficamente se observa en la figura 46.4.



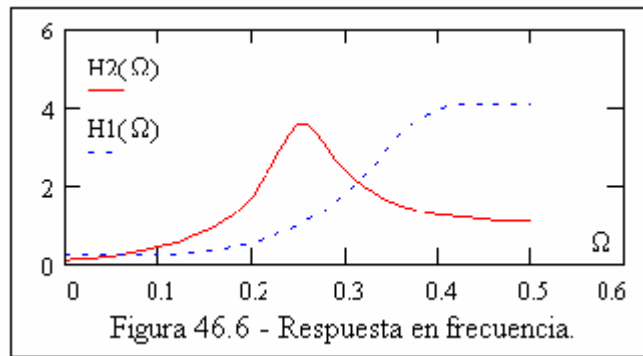
Basados en la discusión anterior, se puede ver cómo la respuesta en frecuencia de la función de transferencia puede ser cambiada para cumplir con especificaciones deseadas moviendo los polos y ceros en el plano z , para reducir la ganancia en $\Omega = 0$ ó $1/2$, los ceros del sistema pueden ser movidos a cerca de $+1$ y -1 ; eligiendo los polos más cerca del círculo unidad causarán que la ganancia caiga más profundamente, como se puede apreciar en la Figura 46.5.



$p_1 := 0 + j \cdot 0.8$	$p_2 := 0 - j \cdot 0.8$	polos
$O_1 := 0.8 + j \cdot 0$	$O_2 := -0.0 - j \cdot 0$	ceros

$$H2(\Omega) := \left| \frac{1 - (O_1 + O_2) \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-1} + O_1 \cdot O_2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-2}}{1 - (p_1 + p_2) \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-1} + p_1 \cdot p_2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Omega})^{-2}} \right|$$

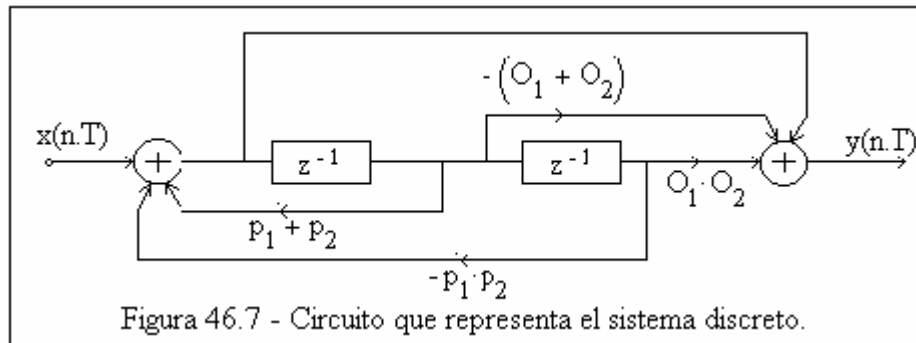
La respuesta en frecuencia se puede apreciar en la Figura 46-6.



Una vez que los coeficientes de la característica de transferencia se obtienen, la ecuación (43-1) (o la (42-4) por ejemplo) se expresa como la razón de dos polinomiales,

$$H2(z) = \frac{1 - (O_1 + O_2) \cdot z^{-1} + O_1 \cdot O_2 \cdot z^{-2}}{1 - (p_1 + p_2) \cdot z^{-1} + p_1 \cdot p_2 \cdot z^{-2}} \quad (46-11)$$

donde los ceros y los polos son ahora los que producen la respuesta deseada del sistema. Esto se aprecia en la Figura 46.7.



La ecuación diferencia para este circuito se obtiene poniendo $H(z) = Y(z) / X(z)$ en la ecuación (46-11) y luego realizando la transformada-z inversa:

$$Y(z) \cdot [1 - (p_1 + p_2) \cdot z^{-1} + p_1 \cdot p_2 \cdot z^{-2}] = [1 - (O_1 + O_2) \cdot z^{-1} + O_1 \cdot O_2 \cdot z^{-2}] \cdot X(z)$$

$$y(n \cdot T) - (p_1 + p_2) \cdot y((n-1) \cdot T) + p_1 \cdot p_2 \cdot y((n-2) \cdot T) =$$

$$= x(n \cdot T) - (O_1 + O_2) \cdot x((n-1) \cdot T) + O_1 \cdot O_2 \cdot x((n-2) \cdot T)$$

$$y(n \cdot T) = x(n \cdot T) - (O_1 + O_2) \cdot x((n-1) \cdot T) + O_1 \cdot O_2 \cdot x((n-2) \cdot T) \dots \quad (46-12)$$

$$+ (p_1 + p_2) \cdot y((n-1) \cdot T) - p_1 \cdot p_2 \cdot y((n-2) \cdot T)$$

El punto a destacar es que las selecciones juiciosas y experimentadas de las ubicaciones de polos y ceros, llevarán a la obtención de las características del sistema deseadas. Con una computadora a mano, por prueba y error se pueden diseñar filtros en muy poco tiempo.

DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

OBJETIVOS:

- Comprender los efectos que la longitud de palabra finita de las computadoras introducen en los cálculos, que afectan en última instancia al comportamiento de un Filtro Digital.
- Diseñar un filtro digital, en este caso uno de Butterworth, que sirva como modelo de la aplicación de todos los conceptos vistos. Esto es, el trabajo algorítmico necesario para que partiendo de una situación particular se pueda generalizar una mecánica de cálculo.
- Elaborar un programa de computadora en un Lenguaje de Alto Nivel (Basic aquí) que permita implementar un Filtro Digital desde la misma y que pueda ser operado en tiempo real.

47 - IMPLEMENTACION DE FILTROS DIGITALES CON REGISTROS DE LONGITUD FINITA

Hay una limitación inherente sobre la exactitud de los procesadores de señal digitales debido al hecho que todos los elementos de cómputo digital operan con un número finito de bits. Se examinarán varios efectos debidos a la longitud de palabra finita.

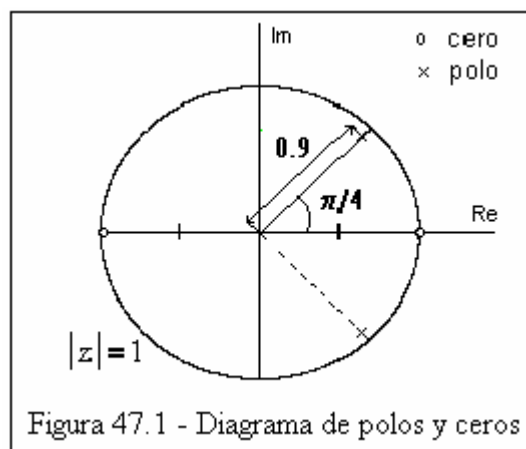
Se analizarán los efectos a través de un simple ejemplo.

Considérese un filtro pasa-banda con ceros en $+1$ y -1 y polos en $0.9 e^{-j\pi/4}$ y $0.9 e^{+j\pi/4}$.

$$0.9 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}} = 0.6363961 + 0.6363961i$$

$$0.9 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} = 0.6363961 - 0.6363961i$$

El correspondiente diagrama de polos y ceros se aprecia en la Figura 47.1.



La función de transferencia de este filtro es:

$$H(z) := \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.727922 \cdot z^{-1} + 0.81 \cdot z^{-2}}$$

La n-ésima muestra de salida se calcula por medio de la ecuación diferencia:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.727922 \cdot z^{-1} + 0.81 \cdot z^{-2}}$$

$$Y(z) \cdot (1 - 1.727922 \cdot z^{-1} + 0.81 \cdot z^{-2}) = (1 - z^{-2}) \cdot X(z)$$

$$y_n - 1.727922 \cdot y_{n-1} + 0.81 \cdot y_{n-2} = x_n - x_{n-2}$$

$$y_n = x_n - x_{n-2} + 1.727922 \cdot y_{n-1} - 0.81 \cdot y_{n-2}$$

Para construir este filtro, se usa el arreglo básico mostrado en la Figura 47.2.

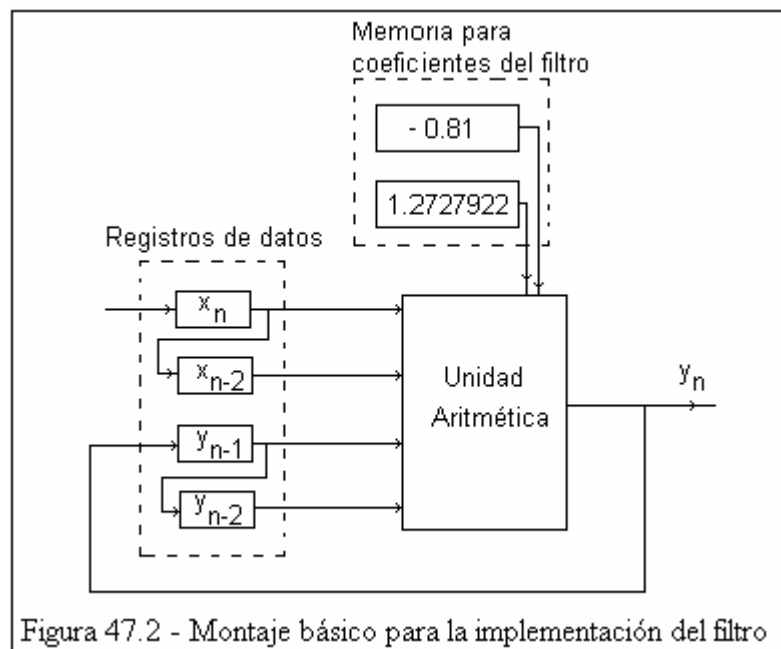


Figura 47.2 - Montaje básico para la implementación del filtro

Consiste de 4 partes: una memoria para almacenar los coeficientes del filtro, un conjunto de registros de datos para almacenar las muestras de entrada y de salida, una unidad aritmética para realizar los cálculos de acuerdo a la ecuación de diferencias y una unidad de control (no mostrada) para proveer las señales de timing.

Se examinará brevemente algunos de los aspectos del problema con el objeto de demostrar el efecto de longitud de palabra finita.

Para comenzar con esto, los números con los que se está tratando deben ser representados en sistema binario de modo que puedan ser manipulados y operados por elementos computacionales digitales. Considérese el coeficiente **0.81**. Puede ser escrito en binario como 0.110011110101....:

$$0.81 \cdot 2 = 1.62 \quad 0.62 \cdot 2 = 1.24 \quad 0.24 \cdot 2 = 0.48 \quad 0.48 \cdot 2 = 0.96 \quad 0.96 \cdot 2 = 1.92$$

$$0,81 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$$

Se necesita una cantidad de bits infinita para representar exactamente al coeficiente. Ya que todos los circuitos prácticos de memoria tienen un número finito de bits para cada palabra, el string binario infinito debe ser modificado. Supóngase que la memoria usada para la implementación del filtro tiene 6 bits para cada palabra. Una forma simple para almacenar el número dado es mantener sólo los 6 bits más significativos, esto es **0.11001**, como el valor aproximado de 0.81.

Sin embargo **0.11001** en base 2 representa el número:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.78125$$

Así se ve que el filtro, cuando sea implementado, usará el coeficiente 0.78125 en vez de 0.81. Se introduce una diferencia o error:

$$0.81 - 0.78125 = 0.02875$$

Similarmente, 1.2727922 es 1.010001011101... y una aproximación de 6 bits es 1.01000 ó 1.25, resultando un error de:

$$1.25 - \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \right] = -0.0227051$$

En el otro extremo, un coeficiente +1, -1 ó 0 pueden ser representados exactamente. De modo que la relación entrada salida de la ecuación de diferencias del filtro en consideración, en lo referido a su implementación, es:

$$y_n = x_n - x_{n-2} + 1.25 \cdot y_{n-1} - 0.78125 \cdot y_{n-2} \quad (47-1)$$

y la función de transferencia se modifica acordemente.

Mientras que los ceros permanecen sin cambios en este ejemplo, los polos del filtro se han movido.

$$0.9 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}} = 0.6363961 + 0.6363961i \quad \text{Exacto (palabra de longitud infinita)}$$

$$0.9 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} = 0.6363961 - 0.6363961i$$

Cuando la palabra tiene 6 bits de longitud, el denominador queda:

$$1 - 1.25 \cdot z^{-1} + 0.78125 \cdot z^{-2}$$

$$\begin{pmatrix} .625 + .625 \cdot j \\ .625 - .625 \cdot j \end{pmatrix} \quad \text{raíces del denominador (nueva posición de los polos)}$$

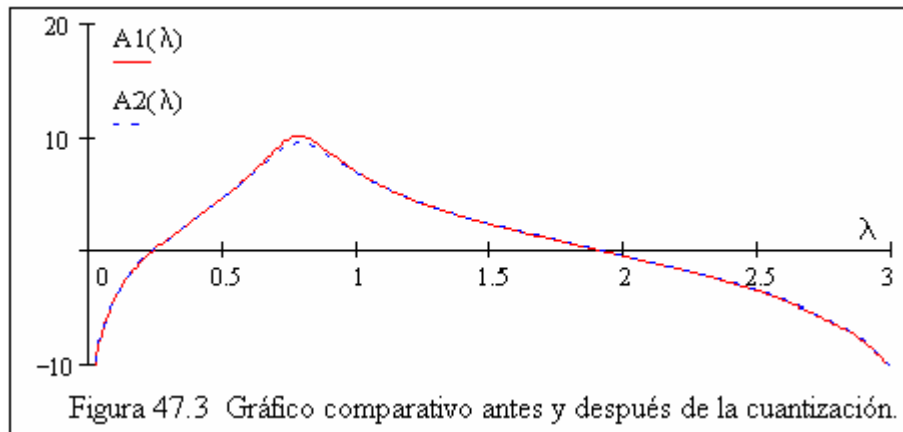
consecuentemente la respuesta en frecuencia difiere ligeramente de la respuesta del filtro original.

Para comparación, se muestra en la Figura 47-3 la respuesta en amplitud del filtro (ganancia en dB) antes y después de la cuantización de los coeficientes.

$$A1(\lambda) := 10 \cdot \log \left[\frac{|1 - (e^{j \cdot \lambda})^{-2}|}{|1 - 1.2727922 \cdot (e^{j \cdot \lambda})^{-1} + 0.81 \cdot (e^{j \cdot \lambda})^{-2}|} \right] \quad \text{antes}$$

$$A2(\lambda) := 10 \cdot \log \left[\frac{|1 - (e^{j \cdot \lambda})^{-2}|}{|1 - 1.25 \cdot (e^{j \cdot \lambda})^{-1} + 0.78125 \cdot (e^{j \cdot \lambda})^{-2}|} \right] \quad \text{después}$$

$$\lambda := 0.01, 0.02 \dots \pi \quad \text{rango}$$



Otra fuente de error es la cuantización de los datos de entrada. Supóngase que la entrada al filtro es una señal sinusoidal, y considérese el siguiente segmento de entrada ... 0.2955, 0.5564, 0.8912, 0.9320... . Estos números deben ser almacenados en registros para que la unidad aritmética realice los cálculos necesarios. De nuevo, sólo un número finito de bits pueden ser acomodados.

Supóngase que los registros de datos son de 8 bits, luego la entrada de datos en forma binaria, después del truncamiento de 8 bits, es:

..., **0.0100101, 0.1000111, 0.111010, 0.1110111, ...**

Esto corresponde a los valores:

..., **0.2890625, 0.5546875, 0.890625, 0.9265, ...**

Los cuales obviamente difieren de las muestras actuales de la señal sinusoidal.

El tercer tipo de error es debido a la limitada exactitud con la cual son realizadas las operaciones aritméticas.

Considérese el término **-0.78125 y_{n-2}** que aparece en la ecuación (47-1). Esto es el producto de un número de 6 bit por uno de 8 bits. En general, tendrá 14 bits significativos que deben ser truncados a 8 bits, de modo que el resultado quepa en el registro de datos de 8 bits. El error así cometido se conoce como error de redondeo.

Además, las muestras de salida previa son usadas en la ecuación (47-1) para calcular las muestras de salidas posteriores, y esto tiene efectos acumulativos.

Para resumir, para un filtro digital como el especificado, hay tres fuentes de error comunes debido a la longitud de palabra finita:

- 1) La modificación de los coeficientes del filtro $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ debido al uso de números finitos de bits para representarlos.
- 2) La cuantización de la secuencia de entrada $\{x_n\}$ en un conjunto de niveles discretos.
- 3) La acumulación de errores de redondeo cometidas en operaciones aritméticas.

48 - DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

El diseño de un filtro digital es la tarea de determinar la función de transferencia, que es una *función racional* en z^{-1} , en el caso de filtros recursivos (IIR) o un *polinomio* en z^{-1} en el caso de filtros no-recursivos (FIR).

La función de transferencia debe, por supuesto, cumplir con ciertas especificaciones de comportamiento. En muchos problemas de diseño, es también deseable arribar a una función de transferencia de mínima complejidad compatible con una especificación dada.

Se han desarrollado un gran número de excelentes métodos de diseño de filtros digitales. El uso de uno en particular depende si se trata de un filtro IIR o un FIR y si la especificación de diseño está dada en el dominio de la frecuencia o en el del tiempo.

