

Conversión Analógica-a-Digital

OBJETIVOS:

- Comprender la conversión de señales analógicas a digitales, analizando las modificaciones que se producen con este proceso. Fundamentalmente, las "réplicas" en la Transformada de Fourier que llevan al fenómeno del "aliasing" si no son interpretadas correctamente.
- Interpretar el concepto de "muestreo" y su asociación con las "réplicas" en la Transformada de Fourier, que llevan al fenómeno del "aliasing". Este es un efecto indeseable y afectará seriamente la reconstrucción de la señal si no se toman los resguardos pertinentes..
- Indicar, con ejemplos simples, cómo se realiza el procesamiento de señales digitales en cuanto a sus transformaciones directas e inversas. Esto es, la descomposición en frecuencia de la señal objeto y la reconstrucción posterior en el dominio del tiempo.
- Analizar y ejemplificar el proceso de cuantización y codificación de señales discretas. Estudiando fundamentalmente los "errores" que se producen con estas etapas en la Conversión.

11 - SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO Y SISTEMAS

En el pasado el procesamiento de señal era un tema que permanecía casi exclusivamente en el campo de la Ingeniería Eléctrica. Eran sólo los especialistas quienes aplicaban filtros paso-bajo para remover las altas frecuencias a partir de señales digitales.

Los expertos podían de esta forma cancelar el ruido no deseado. Podían comprimir la señal y luego reconstruirla. Los expertos en dos dimensiones hacían lo mismo, pero para imágenes.

En nuestros días, todos los seres humanos están en contacto con señales digitales e imágenes (involucrando grandes cantidades de datos). Se necesita más que nunca comprender acerca del procesamiento de señal (muestreo, transformación y filtrado).

Aquí se intentará explicar estas operaciones básicas, usando ejemplos simples.

Muchas señales arrancan sus vidas en forma analógica.

Se convierten en digitales cuando se las muestrea a iguales intervalos de tiempo.

Si $x_{\text{analog}}(t)$ es una señal de **tiempo continuo**, sus muestras dan una señal de tiempo discreto:

$$x_{\text{digital}}(n) = x_{\text{analog}}(n \cdot T) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

El **intervalo de muestreo** es T . Frecuentemente se normaliza a $T=1$, por un simple reescalamiento de la variable tiempo.

Nótese que la señal se supone infinitamente larga, sin comienzo ni fin. La línea de tiempo es: $-\infty < t < \infty$

Entonces, la señal discreta $x_{\text{digital}}(n)$ está definida para todos los enteros.

Ninguna de estas suposiciones es exactamente verdadera para señales reales. La suposición realista (que es frecuentemente bien justificada) es que la señal es demasiado larga como para que sean significativos los efectos terminales.

Trabajando con la línea $\mathbf{R}$ completa y todos los enteros $\mathbf{Z}$, se pueden