En muchas aplicaciones, se necesita un filtro selectivo de frecuencias. Este filtro permite que ciertos componentes de frecuencia pasen a través de él y que otros se atenúen. Para este tipo de filtro, la especificación de diseño está dada en el dominio de la frecuencia.

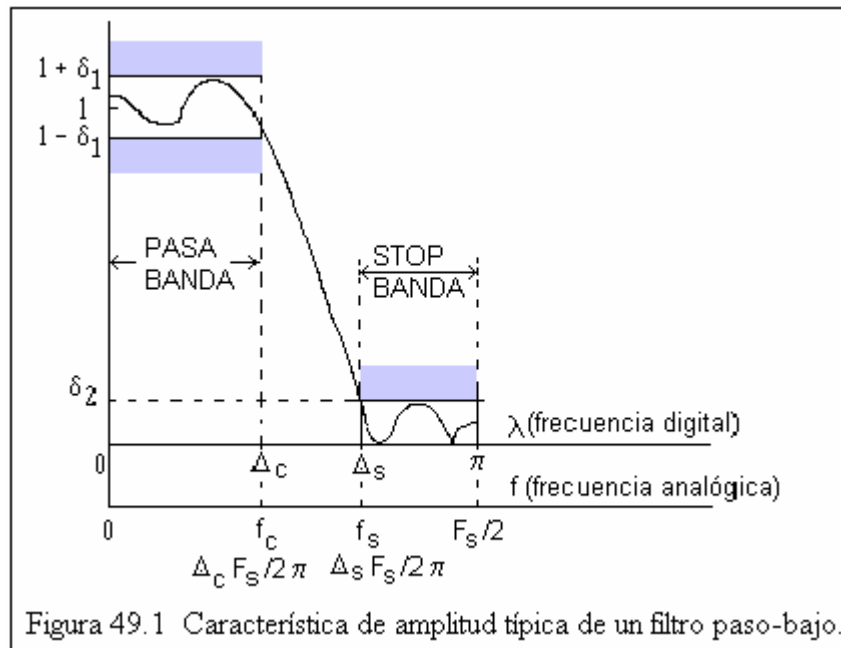
En el caso de filtros IIR, se utilizan métodos desarrollados para analógicos. La solución básica aquí es la transformación entre las variables de frecuencia analógica y digital.

Cuando las especificaciones no son adecuadas para la aplicación de la solución por transformación, se debe recurrir a métodos asistidos por computadora.

Para el diseño de filtros FIR, se consideran dos métodos. El primero usa las series de Fourier con ventanas. El mérito de esta solución reside en su simplicidad, requiriendo comparativamente poco cálculo, sin embargo, el diseño resultante no es usualmente el mejor. El segundo método usa una solución asistida por computadora para arribar a un diseño óptimo basado en el criterio de error minimax.

49 - DISEÑO DE FILTROS IIR PASO-BAJO

Una característica de amplitud típica de un filtro paso-bajo se muestra en la Figura 49.1.



El pasa-banda se extiende desde $\lambda = 0$ hasta la frecuencia de corte $\lambda = \Lambda_c$, y el stop-banda desde $\lambda = \Lambda_s$ hasta $\lambda = \pi$. Se muestran sólo frecuencias positivas, ya que la característica de amplitud exhibe *simetría par*. El rango de frecuencia $\Lambda_c < \lambda < \Lambda_s$ es la región de transición o "no importa".

Las especificaciones de diseño incluyen típicamente los límites de tolerancia δ_1 permitida en el pasa-banda y δ_2 en el stop-banda. La meta del diseño es determinar una función de transferencia $H(z)$ de modo que su amplitud sobre el círculo unidad $|H(e^{j\lambda})|$ satisfaga:

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\lambda})| \leq 1 + \delta_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq \Lambda_c$$

y

$$|H(e^{j\lambda})| \leq \delta_2 \quad \text{para} \quad \Lambda_s \leq \lambda \leq \pi$$

Es necesario en este punto relacionar las frecuencias digitales con las analógicas. Supóngase que el filtro digital es intentado para procesar señales analógicas muestreadas a una frecuencia de $F_s = 1/T$, siendo T el tiempo entre muestras.

La frecuencia de corte digital Λ_c corresponde a la frecuencia analógica:

$$f_c = \frac{\Lambda_c \cdot F_s}{2\pi}$$

Similarmente, el stop-banda en frecuencia analógica comienza en:

$$f_s = \frac{\Lambda_s \cdot F_s}{2\pi}$$

Una solución al problema de diseño es seleccionar un filtro analógico paso-bajo apropiado y aplicar una transformación de frecuencia a su función de transferencia de modo de obtener la $H(z)$ deseada.

Hay tres clases comunmente encontradas de filtros paso-bajo: Butterworth, Chebyshev y Cauer o función elíptica.

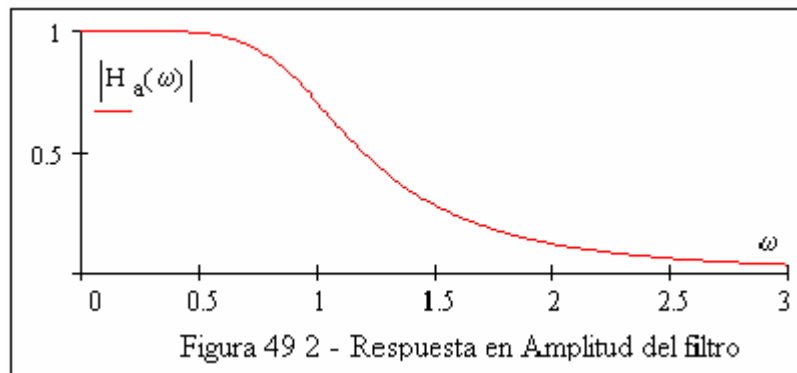
- a) Los **Filtros de Butterworth** tienen una respuesta de amplitud plana máxima, sus polos están uniformemente espaciados sobre el círculo unidad en el plano s .
- b) Los **Filtros de Chebyshev** tienen una respuesta en amplitud equiripple en el pasa-banda (o en el stop-banda), sus polos están localizados sobre una elipse en el plano s .
- c) Los **Filtros de Cauer** tienen una respuesta en amplitud equiripple tanto en el pasa-banda como en el stop-banda.

Con propósitos de discusión, se va a considerar un filtro paso-bajo Butterworth de tercer orden con función de transferencia:

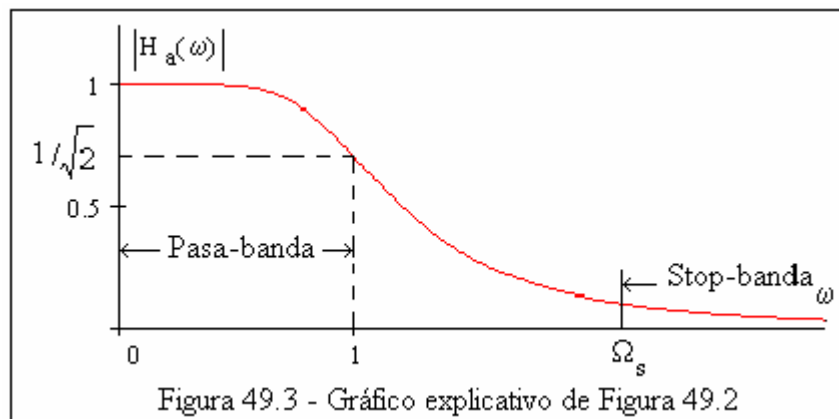
$$H_a(s) = \frac{1}{(s+1) \cdot (s^2 + s + 1)} \quad (49-1)$$

Para encontrar la respuesta en amplitud, se reemplaza $s = j\omega$.

$$H_a(\omega) := \frac{1}{(j \cdot \omega + 1) \cdot [(j \cdot \omega)^2 + j \cdot \omega + 1]} \quad \omega := 0, 0.01 \dots 3$$



donde la *frecuencia de corte 3 dB* ha sido normalizada a $\omega = 1$. Más explícitamente, se puede observar en la Figura 49.3.



La función que rige a $|\mathbf{H}_a(j\omega)|$ se puede expresar como:

$$|\mathbf{H}_a(j\omega)| = \left| \frac{1}{[(j\omega + 1) \cdot (-\omega^2 + j\omega + 1)]} \right| = \frac{1}{(\sqrt{1 + \omega^2} \cdot \sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}}$$

$$|\mathbf{H}_a(j\omega)| = (1 + \omega^6)^{-\frac{1}{2}}$$

Supóngase que se toma el stop-banda de este filtro de modo que:

$$\Omega_s \leq \omega \leq \infty$$

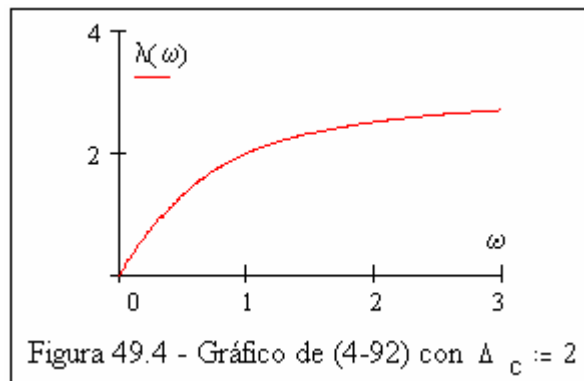
luego la respuesta en amplitud $|\mathbf{H}_a(j\omega)|$ es menor que $(1 + \Omega_s^6)^{-1/2}$ en el stop-banda.

Considérese ahora la transformación desde ω a λ dada por:

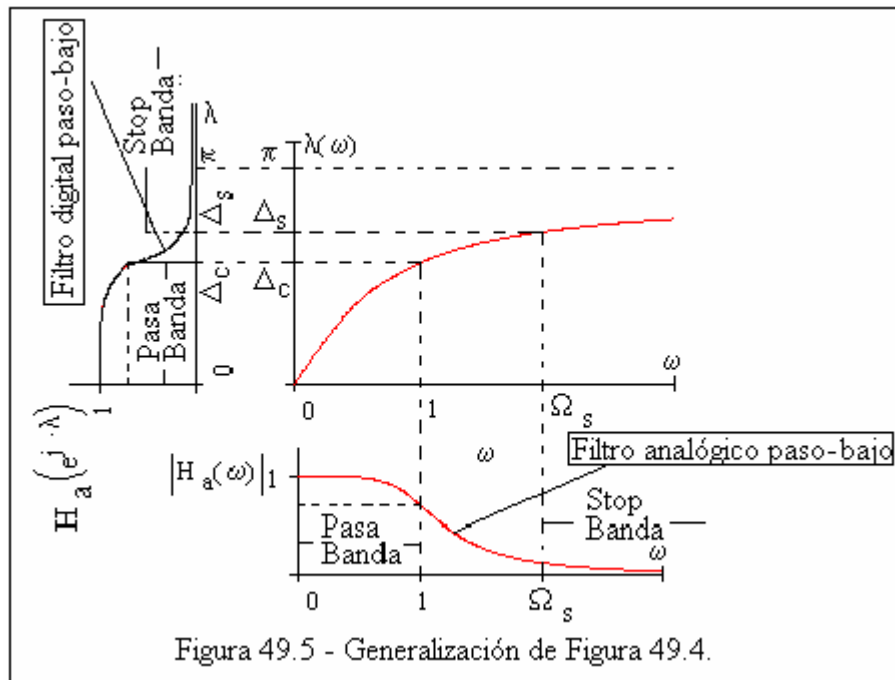
$$\omega \cdot \tan\left(\frac{\Delta_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (49-2)$$

Gráficamente, para un caso particular, se observa en la Figura 49.4.

$$\Delta_c := 2 \quad \lambda(\omega) := 2 \cdot \text{atan}\left(\omega \cdot \tan\left(\frac{\Delta_c}{2}\right)\right)$$



Genéricamente, se puede visualizar en Figura 49.5.:

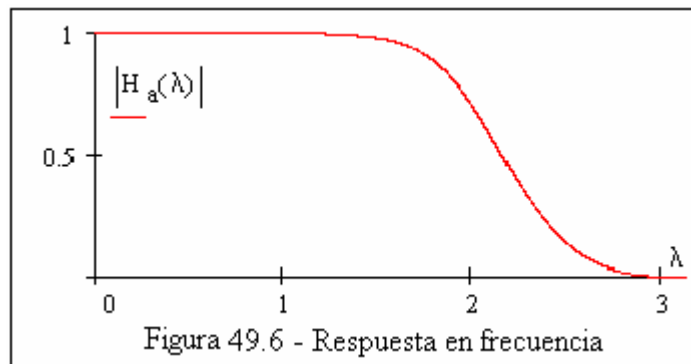


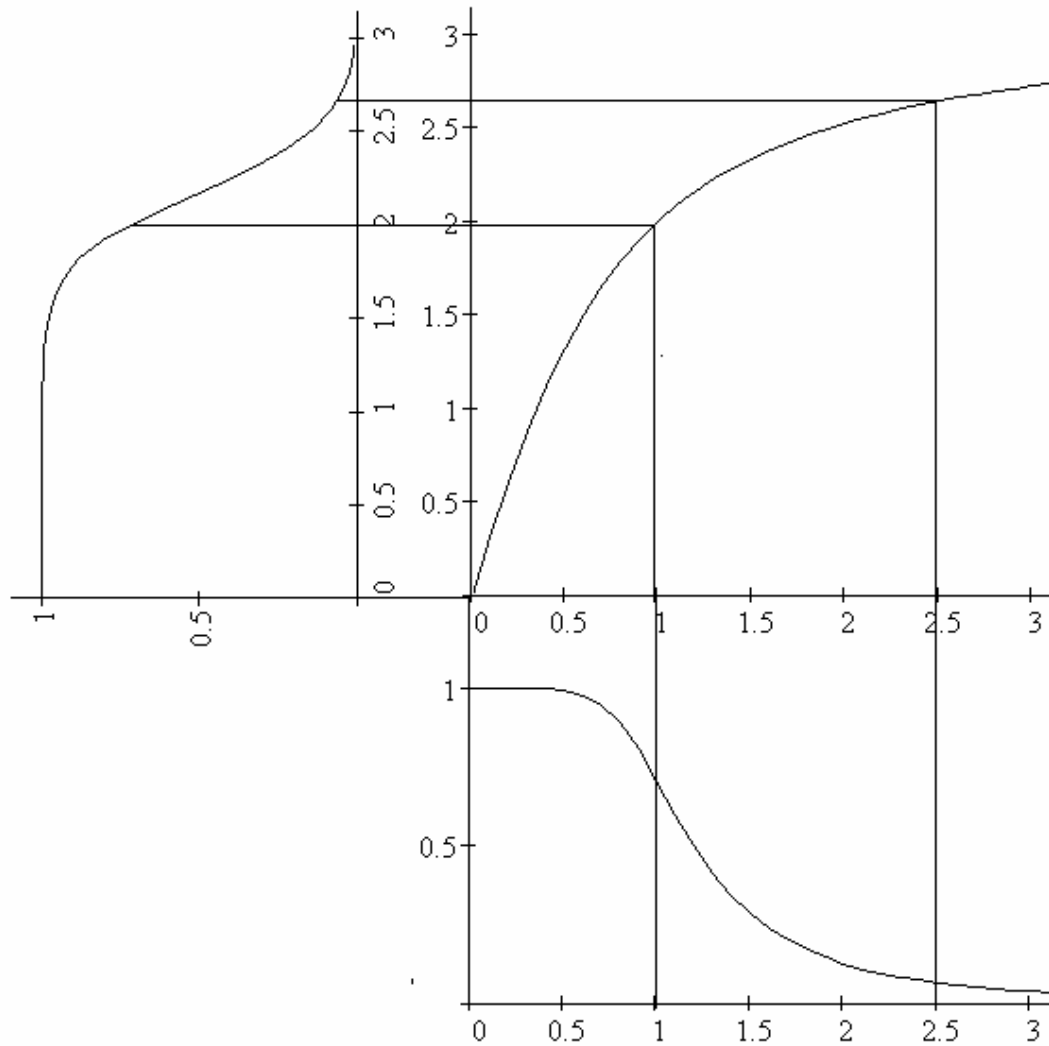
Con esta transformación el intervalo semiinfinito: $0 \leq \omega < \infty$ es mapeado en el intervalo $0 \leq \lambda \leq \pi$ con $\omega = 1$ correspondiendo a $\lambda = \Delta_c$. La transformación de la ecuación (49-2) cuando se aplica a $|H_a(j\omega)|$ produce una función en λ la cual exhibe una característica paso bajo como se muestra en la Figura 49.6.

$$\omega(\lambda) := \frac{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\Delta_c}{2}\right)}$$

$$H_a(\lambda) := \frac{1}{(j \cdot \omega(\lambda) + 1) \cdot [(j \cdot \omega(\lambda))^2 + j \cdot (\omega(\lambda)) + 1]}$$

$$\lambda := 0, 0.001 \dots \pi \quad \text{rango} \quad \Delta_c = 2 \quad \text{frecuencia de corte (digital)}$$





Con $s = j \omega$ y $z = e^{j \lambda}$, la ecuación (49-2) queda:

$$\begin{aligned} \frac{s}{j} \cdot \tan\left(\frac{\Delta c}{2}\right) &= \tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ s &= j \cdot \tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) \cdot \cot\left(\frac{\Delta c}{2}\right) = j \cdot \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot \cot\left(\frac{\Delta c}{2}\right) = j \cdot \frac{\left(e^{j \cdot \frac{\lambda}{2}} - e^{-j \cdot \frac{\lambda}{2}}\right) \cdot 2}{\left(e^{j \cdot \frac{\lambda}{2}} + e^{-j \cdot \frac{\lambda}{2}}\right) \cdot 2 \cdot j} \cdot \cot\left(\frac{\Delta c}{2}\right) \\ s &= \cot\left(\frac{\Delta c}{2}\right) \cdot \left[\frac{e^{-j \cdot \frac{\lambda}{2}} \cdot (e^{j \cdot \lambda} - 1)}{e^{-j \cdot \frac{\lambda}{2}} \cdot (e^{j \cdot \lambda} + 1)} \right] = c \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (49-3) \text{ con } c = \cot\left(\frac{\Delta c}{2}\right) \end{aligned}$$

La expresión para $H_a(s)$ de la ecuación (49-1) puede ser ahora reescrita en términos de z usando la ecuación anterior:

$$H_a\left(c \cdot \frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{1}{\left(c \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1\right) \cdot \left[\left(c \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + c \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1\right]}$$

$$H_a\left(c \cdot \frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{(z+1)^2}{c_1 \cdot (z+p_1) \cdot (z^2 + b_1 \cdot z + d_1)} = H(z)$$

donde las constantes están dadas por:

$$\begin{aligned} c_1 &= (1+c) \cdot (1+c+c^2) & p_1 &= \frac{1-c}{1+c} \\ b_1 &= \frac{2-2 \cdot c^2}{(1+c+c^2)} & d_1 &= \frac{1-c+c^2}{(1+c+c^2)} \end{aligned}$$

Esta $H(z)$ es una función racional en z , de aquí que pueda ser considerada como una función de transferencia de un filtro digital IIR. A partir de la discusión previa, se ve que su amplitud $|H(e^{j\lambda})|$ para $0 \leq \lambda \leq \pi$ está dada por la $|H_a(j\omega)|$ bajo la transformación de la ecuación (49-2).

El stop-banda del filtro digital $H(z)$ es desde $\lambda = \Delta_s$ a $\lambda = \pi$, donde Δ_s está relacionada al stop-banda del filtro analógico Ω_s a través de (49-2), esto es:

$$\Omega_s \cdot \tan\left(\frac{\Delta_s}{2}\right) = \tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

Así en el stop-banda, la respuesta de amplitud satisface

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \leq \left(1 + \Omega_s\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \Delta_s \leq \lambda \leq \pi$$

La transformación de (49-3) es una **transformación bilineal** entre la variable compleja s y la z . Ella mapea la mitad izquierda del plano- s al interior del círculo unidad $|z| = 1$ y, como se indicó al principio, $0 \leq \omega \leq \infty$ es mapeado a $0 \leq \lambda \leq \pi$. Así, un $H_a(s)$ estable producirá un $H(z)$ estable.

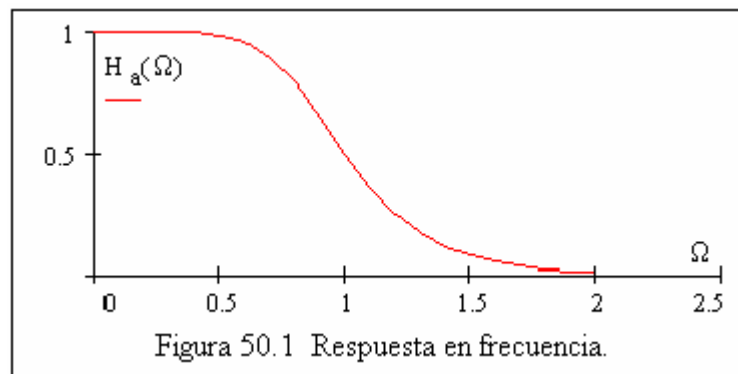
50 - FILTROS DIGITALES BUTTERWORTH

Estos filtros están definidos por la propiedad que la respuesta en magnitud es mayormente plana en el pasa-banda. Para un filtro paso-bajo de N -ésimo orden, esto significa que las primeras $2N-1$ derivadas de la función magnitud al cuadrado son cero en $\Omega=0$. Otra propiedad es que la aproximación es monótonica en el pasa-banda y en la stop-banda. La función magnitud al cuadrado para un filtro analógico de Butterworth es de la forma:

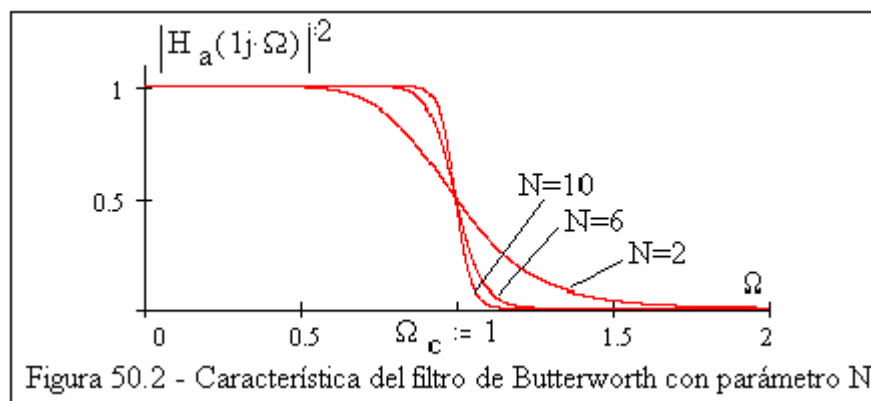
$$\left(|H_a(j \cdot \Omega)| \right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j \cdot \Omega}{j \cdot \Omega_c} \right)^{2 \cdot N}} \quad (50-1)$$

Gráficamente, se observa en la Figura 50.1.

$N := 3$	longitud del filtro
$\Omega_c := 1$	frecuencia de corte (normalizada)
$\Omega := 0, 0.1 \dots 2$	rango para las frecuencias normalizadas
$H_a(\Omega) := \left \frac{1}{1 + \left(\frac{j \cdot \Omega}{j \cdot \Omega_c} \right)^{2 \cdot N}} \right $	



A medida que el parámetro N en esta ecuación crece, las características del filtro se hacen más agudas, esto es, permanecen más ajustadas al 1 en el pasa-banda y van más rápidamente al 0 en la stop-banda, aunque la función del cuadrado de la magnitud en la frecuencia de corte será siempre $1/2$ debido a la naturaleza de (50-1). La dependencia de la característica del filtro de Butterworth con el parámetro N se indica en la Figura 50.2.



A partir de la función magnitud al cuadrado en (50-1), se observa que $H(s) \cdot H(-s)$ debe ser de la forma:

$$H_a(s) \cdot H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j \cdot \Omega_c} \right)^{2 \cdot N}} \quad (50-2)$$

Las raíces de la polinomial del denominador (los polos de la función magnitud al cuadrado) deben ser de la forma:

$$s_p = (-1)^{\frac{1}{2 \cdot N}} \cdot (j \cdot \Omega_c)$$

Así hay $2 \cdot N$ polos igualmente espaciados en ángulo sobre un círculo de radio Ω_c en el plano-s. Los polos están simétricamente localizados con respecto al eje imaginario. Un polo jamás cae sobre el eje imaginario y uno si lo hace sobre el eje real para N par y no para N impar. El espaciamiento entre los polos sobre el círculo es π/N . Por ejemplo, para $N=3$, los polos están espaciados $\pi/3$ o sea 60° , como se indica en la Figura 50.3.

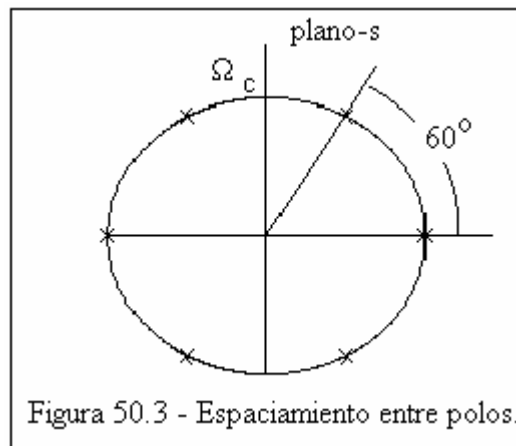


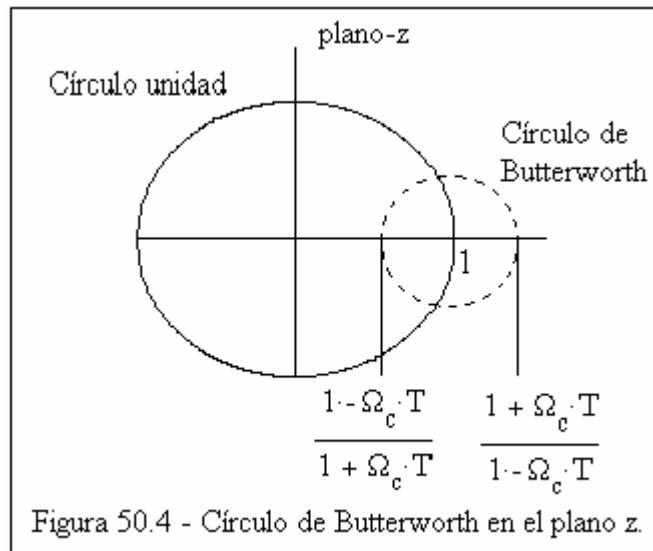
Figura 50.3 - Espaciamiento entre polos.

Para determinar la función de transferencia del filtro analógico a asociar con la función de magnitud al cuadrado de Butterworth, se desea realizar la factorización $H_a(s) \cdot H_a(-s)$. Se observa que los polos de la función magnitud al cuadrado ocurren en pares, de modo que si hay un polo en $s = s_p$, también hay un polo en $s = -s_p$.

Consecuentemente, para construir $H_a(s)$ a partir de la función magnitud al cuadrado se debe elegir un polo a partir de cada uno de estos pares. Si se restringe el filtro a ser causal y estable, lo cual es generalmente el caso, entonces estos polos se corresponderán con polos en el semiplano izquierdo del círculo de Butterworth.

Si se obtiene un filtro digital de Butterworth a partir de analógico por mapeo del patrón de polos desde el plano-s al plano-z usando la transformación bilineal, entonces en el plano-z la correspondiente función magnitud al cuadrado tiene $2 \cdot N$ ceros en $z = -1$.

El círculo de Butterworth en el plano-s entonces mapea a un círculo en el plano-z, ya que la transformación bilineal es un mapeo conforme. Sin embargo, el círculo de Butterworth en el plano-z no está centrado en el origen, como se indica en la Figura 50.4



Mientras que los polos en el plano-s están igualmente espaciados en ángulo sobre el círculo de Butterworth, esto no es cierto en el plano-z. De hecho, los pares de polos en s_p y $-s_p$ en el plano-s mapean a pares de polos z_p y $1/z_p$ en el plano-z. Para el ejemplo previo con $N=3$, los polos de la función magnitud al cuadrado en el plano-z son como los que se indican en la Figura 50.5.

$$T := 1 \quad \Omega_c := 0.35 \quad \Omega_c \cdot T = 0.35 \quad N = 3 \quad \text{datos}$$

$$k := 0..5 \quad \text{índice para las raíces}$$

$$s_k := \Omega_c \cdot \exp \left[j \cdot \left(\pi + \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{2 \cdot N} \right) \right] \quad \text{raíces en el plano-s}$$

$$s^T = (-0.35 \quad -0.18 - 0.3i \quad 0.17 - 0.3i \quad 0.35 \quad 0.18 + 0.3i \quad -0.18 + 0.3i)$$

$$z_k := \frac{1 - s_k \cdot T}{1 + s_k \cdot T} \quad \text{raíces en el plano-z aplicada la transformación bilineal}$$

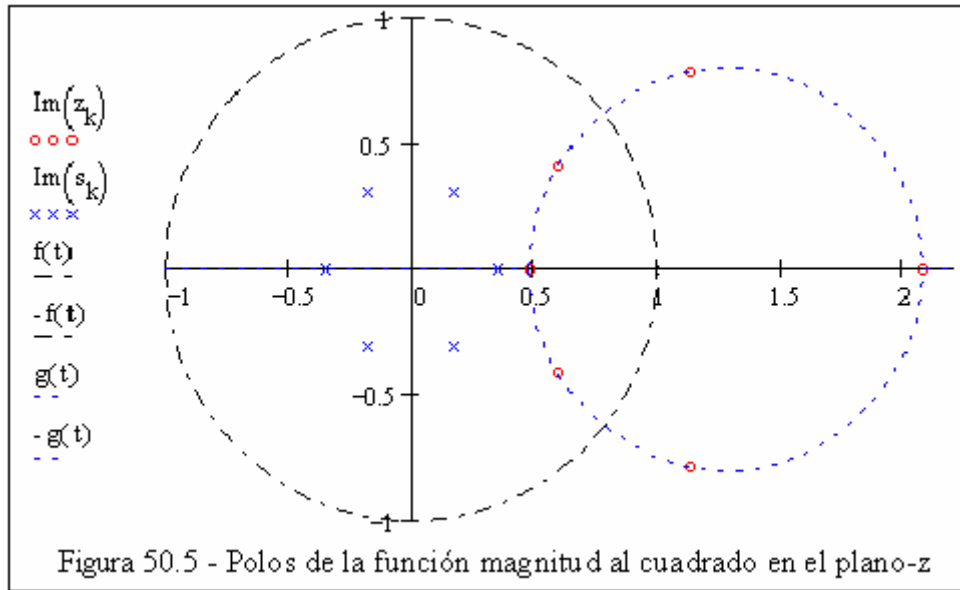
$$z^T = (2.08 \quad 1.14 + 0.78i \quad 0.6 + 0.41i \quad 0.48 \quad 0.6 - 0.41i \quad 1.14 - 0.78i)$$

$$h := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \Omega_c \cdot T}{1 + \Omega_c \cdot T} + \frac{1 + \Omega_c \cdot T}{1 - \Omega_c \cdot T} \right) \quad \text{Abcisa del centro del círculo de Butterworth}$$

$$r := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \Omega_c \cdot T}{1 - \Omega_c \cdot T} - \frac{1 - \Omega_c \cdot T}{1 + \Omega_c \cdot T} \right) \quad \text{Radio del círculo de Butterworth}$$

$$f(t) := \sqrt{1 - t^2} \quad \text{Ecuación del círculo unidad} \quad t := -1, -0.99..3$$

$$g(t) := \sqrt{r^2 - (t - h)^2} \quad \text{Ecuación del círculo de Butterworth}$$



Generalmente, al diseñar un filtro de Butterworth usando la transformación bilineal, el procedimiento más sencillo es determinar primero la ubicación de los polos en el plano-s y luego mapear los polos de la mitad izquierda al plan-z con la transformación apropiada, más bien que intentar ubicar los polos directamente en el plano-z.

51 - EJEMPLO DE DISEÑO DE FILTRO DE BUTTERWORTH

Ahora se aplicará esta solución al diseño de un filtro digital paso-bajo para procesar una señal analógica con las siguientes especificaciones.

$F_s := 8 \cdot \pi \cdot 10^3$	Frecuencia de muestreo (F_s)
$f_{c\delta 1} := 3.768 \cdot 10^3$	Pasa-banda (f_c)
$\delta_1 := 1$	Máximo ripple en el pasa-banda (δ_1)
$f_{s\delta 2} := 6.285 \cdot 10^3$	Stop-banda (f_s)
$\delta_2 := 20$	Mínima atenuación en el stop-banda (δ_2)

En términos de frecuencias digitales:

$$\Delta_c := \frac{2 \cdot \pi \cdot f_{c\delta 1}}{F_s} \quad \Delta_c = 0.942 \quad \Delta_s := \frac{2 \cdot \pi \cdot f_{s\delta 2}}{F_s} \quad \Delta_s = 1.571$$

$$s = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad \text{Transformación bi-lineal}$$

Haciendo $T=1$ y sustituyendo z :

$$s = 2 \cdot \frac{(1 - e^{-j \cdot \frac{\omega}{2}})}{(1 + e^{-j \cdot \frac{\omega}{2}})} = \frac{2 \cdot e^{-j \cdot \frac{\omega}{2}} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{\omega}{2}} - e^{-j \cdot \frac{\omega}{2}} \right)}{e^{-j \cdot \frac{\omega}{2}} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{\omega}{2}} + e^{-j \cdot \frac{\omega}{2}} \right)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot (j) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = j \cdot 2 \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

La función de transferencia del Filtro de Butterworth en ω vale:

$$H_a\left(j \cdot 2 \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = \left[1 + \left(\frac{j \cdot 2 \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j \cdot \Omega_c} \right)^{2 \cdot N1} \right]^{-1}$$

1) Se comienza resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 + \left[\frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\Delta_s}{2}\right)}{\Omega_c} \right]^{2 \cdot N1} = 10^{\frac{\delta_2}{10}} \quad 1 + \left[\frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\Delta_c}{2}\right)}{\Omega_c} \right]^{2 \cdot N1} = 10^{\frac{\delta_1}{10}}$$

Despejando N1 y tomando logaritmos se llega a:

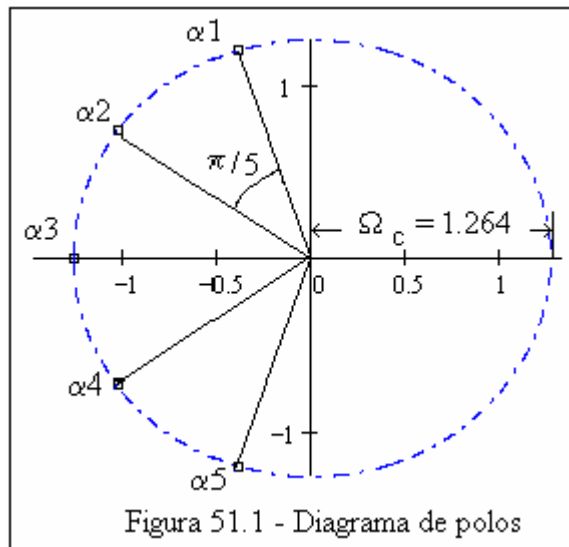
$$N1 := \frac{1}{2} \cdot \ln \left[\frac{10^{\frac{\delta_2}{10}} - 1}{10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1} \right] \cdot \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\Delta_s}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\Delta_c}{2}\right)} \right]^{-1} \quad N1 = 4.403$$

Como N debe ser entero: $N := \text{ceil}(N1)$ $N = 5$

Despejando Ω_c de alguna de las dos ecuaciones:

$$\Omega_c := \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\Delta_s}{2}\right)}{\left(\frac{10^{\frac{\delta_2}{10}} - 1}{10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1} \right)^{\frac{1}{2 \cdot N}}} \quad \Omega_c = 1.264$$

Se determinan los polos en el plano-s residentes en el semiplano de parte real negativa (condición para obtener un filtro estable). Los polos estarán sobre un círculo de radio Ω_c , con ángulo de espaciamiento π/N y el central cayendo sobre el semieje real negativo (caso N impar). Ver Figura 51.1.



$$\alpha_1 := -\Omega_c \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{N}\right) + j \cdot \left(\Omega_c \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{N}\right)\right) \quad \alpha_1 = -0.391 + 1.202j$$

$$\alpha_2 := -\Omega_c \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{N}\right) + j \cdot \Omega_c \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{N}\right) \quad \alpha_2 = -1.022 + 0.743j$$

$$\alpha_3 := -\Omega_c \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{N}\right) + j \cdot \left(\Omega_c \cdot \sin\left(0 \cdot \frac{\pi}{N}\right)\right) \quad \alpha_3 = -1.264$$

$$\alpha_4 := -\Omega_c \cdot \cos\left[(-1) \cdot \frac{\pi}{N}\right] + j \cdot \left[\Omega_c \cdot \sin\left[(-1) \cdot \frac{\pi}{N}\right]\right] \quad \alpha_4 = -1.022 - 0.743j$$

$$\alpha_5 := -\Omega_c \cdot \cos\left[(-2) \cdot \frac{\pi}{N}\right] + j \cdot \left[\Omega_c \cdot \sin\left[(-2) \cdot \frac{\pi}{N}\right]\right] \quad \alpha_5 = -0.391 - 1.202j$$

Con estos resultados se puede construir $\mathbf{H_a(s)}$:

$$H_a(s) = \frac{k_1}{\left(s^2 + c_1 \cdot s + d_1\right) \cdot \left(s^2 + c_2 \cdot s + d_2\right) \cdots \left(s^2 + \frac{c_N}{2} \cdot s + \frac{d_N}{2}\right)}$$

$$H_a(s) = \frac{k_1}{\left(s^2 + c_1 \cdot s + d_1\right) \cdot \left(s^2 + c_2 \cdot s + d_2\right) \cdots \left(s + \frac{d_{N+1}}{2}\right)}$$

para N par e impar respectivamente.

En este caso:

$$H_a(s) = \frac{k_1}{\left(s^2 + c_1 \cdot s + d_1\right) \cdot \left(s^2 + c_2 \cdot s + d_2\right) \cdot (s + d_3)}$$

Los factores del denominador surgen de:

$$H_a(s) = \frac{k_1}{((s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_5)) \cdot ((s - \alpha_2) \cdot (s - \alpha_4)) \cdot (s - \alpha_3)}$$

donde las raíces simétricas respecto del eje real son conjugadas entre si. Uno de los factores se puede expresar:

$$(s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_5) = (s - (\operatorname{Re}(\alpha_1) + j(\operatorname{Im}(\alpha_1)))) \cdot (s - (\operatorname{Re}(\alpha_1) - j(\operatorname{Im}(\alpha_1))))$$

$$(s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_5) = ((s - \operatorname{Re}(\alpha_1)) - j(\operatorname{Im}(\alpha_1))) \cdot ((s - \operatorname{Re}(\alpha_1)) + j(\operatorname{Im}(\alpha_1)))$$

$$(s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_5) = (s - \operatorname{Re}(\alpha_1))^2 + \operatorname{Im}(\alpha_1)^2 = (s^2 - s \cdot 2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha_1)) + (\operatorname{Re}(\alpha_1)^2 + \operatorname{Im}(\alpha_1)^2)$$

$$c_1 := -2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha_1) \quad c_1 = 0.781$$

$$d_1 := \operatorname{Re}(\alpha_1)^2 + \operatorname{Im}(\alpha_1)^2 \quad d_1 = 1.597$$

Del mismo modo:

$$c_2 := -2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha_2) \quad c_2 = 2.045$$

$$d_2 := \operatorname{Re}(\alpha_2)^2 + \operatorname{Im}(\alpha_2)^2 \quad d_2 = 1.597$$

$$d_3 := -\alpha_3 \quad d_3 = 1.264$$

El valor de k_1 debe ser tal que en $s=0$, $H_a(s)$ debe ser 1.

$$1 = \frac{k_1}{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3} \quad k_1 := d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \quad k_1 = 3.223$$

Para el ejemplo en consideración, $H_a(s)$ queda:

$$H_a(s) = \frac{3.223}{(s^2 + 0.781 \cdot s + 1.597) \cdot (s^2 + 2.045 \cdot s + 1.597) \cdot (s + 1.264)}$$

2) Aplicando la **Transformación Bilineal**, sustituyendo:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Se obtiene $H(z)$, cuya forma general queda:

$$H(z) = \frac{k \cdot (1 + z^{-1})^N}{\left(1 + q_1 \cdot z^{-1} + r_1 \cdot z^{-2}\right) \cdot \left(1 + q_2 \cdot z^{-1} + r_2 \cdot z^{-2}\right) \cdots \left(1 + q_{\frac{N}{2}} \cdot z^{-1} + r_{\frac{N}{2}} \cdot z^{-2}\right)}$$

$$H(z) = \frac{k \cdot (1 + z^{-1})^N}{\left(1 + q_1 \cdot z^{-1} + r_1 \cdot z^{-2}\right) \cdot \left(1 + q_2 \cdot z^{-1} + r_2 \cdot z^{-2}\right) \cdots \left(1 + q_{\frac{N+1}{2}} \cdot z^{-1}\right)}$$

para N par e impar respectivamente.

Para el ejemplo queda:

$$H_a(z) = \frac{k_1}{\left[\left(2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + c_1 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + d_1 \right] \cdot \left[\left(2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + c_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + d_2 \right] \cdot \left(2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + d_3 \right)}$$

Trabajando con el primer factor del denominador y haciendo T=1 por comodidad (el denominador del primer factor pasará como numerador de H(z)):

$$\left[\left(2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + c_1 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + d_1 \right] = \frac{4 \cdot (1 - z^{-1})^2}{(1 + z^{-1})^2} + 2 \cdot c_1 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + d_1$$

$$4 \cdot (1 - 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}) + 2 \cdot c_1 \cdot (1 - z^{-2}) + d_1 \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})$$

$$4 - 8 \cdot z^{-1} + 4 \cdot z^{-2} + 2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_1 \cdot z^{-2} + d_1 + 2 \cdot d_1 \cdot z^{-1} + d_1 \cdot z^{-2}$$

$$(4 + 2 \cdot c_1 + d_1) + (-8 + 2 \cdot d_1) \cdot z^{-1} + (4 - 2 \cdot c_1 + d_1) \cdot z^{-2}$$

$$(4 + 2 \cdot c_1 + d_1) \cdot \left[1 + \frac{-8 + 2 \cdot d_1}{(4 + 2 \cdot c_1 + d_1)} \cdot z^{-1} + \frac{4 - 2 \cdot c_1 + d_1}{(4 + 2 \cdot c_1 + d_1)} \cdot z^{-2} \right]$$

$$q_1 := \frac{-8 + 2 \cdot d_1}{(4 + 2 \cdot c_1 + d_1)}$$

$$q_1 = -0.671$$

$$r_1 := \frac{4 - 2 \cdot c_1 + d_1}{(4 + 2 \cdot c_1 + d_1)}$$

$$r_1 = 0.564$$

Del mismo modo:

$$q_2 := \frac{-8 + 2 \cdot d_2}{(4 + 2 \cdot c_2 + d_2)}$$

$$q_2 = -0.496$$

$$r_2 := \frac{4 - 2 \cdot c_2 + d_2}{(4 + 2 \cdot c_2 + d_2)}$$

$$r_2 = 0.156$$

Para el último factor:

$$2 \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + d3 = \frac{2 - 2 \cdot z^{-1} + d3 + d3 \cdot z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$2 - 2 \cdot z^{-1} + d3 + d3 \cdot z^{-1} = (2 + d3) + (-2 + d3) \cdot z^{-1} = (2 + d3) \cdot \left(1 + \frac{-2 + d3}{2 + d3} \cdot z^{-1}\right)$$

$$q3 := \frac{-2 + d3}{(2 + d3)} \quad q3 = -0.226$$

En el numerador de $H(z)$ va a quedar:

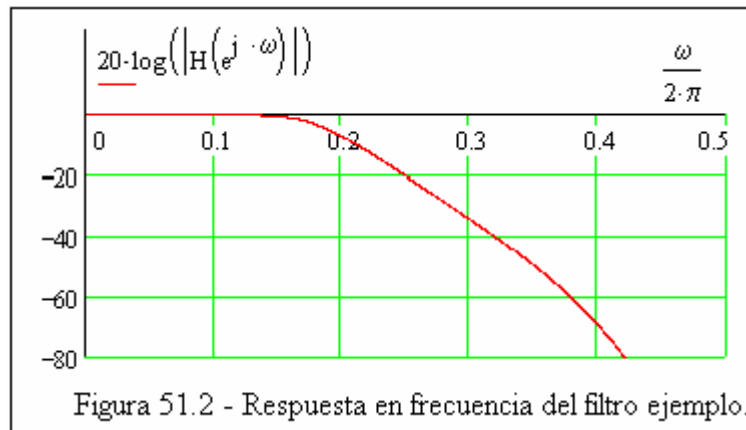
$$k := \frac{k1}{(4 + 2 \cdot c1 + d1) \cdot (4 + 2 \cdot c2 + d2) \cdot (2 + d3)} \quad k = 0.014$$

Para el ejemplo en consideración, $H(z)$ queda:

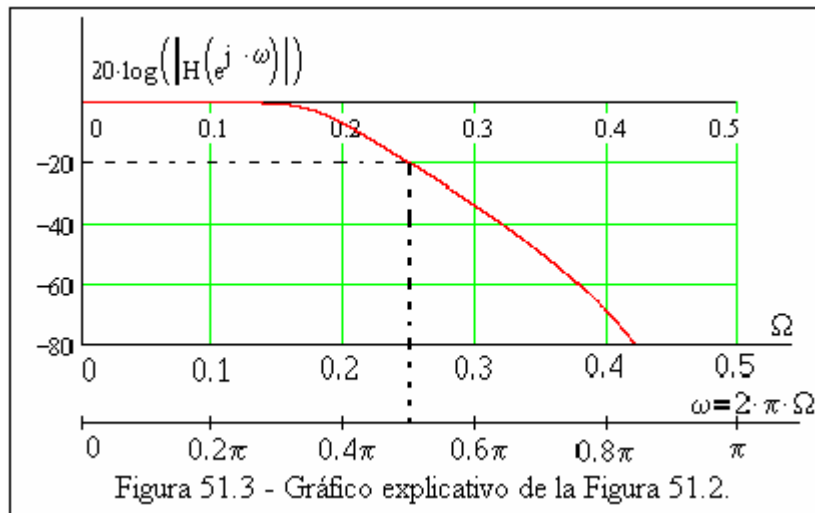
$$H(z) := \frac{0.014 \cdot (1 + z^{-1})^5}{(1 - 0.671 \cdot z^{-1} + 0.564 \cdot z^{-2}) \cdot (1 - 0.496 \cdot z^{-1} + 0.156 \cdot z^{-2}) \cdot (1 - 0.226 \cdot z^{-1})}$$

Si se representa gráficamente (Figura 51.2) la función $20 \cdot \log(|H(j\omega)|)$, sustituyendo a z por $e^{j\omega}$:

$$f(\omega) := 20 \cdot \log(|H(e^{j\omega})|) \quad \omega := 0.001, .002 \dots \pi$$



En forma genérica, en la Figura 51.3 se puede apreciar el comportamiento de la atenuación en el stop-banda (20 dB, según la especificación de diseño)

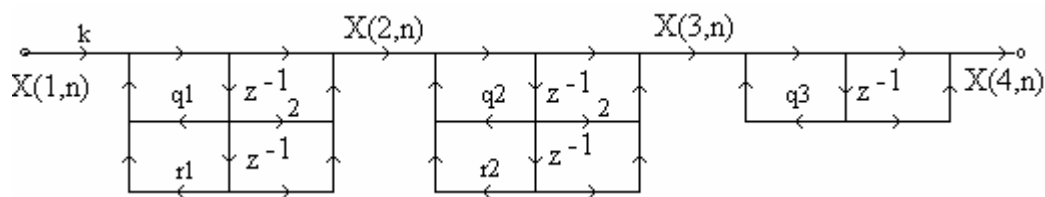
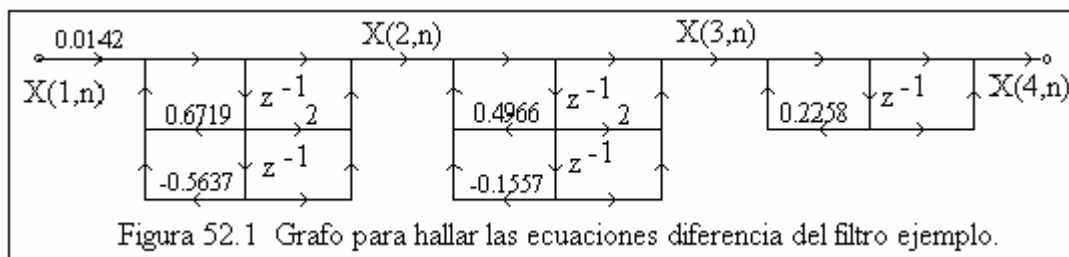


52 - IMPLEMENTACION DEL FILTRO

Se parte de suponer que una unidad adquisidora ha muestreado una señal externa y guardado en memoria los valores de las muestras. La señal externa se puede simular fácilmente mediante una microcomputadora, al igual que las muestras.

Con estos datos y la estructura del filtro (especialmente su **gráfico de flujo**) se puede plantear la ecuación diferencia que representa el sistema en el dominio del tiempo.

Recuérdese que los valores de z^{-n} implican retardos de $n \cdot T$ segundos, siendo T la inversa de la frecuencia de muestreo (F_s), o bien el tiempo entre muestra y muestra de la señal de entrada. Las ecuaciones diferencia, que representan el comportamiento en el dominio del tiempo del filtro considerado como ejemplo, surgen fácilmente a partir de la Figura 52.1.



$$q1 = -0.671 \quad r1 = 0.564 \quad q1 = -0.671 \quad r2 = 0.156$$

$$q2 = -0.496 \quad q3 = -0.226 \quad k = 0.014$$

$$X_{2,n} = -q1 \cdot X_{2,n-1} - r1 \cdot X_{2,n-2} + k \cdot (X_{1,n} + 2 \cdot X_{1,n-1} + X_{1,n-2})$$

$$X_{3,n} = -q2 \cdot X_{3,n-1} - r2 \cdot X_{3,n-2} + X_{2,n} + 2 \cdot X_{2,n-1} + X_{2,n-2}$$

$$X_{4,n} := -q3 \cdot X_{4,n-1} + X_{4,n} + X_{3,n-1}$$

De acuerdo al sistema de ecuaciones anterior, se aprecia la formación de un arreglo llamado X, bidimensional, cuyo primer índice señala la entrada a cada subsistema de segundo orden.

Para el ejemplo, 1 indica la entrada al filtro y a su vez primer subsistema, 2 la entrada al segundo subsistema, 3 la entrada al tercer subsistema y finalmente 4 la salida del filtro. El segundo índice señala el número de muestra considerada..

La idea general consiste en muestrear una señal exterior (en este caso generada internamente, suma de sinusoides). Produciendo el arreglo bidimensional de entrada.

$$A := 1 \quad B := 100 \quad \text{pulsaciones de las componentes}$$

$$f(t) := \sin\left(A \cdot \frac{\pi}{180} \cdot t\right) + \sin\left(B \cdot \frac{\pi}{180} \cdot t\right) \quad t := 0..360$$

$$n := 3..360 \quad \text{rango para los índice de muestras}$$

$$X_{1,n} := f(n) \quad \text{Arreglo de entrada}$$

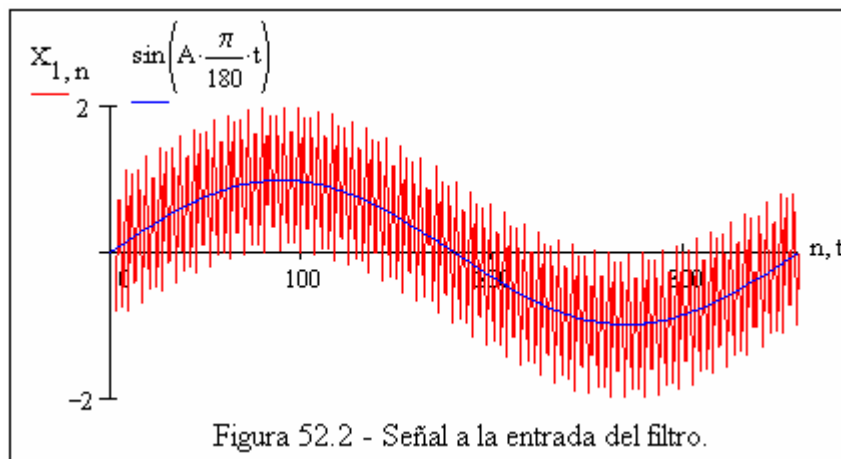


Figura 52.2 - Señal a la entrada del filtro.

Aplicando esta entrada al sistema de ecuaciones diferencia:

$$X_{2,n} := -q1 \cdot X_{2,n-1} - r1 \cdot X_{2,n-2} + k \cdot (X_{1,n} + 2 \cdot X_{1,n-1} + X_{1,n-2})$$

$$X_{3,n} := -q2 \cdot X_{3,n-1} - r2 \cdot X_{3,n-2} + X_{2,n} + 2 \cdot X_{2,n-1} + X_{2,n-2}$$

$$X_{4,n} := -q3 \cdot X_{4,n-1} + X_{4,n} + X_{3,n-1}$$

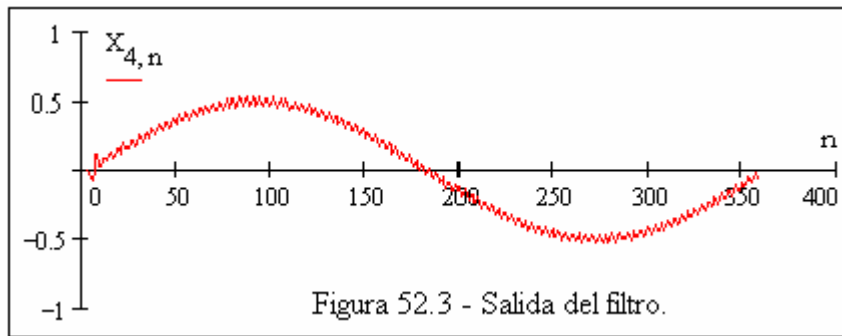


Figura 52.3 - Salida del filtro.

53 - POGRAMA BASIC PARA EL CALCULO DE FILTROS BUTTERWORTH

El siguiente programa en BASIC a analizar, generaliza la mecánica de cálculo tanto para N (longitud del filtro) par como para N impar,

```

5 CLS : pi = ATN(1) * 4
10 INPUT "Limite del pasa-banda: "; p1: p1 = p1 * pi
20 INPUT "Limite del stop-banda: "; p2: p2 = p2 * pi
30 INPUT "Atenuación máxima en el pasa-banda (en dB):"; a1
40 INPUT "Atenuación mínima en el stop-banda (en dB):"; a2

45 'Cálculo de la longitud del filtro (N) y la frecuencia de corte (OC)
50 n1 = LOG((10 ^ (a2 / 10) - 1) / (10 ^ (a1 / 10) - 1))
60 n2 = 2 * LOG(TAN(p2 / 2) / TAN(p1 / 2))
70 N = INT(n1 / n2) + 1
72 OC = (((2 * TAN(p2 / 2)) ^ (2 * N)) / ((10 ^ (a2 / 10) - 1))) ^ (1 / 2 / N)
75 DIM F(N), r(N), q(N), C(N), d(N)

80 'Cálculo de polos de H(s)
90 S = pi / N: F(1) = pi / 2 + S / 2
100 FOR i = 2 TO N / 2 + .5
110   F(i) = F(1) + (i - 1) * S
120 NEXT i
130 FOR i = 1 TO N / 2 + .5
140   r(i) = OC * COS(F(i)): q(i) = OC * SIN(F(i))
150 NEXT i

155 'Cálculo de k
160 k1 = r(1) * r(1) + q(1) * q(1): k = k1 ^ (N / 2)
164 IF INT(N / 2) <> N / 2 THEN k = OC * k1 ^ INT(N / 2)

165 'Cálculo de los Coeficientes de H(z)
166 t4 = 1
170 FOR i = 1 TO N / 2
180   C(i) = -2 * r(i): d(i) = k1
190   t5 = 4 + 2 * C(i) + d(i): t4 = t4 / t5
200   r(i) = (4 - 2 * C(i) + d(i)) / t5
210   q(i) = (-8 + 2 * d(i)) / t5
220   PRINT "R("; i; ")="; r(i), "Q("; i; ")="; q(i)
225 NEXT i
226 IF INT(N / 2) = N / 2 THEN k = k + t4: PRINT "k="; k: END
227 r(i) = 0: t5 = 2 + OC: q(i) = (-2 + OC) / t5: t4 = t4 / t5

```

```

240 PRINT "R("; i; ")="; r(i), "Q("; i; ")="; q(i)
250 k = k + t4: PRINT "k="; k
270 PRINT "Apriete (1) para Analisis: "
275 u$ = INKEY$: IF u$ <> "1" THEN 275
280 CLS : DIM X(N / 2 + 1, 363)

285 REM Generación de la entrada
290 INPUT "Frecuencia Normalizada de la primera componente: "; A
300 INPUT "Frecuencia Normalizada de la segunda componente: "; b
320 FOR z = 0 TO 359
330   X(1, z + 3) = SIN(A * pi * z) + SIN(b * pi * z)
335 NEXT z

340 REM Algoritmo del filtro
350 FOR i = 3 TO 363
355   X(2, i) = -q(1) * X(2, i - 1) - r(1) * X(2, i - 2) + k * (X(1, i) + 2 * X(1, i - 1) +
X(1, i - 2))
360   FOR j = 3 TO N / 2 + 1
370     X(j, i) = -q(j - 1) * X(j, i - 1) - r(j - 1) * X(j, i - 2) + (X(j - 1, i) + 2 * X(j - 1, i -
1) +
      X(j - 1, i - 2))
385   NEXT j
387 NEXT i
390 IF INT(N / 2) = N * 2 THEN p5 = N / 2 + 1: GOTO 400
392 n2 = N / 2 + 1.5
394 FOR i = 2 TO 362
396   X(n2, i) = -q(n2 - 1) * X(n2, i - 1) + X(n2 - 1, i) + X(n2 - 1, i - 1)
397 NEXT i

398 REM gráfico de la señal de salida del filtro
399 p5 = n2
400 b = 1: SCREEN 2
410 FOR i = 0 TO 359
420   y2 = 88 + 200 * X(p5, i + 3) * b
430   IF y2 < 0 OR y2 > 175 THEN CLS : b = b / 1.5: GOTO 410
440   'PRINT i * 255 / 360, y2
445 PSET (i * 600 / 360, y2)
450 NEXT i
460 GOTO 460

```

Entre las líneas 10 y 40 se ingresan los datos para el diseño del filtro, es decir, los límites de frecuencia de la pasa-banda y la stop-banda, así también como las atenuaciones máxima y mínima (en decibeles) respectivamente.

Las frecuencias de referencia son las digitales (Δ) y como fracción de π . Para el ejemplo desarrollado más arriba, los datos ingresados son: $\Delta_c = 0.3$, $\Delta_s = 0.5$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 20$.

Entre las líneas 45 y 75 se calcula la longitud del filtro (N) y la frecuencia de corte (Ω_c) conforme a las expresiones vistas.

Entre las líneas 80 y 150 se calculan los polos de H(s) los que se almacenan en los arreglos $r(i)$ (parte real) y $r(i)$ (parte imaginaria). Una corrida para el ejemplo arroja:

$$\mathbf{r(1) = - 0.39 \quad q(1) = 1.201 \quad r(2) = - 1.022 \quad q(2) = 0.742 \quad r(3) = -1.263 \quad q(3) = 0}$$

Entre las líneas 155-164 se calcula la constante **k**. Que para el ejemplo da **k = 3.216**.
Entre las líneas 165-250 se calculan e imprimen los Coeficientes de $H(z)$, que se ree imprimen en los arreglos **r(i)** y **q(i)**. Una corrida para el ejemplo arroja:

$$\mathbf{r(1) = 0.564 \quad q(1) = 0.672 \quad r(2) = 0.156 \quad q(2) = 0.742 \quad r(3) = 0 \quad q(3) = - 0.226}$$

A continuación (líneas 285 a335) se "inyecta" una suma de sinusoides de dos frecuencias normalizadas distintas y en el ejemplo se conforman por un sumando que "cae" en la zona pasa-banda (**A = 1/180 = 0.0055 < 0.3**) y el otro en el stop-banda (**B = 100/180 = 0.55 > 0.5**).

Si los desarrollos anteriores son correctos, al hacer pasar a esta señal por el filtro se debe obtener a la salida el primer sumando (con poca atenuación) y el segundo (muy atenuado).

Entre las líneas 340-397 se procesa a la señal con el algoritmo del filtro y entre 399 y 450 se grafica la señal de salida.

FILTRO DIGITAL FIR – Diseño por Ventaneo

Un filtro de fase lineal FIR se puede obtener por ventaneo, o truncamiento, de la respuesta impulsiva de un filtro ideal con una de varias funciones ventaneantes disponibles. La ventana de truncamiento en el tiempo resulta en una convolución de la transformada de la ventana con la transformada del filtro en frecuencia.

Elección de una Ventana

La ventana muestreada en el tiempo deberá ser tan corta como sea posible, para reducir el tiempo de cálculo. La ventana deberá ser también estrecha en frecuencia de modo que la convolución con la respuesta impulsiva resulte de mínima distorsión. Ya que tiempo y frecuencia están inversa e inseparablemente relacionados, estos dos requerimientos son conflictivos.

Una variedad de formas de ventanas en el tiempo se pueden usar para minimizar efectos indeseables en el dominio de frecuencia. Cada una optimiza alguna característica de la respuesta en frecuencia resultante: algunas proveen pasabanda más estrecho con menos atenuación en el stop banda, algunos proveen regiones de transición poco profundas con mejor atenuación en el stop banda, etc.

Fase

Ya que el diseño de filtro está relacionado con la distorsión de fase así también como con el filtrado de la amplitud, es importante saber cómo el ventaneo afecta la fase del filtro original. Las ventanas que son simétricas en el tiempo no distorsionan la fase del sistema.

Implementación en Mathcad

Se definirán algunas de las funciones de ventaneo estándar usadas en diseño de filtros FIR y se ilustrará su aplicación.

Debajo están las definiciones y gráficos de cinco funciones de ventaneo comunes **Bartlett, Hanning, Hamming, Blackman, y Kaiser**.

Las primeras cuatro están dadas como funciones de dos variables (la longitud y el índice de término). La de Kaiser es también función del parámetro b, se grafica debajo para b=5.

Ventana Rectangular:

$$R(n, N) := (n \geq 0) \cdot (n \leq N - 1)$$

Ventana de Bartlett (triangular):

$$Ba(n, N) := \text{if} \left(n \leq \frac{N-1}{2}, \frac{2 \cdot n}{N-1}, 2 - \frac{2 \cdot n}{N-1} \right) \cdot R(n, N)$$

Ventana de Hanning

$$Hn(n, N) := \left(.5 - .5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N - 1}\right) \right) \cdot R(n, N)$$

Ventana de Hamming

$$Hm(n, N) := \left(.54 - .46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N - 1}\right) \right) \cdot R(n, N)$$

Ventana de Blackman

$$Bl(n, N) := \left(.42 - .5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N - 1}\right) + .08 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N - 1}\right) \right) \cdot R(n, N)$$

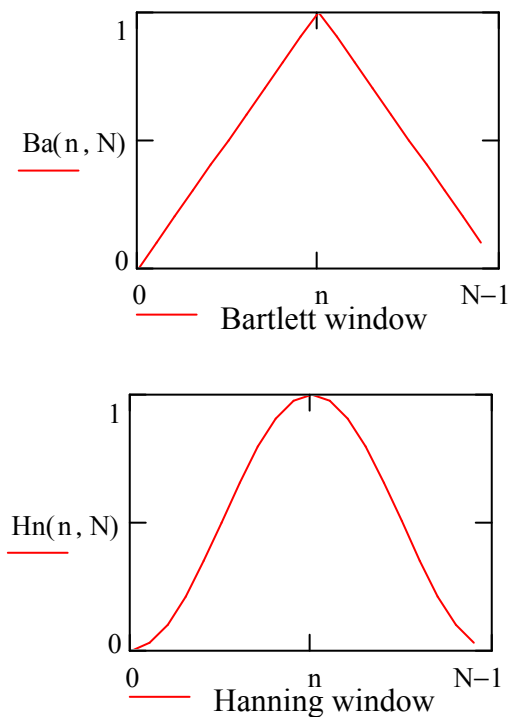
Ventana de Kaiser con parámetro b:

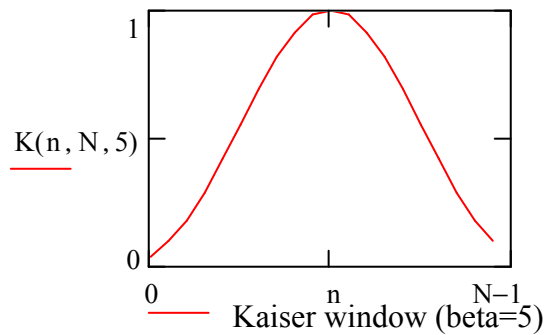
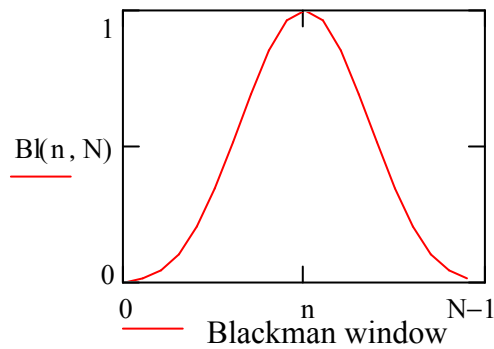
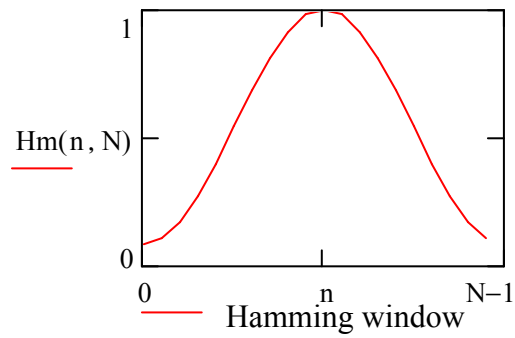
$$K(n, N, \beta) := \frac{I_0 \left[\beta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{N - 1 - 2 \cdot n}{N - 1} \right)^2} \right]}{I_0(\beta)} \cdot R(n, N)$$

Se define una longitud y un rango variable para graficar las funciones:

$$N := 21 \quad n := 0..N - 1$$

Fig. 15.1 Gráficos de las Funciones Ventaneantes





Las siguientes ecuaciones dan la respuesta impulsiva de un filtro ideal paso-bajo con una longitud específica y frecuencia de corte. Primero, se especifica una longitud y frecuencia de corte para usar en la construcción de un tren de impulsos en el dominio del tiempo.

Longitud:

$$M := 21 \quad m := 0..M-1$$

Frecuencia de corte

$$\omega_c := .5 \cdot \pi$$

La respuesta en el tiempo está dada por:

$$r_m := \frac{\sin \left[\omega_c \cdot \left(m - \frac{M-1}{2} \right) \right]}{\pi \cdot \left(m - \frac{M-1}{2} \right)}$$

Para M impar estas funciones centran la respuesta impulsiva del filtro en el tiempo:

$$\text{odd} := \text{mod}(M, 2) \quad \text{center} := \text{if}\left(\text{odd}, \frac{M-1}{2}, \frac{M}{2}\right)$$

$$r_{\text{center}} := \text{if}\left(\text{odd}, \frac{\omega_c}{\pi}, r_{\text{center}}\right)$$

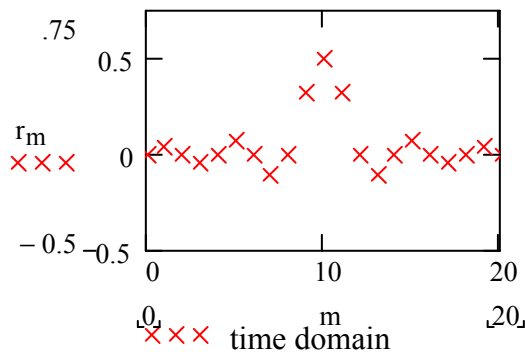


Fig. 15.2 La respuesta impulsiva del filtro en el tiempo

Fase Lineal FIR usando una ventana de Hamming

Este diseño ejemplo ventanea la respuesta impulsiva de un filtro ideal paso-bajo con una función ventaneante w . Este ejemplo usa una ventana de Hamming. Para ver el efecto de una ventana diferente, edite el nombre de la función sobre el lado derecho de la definición para w .

Se elige una función ventaneante

$$w_m := \text{Hm}(m, M)$$

Mathcad calcula el vector de coeficientes para la respuesta impulsiva ventaneada usando el operado **vectorize**, el cual multiplica cada elemento de r por el correspondiente elemento de w

Los coeficientes a de la respuesta impulsiva ventaneada están dados por:

$$\vec{a} := r \cdot w$$

La correspondiente respuesta en frecuencia es:

$$H(\omega) := \sum_m a_m \cdot \exp(-1j \cdot m \cdot \omega)$$

El plot de la respuesta en frecuencia, define las variables rango para la frecuencia

$$k := 0..200$$

$$\omega_k := \frac{\pi \cdot k}{200} \quad h_k := |H(\omega_k)|$$

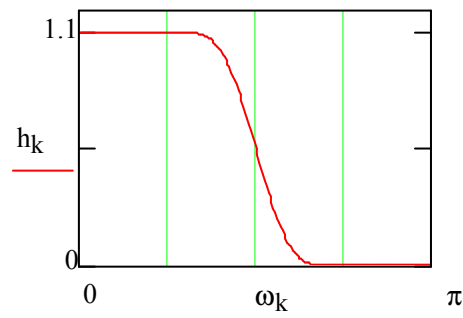


Fig. 15.3 Respuesta en frecuencia filtrada

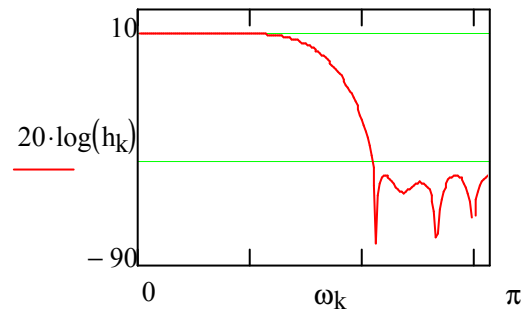


Fig. 15.4 Respuesta en frecuencia filtrada en dB

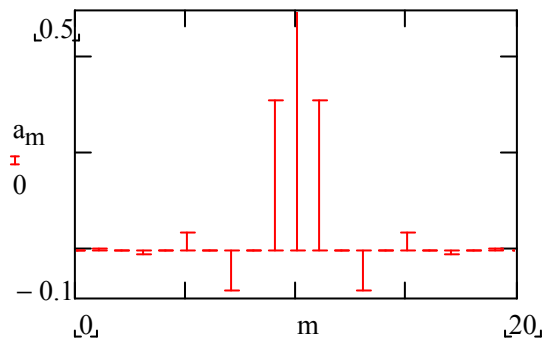


Fig. 15.5 Coeficientes de Fourier

Diseño de Filtros FIR - Método de las series de Fourier

Los filtros FIR están caracterizados por la respuesta impulsiva finita ($h_0, h_1, \dots, h_K$). Su función de transferencia, es una polinomial en z^{-1} :

$$H'(z) = \sum_{k=0}^K h_k \cdot z^{-k} \quad (1)$$

Para diseñar un filtro de este tipo, se seleccionan los coeficientes, $\{h_k\}$, de modo que la función de transferencia tenga una respuesta en frecuencia $H'(e^{j\lambda})$, con $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, que se aproxime a las especificaciones de diseño dentro de ciertas tolerancias.

Tal como en el diseño de los filtros IIR, si la señal de entrada es muestreada a F_s , entonces la frecuencia analógica f en Hz está relacionada con la frecuencia digital λ a través de:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{F_s}$$

Sea $H'(z)$ la respuesta en frecuencia deseada, la cual puede estar especificada o bien términos de parte real o imaginaria, o equivalentemente en términos de su amplitud y fase. Denotadas las parte real e imaginaria de $H'(z)$ por $R(\lambda)$ e $I(\lambda)$, respectivamente. Esto es:

$$H'(e^{j\lambda}) = R(\lambda) + j \cdot I(\lambda)$$

Para la respuesta impulsiva real $R(\lambda)$ es una función par en λ y puede ser expandida en serie de Fourier consistente sólo en términos coseno, e $I(\lambda)$ puede ser expandida en serie de Fourier que sólo tenga senos:

$$R(\lambda) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \lambda) \quad I(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \lambda)$$

Usando las identidades elementales:

$$\begin{aligned} \cos(n \cdot \lambda) &= \frac{e^{1j \cdot \lambda \cdot n} + e^{-1j \cdot \lambda \cdot n}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \\ \sin(n \cdot \lambda) &= \frac{e^{1j \cdot \lambda \cdot n} - e^{-1j \cdot \lambda \cdot n}}{1j \cdot 2} = \frac{z^n - z^{-n}}{1j \cdot 2} \end{aligned}$$

Se pueden reemplazar los términos seno y coseno de las expresiones de las Series de Fourier por las potencias de z . Así se tiene la expansión de $H(\exp(j\lambda))$ en término de las potencias de z :

$$H'(e^{j\lambda}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{z^n + z^{-n}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{z^n - z^{-n}}{2}$$

$$H'(e^{j\lambda}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(z^{-n} \cdot \frac{a_n - b_n}{2} + z^n \cdot \frac{a_n + b_n}{2} \right) \quad (2)$$

Supóngase que la serie es truncada en $n=N$, para dar una aproximación $H_N(z)$:

$$H_N(z) = a_0 + \sum_{n=1}^N \left(z^{-n} \cdot \frac{a_n - b_n}{2} + z^n \cdot \frac{a_n + b_n}{2} \right)$$

$$H_N(z) = a_0 + z^{-1} \cdot \frac{a_1 - b_1}{2} + z^1 \cdot \frac{a_1 + b_1}{2} + z^{-2} \cdot \frac{a_2 - b_2}{2} + z^2 \cdot \frac{a_2 + b_2}{2} \dots$$

$$+ \dots + z^{-(N-1)} \cdot \frac{a_{N-1} - b_{N-1}}{2} + z^{N-1} \cdot \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2} + z^{-N} \cdot \frac{a_N - b_N}{2} + z^N \cdot \frac{a_N + b_N}{2}$$

$$H_N(z) = z^N \cdot \left(\frac{a_N + b_N}{2} + z^{-1} \cdot \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2} + \dots + a_0 \cdot z^{-N} + \dots \right)$$

$$\left(+ z^{-N-1} \cdot \frac{a_1 - b_1}{2} + \dots + z^{-2 \cdot N} \cdot \frac{a_N - b_N}{2} \right)$$

Claramente se puede hacer que $H(z)$ sea una polinomial en z^{-1} dentro de los corchetes, ya que z^N representa simplemente un avance de N muestras. El resultado es:

$$H(z) = \frac{a_N + b_N}{2} + z^{-1} \cdot \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2} + \dots + a_0 \cdot z^{-N} + \dots$$

$$+ z^{-N-1} \cdot \frac{a_1 - b_1}{2} + \dots + z^{-2 \cdot N} \cdot \frac{a_N - b_N}{2} \quad (3)$$

Una comparación con la expresión (1) muestra que los h_k están relacionados con los a_k y los b_k a través de:

$$h_k = \frac{a_{N-k} + b_{N-k}}{2} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$h_N = a_0$$

$$h_k = \frac{a_{k-N} - b_{k-N}}{2} \quad N \leq k \leq 2 \cdot N$$

La $H(z)$ dada en (3) se aproxima a la $H'(z)$ más allá del delay z^{-N} lo cual en el dominio de la frecuencia corresponde a un desplazamiento en fase lineal y puede frecuentemente ser ignorado.

El procedimiento de arriba arranca con las especificaciones de las partes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia deseada. Esto es, por supuesto, equivalente a la especificación de amplitud y fase. Con frecuencia en la práctica, la fase no tiene

importancia particular y no se especifica. Consecuentemente, por simplicidad se puede suponer una parte imaginaria $I(\lambda)$ nula lo cual corresponde a fase 0. Si se hace esto, todos los b_k son nulos. De la ecuación (3) se ve que, en este caso la respuesta impulsiva es simétrica, esto es, $h_k = h_{2N-k}$. Deberá notarse, sin embargo, que hay muchas aplicaciones importantes donde el filtro deseado implica una parte real cero, como por ejemplo en el caso de un diferenciador ideal.

Para ilustrar el procedimiento descripto arriba, se considerarán dos ejemplos. En el primero, las partes real e imaginaria de la respuesta de frecuencia deseada son:

$$R(\lambda) = 1 - \frac{|\lambda|}{\pi} \quad |\lambda| \leq \pi \quad I(\lambda) = 0$$

Así, $R(\lambda)$ es lo mismo que la respuesta en amplitud. La expansión en Fourier para $R(\lambda)$ es bien conocida:

$$\lambda := -\pi, -\pi + 0.01 \dots \pi \quad R(\lambda) := 1 - \frac{|\lambda|}{\pi}$$

La expansión en Fourier para esta $R(\lambda)$ está dada por:

$$R(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2 \cdot n + 1) \cdot \lambda]}{(2 \cdot n + 1)^2}$$

De modo que de acuerdo a (2):

$$H'(z) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^{2 \cdot n + 1} + z^{-2 \cdot n - 1})}{(2 \cdot n + 1)^2}$$

Truncando la serie en $n=2$, se obtiene un filtro no-recursivo:

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \left[(z + z^{-1}) + \left[\frac{(z^3 + z^{-3})}{9} \right] + \left[\frac{(z^5 + z^{-5})}{25} \right] \right]$$

$$H(z) = z^5 \cdot \left(\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot z^{-2} + \frac{2}{\pi^2} \cdot z^{-4} + \frac{1}{2} \cdot z^{-5} + \frac{2}{\pi^2} \cdot z^{-6} + \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{z^{-8}}{9} + \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{z^{-10}}{25} \right)$$

Los coeficientes resultan ser

$$h_0 = h_{10} = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{25} = 8.106 \times 10^{-3} \quad h_2 = h_8 = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{\pi^2} = 0.02252$$

$$h_4 = h_6 = \frac{2}{\pi^2} = 0.20264 \quad h_5 = \frac{1}{2}$$

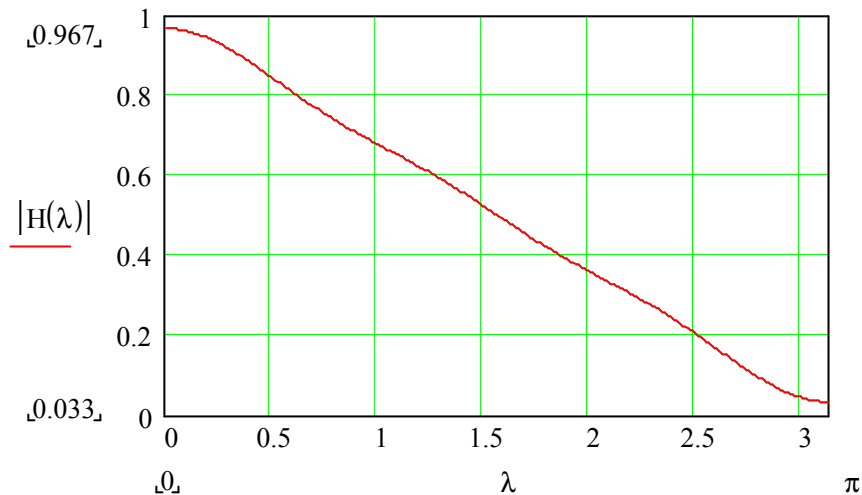
La respuesta en frecuencia, la cual es real, se grafica a continuación:

$$h := 0$$

$$h_0 := 8.106 \times 10^{-3} \quad h_2 := 0.02252 \quad h_4 := 0.20264$$

$$h_6 := h_4 \quad h_8 := h_2 \quad h_{10} := h_0 \quad h_5 := \frac{1}{2}$$

$$H(\lambda) := \sum_{n=0}^{10} h_n \cdot e^{-j \cdot n \cdot \lambda} \quad \lambda := 0, 0.01 \dots \pi$$



En forma directa, este cálculo se puede hacer así:

$$N := 5 \quad k := 1 \dots 2 \cdot N \quad h := 0 \quad a := 0$$

$$R(\lambda) := \left(1 - \frac{|\lambda|}{\pi} \right)$$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda) \cos(k \cdot \lambda) d\lambda$$

$$a_0 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda) d\lambda$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda) \sin(k \cdot \lambda) d\lambda$$

$$k1 := 0 \dots N - 1$$

$$k2 := N \dots 2 \cdot N$$

$$h_{k1} := \frac{a_{N-k1} + b_{N-k1}}{2}$$

$$h_{k2} := \frac{a_{k2-N} - b_{k2-N}}{2}$$

El segundo ejemplo es el diseño de un filtro paso-bajo con una frecuencia digital de corte en $\lambda = \pi/3$. La función $R(\lambda)$ se indica entonces como:

$$R(\lambda) := \text{if} \left(|\lambda| < \frac{\pi}{3}, 1, 0 \right)$$

Cuyo desarrollo en serie de Fourier tiene los coeficientes (hasta el término 22):

$$N := 11 \quad a := 0 \quad b := 0 \quad k := 0..2 \cdot N$$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} R(\lambda) \cos(k \cdot \lambda) d\lambda \quad a_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda) d\lambda$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda) \sin(k \cdot \lambda) d\lambda$$

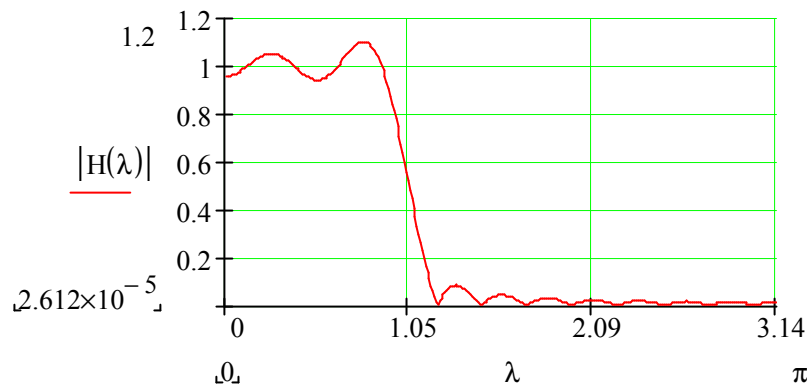
Los coeficientes del filtro se calculan entonces como:

$$k1 := 0..N-1 \quad k2 := N..2 \cdot N$$

$$h_{k1} := \frac{a_{N-k1} + b_{N-k1}}{2} \quad h_{k2} := \frac{a_{k2-N} - b_{k2-N}}{2}$$

La respuesta en frecuencia, la cual es real, se grafica a continuación:

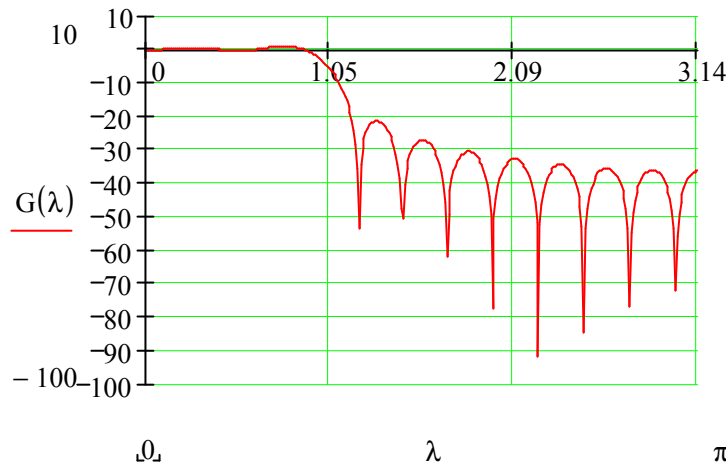
$$H(\lambda) := \sum_{n=0}^{2 \cdot N} h_n \cdot e^{-j \cdot n \cdot \lambda} \quad \lambda := 0, 0.01 .. \pi$$



Se nota en la respuesta en amplitud un comportamiento oscilatorio (Fenómeno de Gibbs) en las cercanías de $\pi/3$ debido a la discontinuidad en la $H^*(z)$ especificada aquí.

Si se representa la ganancia en db:

$$G(\lambda) := 20 \cdot \log(|H(\lambda)|)$$



Las oscilaciones de Gibbs pueden ser suavizadas por medio del uso de **Ventanas**. Una función ventana $W(\lambda)$ de orden M es una función real de λ de la forma:

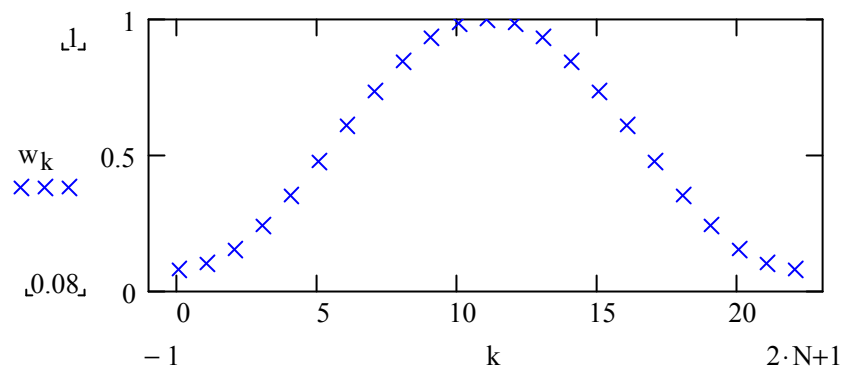
$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^M w_k \cdot e^{1j \cdot \lambda \cdot k}$$

Es esencialmente un pulso estrecho. Una ventana comunmente usada es la de Hamming, para la cual los $\{w_k\}$ están dados por:

$$w_k = 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{k}{N}\right) \quad 0 \leq k \leq 2 \cdot N$$

La $W(\lambda)$ y los $\{w_k\}$ para la ventana de Hamming se representan a continuación:

$$N := 11 \quad k := 0..2 \cdot N \quad w_k := \left(0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{k}{N}\right) \right)$$



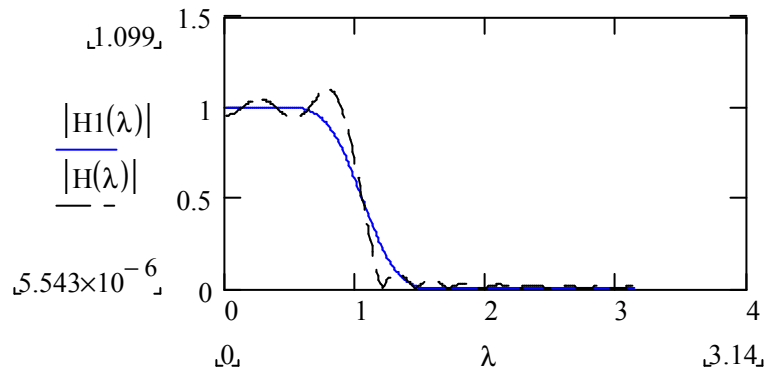
Supóngase que la $H(e^{j\lambda})$ de los ejemplos se convoluciones con la función ventana $W(\lambda)$. La convolución en el dominio de frecuencia de $H(e^{j\lambda})$ con $W(\lambda)$ es equivalente a la multiplicación de cada h_k por un correspondiente w_k . De modo que la respuesta impulsiva del diseño ventaneado es $\{h_k \cdot w_k\}$, donde los $\{h_k\}$ son aquellos obtenidos en el diseño original. La función de transferencia original es entonces:

$$H(z) = \sum_{k=0}^K w_k \cdot h_k \cdot z^{-k}$$

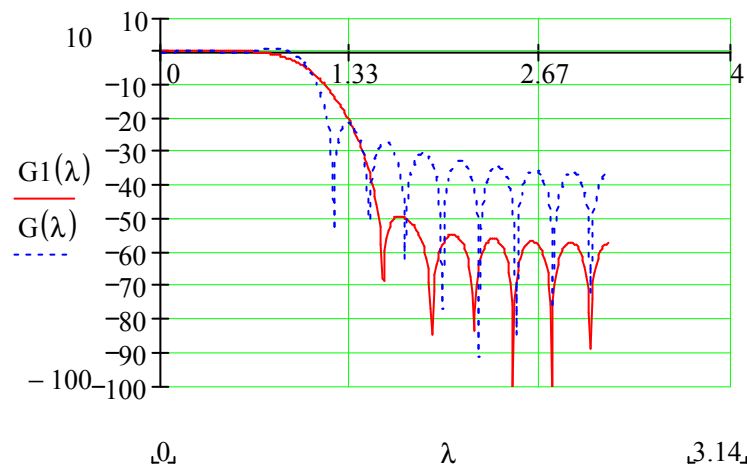
Para el último ejemplo:

$$k := 0..2 \cdot N \quad hw_k := w_k \cdot h_k$$

$$H1(\lambda) := \left[\sum_{k=0}^{2 \cdot N} w_k \cdot h_k \cdot (e^{1j \cdot \lambda})^{-k} \right]$$



$$G1(\lambda) := 20 \cdot \log(|H1(\lambda)|)$$



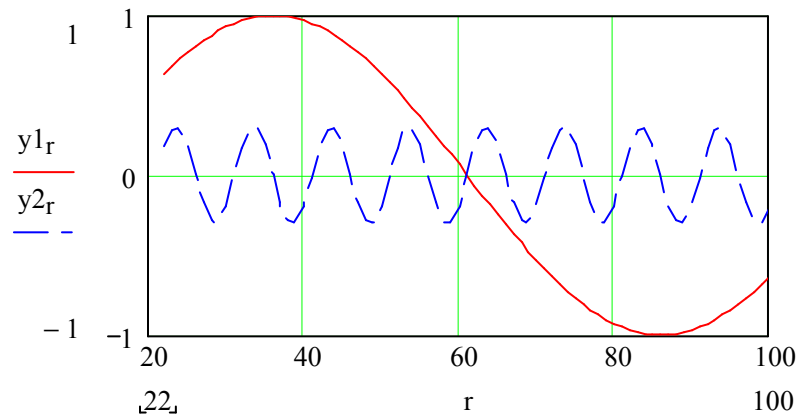
Simulación de FIR

Dados los valores del último ejemplo, se va a analizar el comportamiento del filtro diseñado para distintos valores de frecuencia de 1000 muestras de una senoide pura de frecuencia 10 Hz y de otra de 100 Hz.

$$k := 0..1000 \quad f1 := 10 \quad f2 := 100 \quad r := 2 \cdot N..1000$$

$$x1_k := \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot \frac{k}{1000}\right) \quad x2_k := \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot \frac{k}{1000}\right)$$

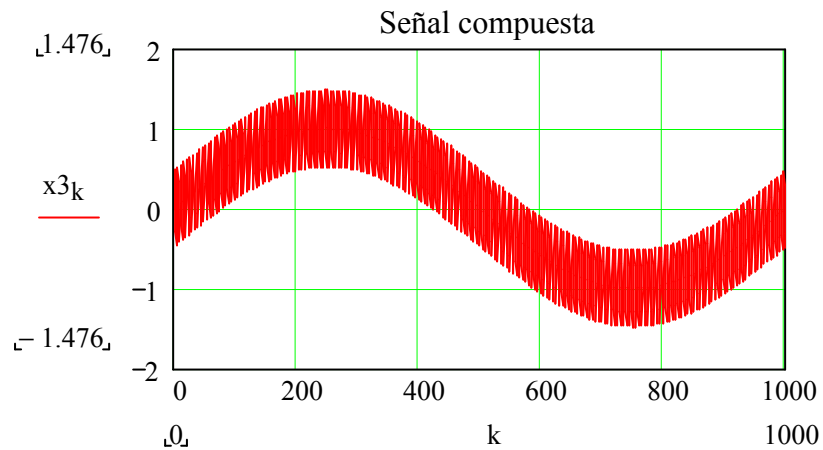
$$y1_r := \sum_{i=0}^{2 \cdot N} h w_i \cdot x1_{r+i-2 \cdot N} \quad y2_r := \sum_{i=0}^{2 \cdot N} h w_i \cdot x2_{r+i-2 \cdot N}$$



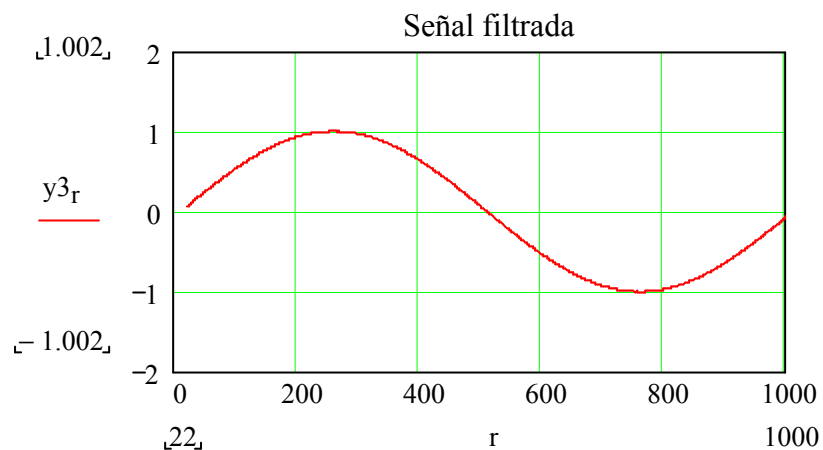
Como se puede observar en el gráfico, la de mayor frecuencia es la que sufre mayor atenuación (filtrado paso-bajo):

Un caso práctico de filtrado lo constituye una señal compuesta de la suma de otras de frecuencia distinta:

$$x3_k := \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \frac{k}{1000}\right) + 0.5 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot \frac{k}{1000}\right)$$



$$y3_r := \sum_{i=0}^{2 \cdot N} h w_i \cdot x3_{r+i-2 \cdot N}$$



FILTROS DIGITALES DE CHEBYSHEV

En un filtro de Butterworth la característica de frecuencia es monotónica tanto en el pasa-banda como en el stop-banda. Consecuentemente, si las especificaciones del filtro están en términos de el error máximo en el pasabanda, las especificaciones son exedidas hacia el extremo de baja frecuencia del pasa-banda. Una solución más eficiente, lo cual lleva usualmente a un filtro de más bajo orden, es distribuir la exactitud de la aproximación uniformemente sobre el pasa-banda o sobre el stop-banda o sobre ambos. Esto se lleva a cabo eligiendo una aproximación que tenga un comportamiento equiripple en vez de un comportamiento monotónico. Los filtros de Chebyshev tienen la propiedad de que la magnitud de la respuesta en frecuencia es equiripple en el pasa-banda y monotónica en el stop-banda o viceversa.

La forma analítica para la función magnitud al cuadrado es:

$$(|H_a(\Omega)|)^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot V_N\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2}$$

donde $V_N(\Omega)$ es la polinomial de Chebyshev de N-ésimo orden definida como:

$$V_N(\Omega) = \cos(N \cdot \arccos(\Omega))$$

Por ejemplo, para:

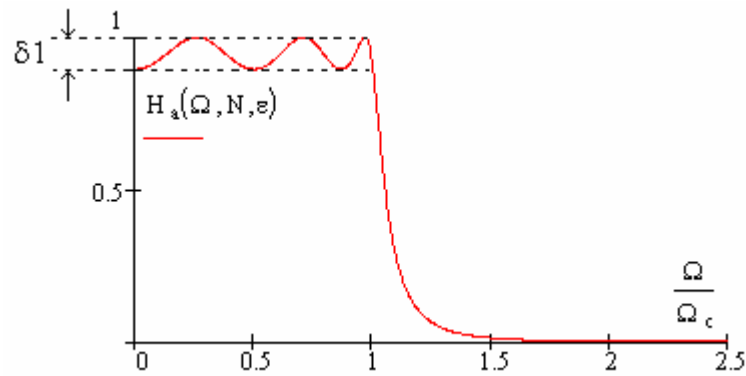
$$N := 6 \quad \epsilon := 0.5 \quad \Omega_c := 4 \quad \Omega := 0, 0.01 \dots 10$$

$$H_a(\Omega, N, \epsilon) := \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cdot \cos\left(N \cdot \arccos\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)\right)^2}} \right|$$

$$\delta 1 := \sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon^2}}$$

por lo tanto

$$\epsilon = \sqrt{\delta 1^{-2} - 1}$$



De la definición de la Polinomial de Chebyshev se nota que $V_N(\Omega)^2$ varía entre 0 y 1 para Ω entre 0 y 1. Para $\Omega > 1$, $\cos(\Omega)$ es imaginario, de modo que $V_N(\Omega)^2$ se comporta como un coseno hiperbólico y consecuentemente se incrementa monótonicamente para $\Omega > 1$.

Luego, en la ecuación de la magnitud al cuadrado el ripple oscila entre 1 y $1/(1+\epsilon^2)$ para

$0 \leq \Omega/\Omega_c \leq 1$ y decrece monótonicamente entre para $\Omega/\Omega_c > 1$.

Se requieren tres parámetros para especificar el filtro: ϵ , Ω_c y N . En un diseño típico, ϵ está especificado por el ripple permitido en el pasa-banda y Ω_c está especificado por la frecuencia de corte deseada. El orden N es entonces elegido de modo que se cumpla la especificación en el stop-banda. Los polos del filtro de Chebyshev caen sobre una elipse en el plano-s. Esta elipse se define a partir de dos circunferencias correspondientes a los ejes mayor y menor de la elipse. El radio del eje menor es **a.Ωc**, donde:

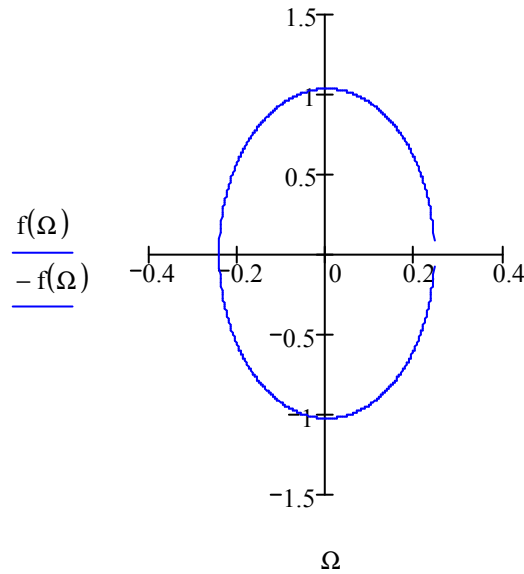
$$a := \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{1}{N}} - \left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{-1}{N}} \right] \quad a = 0.243$$

El radio del eje mayor es **b.Ωc**, donde:

$$b := \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{1}{N}} + \left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{-1}{N}} \right] \quad b = 1.029$$

$$f(\Omega) := b \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{a^2}} \right) \quad \text{elipse}$$

$$\Omega := -a, -a + 0.001 \dots a$$



Para localizar los polos del filtro de Chebyshev sobre la elipse, primero se identifican los puntos sobre los círculos mayor y menor igualmente espaciados en ángulo con un espaciamiento de π/N en tal forma que los puntos estén simétricamente ubicados con respecto al eje imaginario y tal que los puntos jamás caigan sobre el eje imaginario y si sobre el eje real cuando N es impar pero no para N par.

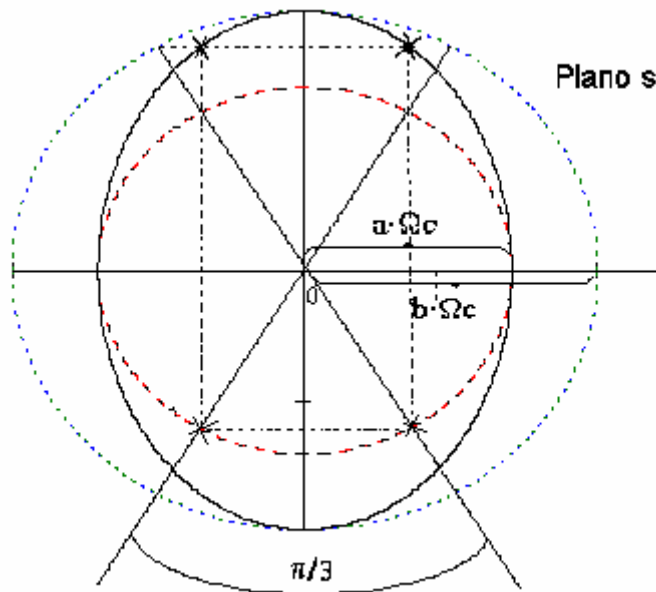
Esta división de los círculos mayor y menor corresponde exactamente a la manera en la cual el círculo es dividido en la localización de los polos del filtro de Butterworth. Los polos de un círculo de Chebyshev caen sobre una elipse con la ordenada especificada por los puntos identificados sobre el círculo mayor y la abscisa especificada por los puntos identificados sobre el círculo menor.

Los polos para $N=3$ se muestran en la siguiente figura:

$$g1(x) := \sqrt{1 - x^2} \quad g2(x) := \sqrt{0.5 - x^2}$$

$$g3(x) := \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{0.5}} \right) \quad g4(x) := g1(0.5)$$

$$x := -1, -0.999 \dots 1$$



Se desea un filtro analógico de Chebyshev para el cual la función magnitud cuadrada satisface las especificaciones:

Límite de frecuencia del pasa-banda: $\Omega_{pb} := 0.2 \cdot \pi$

Límite de frecuencia del stop-banda: $\Omega_{sb} := 0.3 \cdot \pi$

Atenuación máxima en el pasa-banda: $\delta_1 := -1$

Atenuación máxima en el stop-banda: $\delta_2 := -15$

Se plantea la siguiente situación:

$$20 \cdot \log \left(\left| H_a \left(j \cdot 2 \cdot \tan \left(\frac{\Omega_{pb}}{2} \right) \right) \right| \right) \geq -1$$

y

$$20 \cdot \log \left(\left| H_a \left(j \cdot 2 \cdot \tan \left(\frac{\Omega_{pb}}{2} \right) \right) \right| \right) \leq -15$$

Se puede calcular ϵ en función de la atenuación máxima en el pasa-banda δ_1 :

$$\epsilon := \sqrt{10^{\frac{-\delta_1}{10}} - 1} \quad \epsilon = 0.509$$

El parámetro Ω_c es:

$$\Omega_c := 2 \cdot \tan \left[\frac{(0.2 \cdot \pi)}{2} \right] \quad \Omega_c = 0.65$$

El valor mínimo entero de N para el cual se cumplen las especificaciones del stop-banda (-15 db). Utilizando Mathcad, se puede encontrar este valor:

$N := 1$ valor de intento

Given

$$20 \cdot \log \left(\left| \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cdot \cos \left(N \cdot \arccos \left(\frac{2 \cdot \tan \left(0.3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\Omega_c} \right)}} \right| \right) = -15$$

Find(N) = 3.014

Luego el entero próximo superior es:

$N := 4$

Para este valor de N, los parámetros a y b (radio de la circunferencia externa e interna, respectivamente) son:

$$a := \frac{\Omega_c}{2} \cdot \left[\left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{1}{N}} - \left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{-1}{N}} \right] \quad a = 0.237$$

$$b := \frac{\Omega_c}{2} \cdot \left[\left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{1}{N}} + \left(\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} \right)^{\frac{-1}{N}} \right] \quad b = 0.692$$

Para hallar dos de los 8 polos se determina la intersección de la recta, de pendiente negativa que forma un ángulo con el semieje x positivo de $\pi/2 + \pi/(2 \cdot N)$, con la circunferencia de radio b:

$$c := \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot N} \right) \quad \text{pendiente de la recta}$$

$$c \cdot x - \sqrt{b^2 - x^2} = 0$$

intersección

$$x1 := \frac{-b}{\sqrt{1 + c^2}}$$

$$x2 := \frac{b}{\sqrt{1 + c^2}}$$

$$x1 = -0.265$$

$$x2 = 0.265$$

De estos, interesa la abscisa negativa. Las ordenadas de corte se calculan como

$$y1 := c \cdot x1 \quad y2 := -c \cdot x1 \quad y1 = 0.639 \quad y2 = -0.639$$

Con estas ordenadas (que son las de los polos) se recalculan las abscisas correspondientes sobre la elipse:

$$x1 := \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - y1^2} \quad x1 = 0.091$$

Finalmente, dos de los polos de parte real negativa quedan definidos como:

$$p1 := -x1 + j \cdot y1 \quad p2 := -x1 - j \cdot y1$$

Los restantes dos se calculan como:

$$c1 := \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot N} + \frac{\pi}{N}\right) \quad \text{pendiente de la recta}$$

$$x3 := \frac{-b}{\sqrt{1 + c1^2}} \quad x4 := \frac{b}{\sqrt{1 + c1^2}} \quad x3 = -0.639 \quad x4 = 0.639$$

De estos, interesa la abscisa negativa. Las ordenadas de corte se calculan como

$$y3 := c1 \cdot x3 \quad y4 := -c1 \cdot x4 \quad y3 = 0.265 \quad y4 = 1.543$$

Con estas ordenadas (que son las de los polos) se recalculan las abscisas correspondientes sobre la elipse:

$$x3 := \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - y3^2} \quad x3 = 0.219$$

Finalmente, otros dos de los polos de parte real negativa quedan definidos como:

$$p3 := -x3 + j \cdot y3 \quad p4 := -x3 - j \cdot y3$$

Resumiendo:

$$p1 = -0.091 + 0.639i \quad p2 = -0.091 - 0.639i$$

$$p3 = -0.219 + 0.265i \quad p4 = -0.219 - 0.265i$$

La función de transferencia del filtro analógico resultante es:

$$H_a(s) = \frac{k}{(s - p1) \cdot (s - p2) \cdot (s - p3) \cdot (s - p4)}$$

$$H_a(s) = \frac{k}{(s - r1 + j \cdot s1) \cdot (s - r1 - j \cdot s1) \cdot [(s - r2 + j \cdot s2) \cdot (s - r2 - j \cdot s2)]}$$

siendo:

$$r1 := \text{Re}(p1) \quad r2 := \text{Re}(p3) \quad s1 := \text{Im}(p1) \quad s2 := \text{Im}(p3)$$

$$H_a(s) = \frac{k}{(s^2 - 2 \cdot s \cdot r1 + r1^2 + s1^2) \cdot (s^2 - 2 \cdot s \cdot r2 + r2^2 + s2^2)}$$

El valor de k debe ser tal que $H_a(0)=1$, luego:

$$k := (r1^2 + s1^2) \cdot (r2^2 + s2^2) \quad k = 0.049$$

Lo que lleva a:

$$H_a(s) = \frac{0.049}{(s^2 + 0.181 \cdot s + 0.417) \cdot (s^2 + 0.438 \cdot s + 0.118)}$$

El filtro digital correspondiente usando la transformación bilineal es:

$$s = 2 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

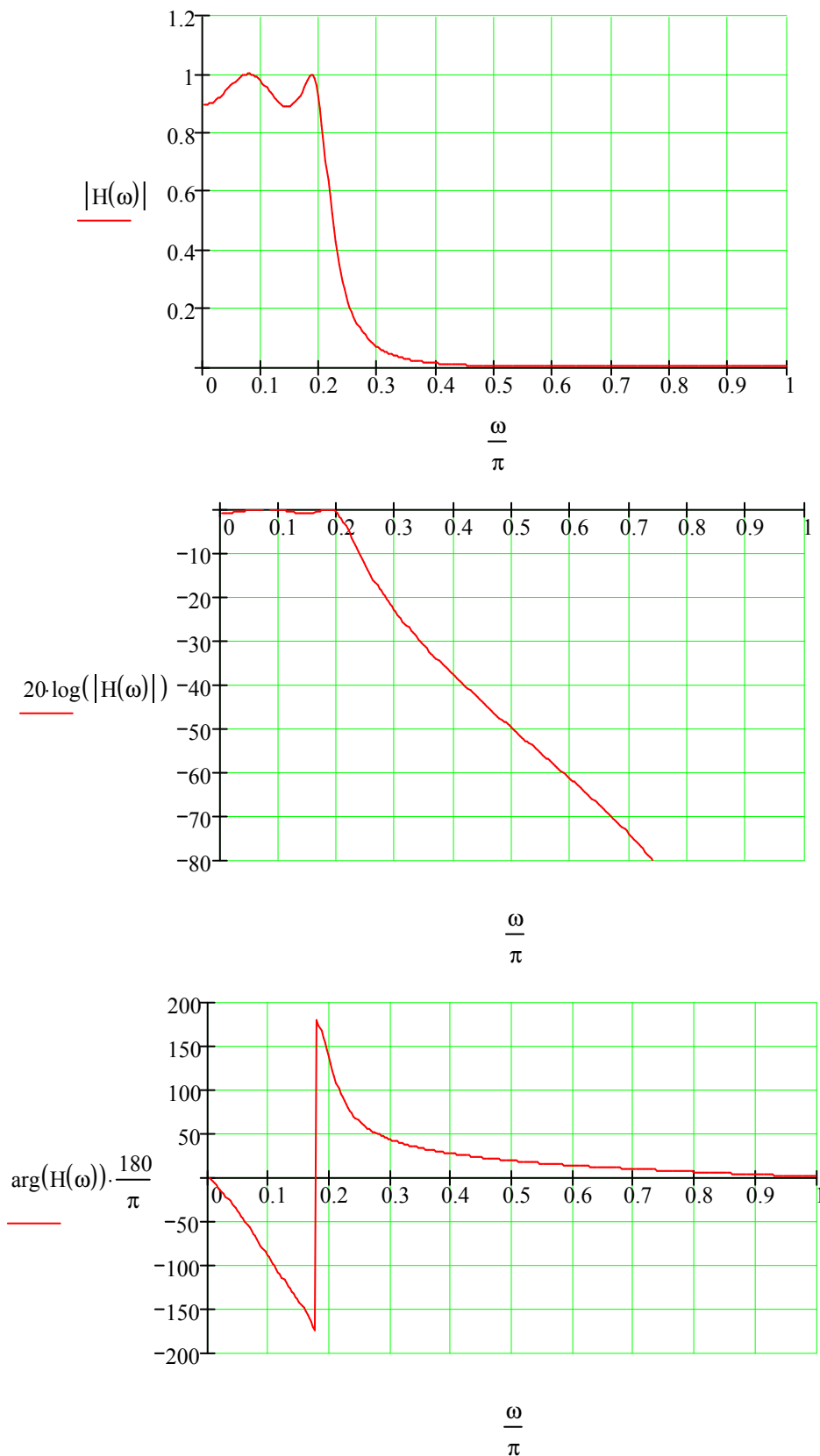
$$H(z) = \frac{0.049}{\left[\left(2 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right)^2 + 0.181 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) + 0.417 \right] \cdot \left[\left(2 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right)^2 + 0.438 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) + 0.118 \right]}$$

$$H(z) = \frac{0.00184 \cdot (1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.4996 \cdot z^{-1} + 0.8482 \cdot z^{-2}) \cdot (1 - 1.5548 \cdot z^{-1} + 0.6493 \cdot z^{-2})}$$

Graficando la respuesta en frecuencia:

$$H(\omega) := \frac{0.00184 \cdot [1 + (e^{j \cdot \omega})^{-1}]^4}{[1 - 1.499 \cdot (e^{j \cdot \omega})^{-1} + 0.848 \cdot (e^{j \cdot \omega})^{-2}] \cdot [1 - 1.555 \cdot (e^{j \cdot \omega})^{-1} + 0.649 \cdot (e^{j \cdot \omega})^{-2}]}$$

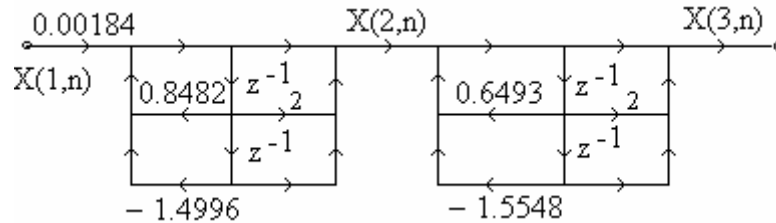
$$\omega := 0, 0.01 \dots \pi$$



Se puede construir un grafo que lleva a las ecuaciones diferencia del filtro, partiendo de la $H(z)$ hallada:

$$H(z) = \frac{0.00184 \cdot (1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.4996 \cdot z^{-1} + 0.8482 \cdot z^{-2}) \cdot (1 - 1.5548 \cdot z^{-1} + 0.6493 \cdot z^{-2})}$$

$$q1 := -1.4996 \quad q2 := -1.5548 \quad r1 := 0.8482 \quad r2 := 0.6493$$

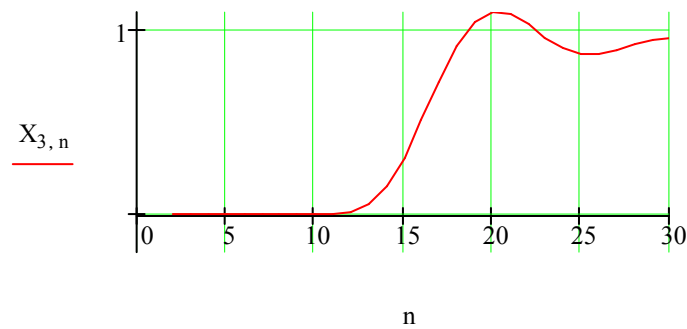


$$M := 360 \quad n := 2..M \quad X_{1,n} := \text{if}(10 < n < 100, 1, 0)$$

Arreglo de entrada al filtro (pulso)

$$X_{2,n} := -q1 \cdot X_{2,n-1} - r1 \cdot X_{2,n-2} + 0.00184 \cdot (X_{1,n} + 2 \cdot X_{1,n-1} + X_{1,n-2})$$

$$X_{3,n} := -q2 \cdot X_{3,n-1} - r2 \cdot X_{3,n-2} + (X_{2,n} + 2 \cdot X_{2,n-1} + X_{2,n-2})$$



$$\max \left[\left(X^T \right)^{\langle 3 \rangle} \right] - 1 = 0.095 \quad \text{Valor del Overshoot}$$

$$v := \left(X^T \right)^{\langle 3 \rangle} \quad \text{vector de salida}$$

El siguiente programa permite encontrar el primer elemento de un vector que excede un umbral determinado:

$$t(v, \text{umb}) := \begin{cases} j \leftarrow 0 \\ \text{while } \left[\left(X^T \right)^{\langle 3 \rangle} \right]_j \leq \text{umb} \\ \quad j \leftarrow j + 1 \\ j \end{cases}$$

Luego el tiempo de crecimiento se calcula como:

$$tr := t(v, 0.9) - t(v, 0.1) \quad tr = 4$$

También es posible determinar la respuesta en frecuencia del filtro a través de su respuesta impulsiva a la que posteriormente se le halla la transformada de Fourier:

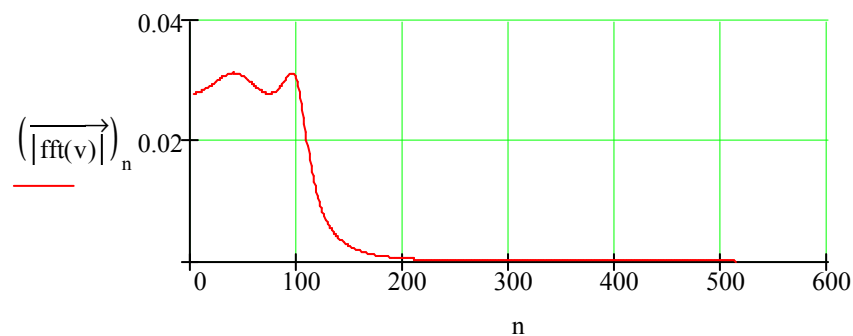
$$M := 2^{10} \quad n := 2..M-1 \quad \text{longitud diádica e índice}$$

$$X_{1,n} := \text{if}(n = 2, 1, 0) \quad \text{Arreglo de entrada al filtro (impulso)}$$

$$X_{2,n} := -q_1 \cdot X_{2,n-1} - r_1 \cdot X_{2,n-2} + 0.00184 \cdot (X_{1,n} + 2 \cdot X_{1,n-1} + X_{1,n-2})$$

$$X_{3,n} := -q_2 \cdot X_{3,n-1} - r_2 \cdot X_{3,n-2} + (X_{2,n} + 2 \cdot X_{2,n-1} + X_{2,n-2})$$

$$v := \left[(X^T)^{\langle 3 \rangle} \right] \quad \text{vector de salida}$$



Ejercicio N° 1 - Desarrollar un programa en lenguaje de alto nivel (Basic, C, etc.) de modo que calcule los coeficientes de un Filtro de Chebyshev que cumpla con las condiciones de frecuencia límite del pasabanda, frecuencia límite del stop-banda, atenuación máxima en el pasa-banda y atenuación mínima en el stop-banda.

Ejercicio N° 2 - Estudiar la respuesta de dos filtros con la misma prestación (uno de Butterworth y el otro de Chebyshev) ante la entrada de un pulso. Describir tiempo de subida (tiempo 0.9 menos tiempo en 0.1) y el overshoot para ambos casos

$$V := \text{fft}(v) \quad M := 1024 \quad n := 2..M-1$$

$$x_n := \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{M}\right) + 0.2 \sin\left(400 \cdot \pi \cdot \frac{n}{M}\right) \quad \text{Arreglo de entrada al filtro (pulso)}$$

$$X := \text{fft}(x) \quad Y := \overrightarrow{(X \cdot V)} \quad y := \text{iff}(Y) \cdot \sqrt{M}$$

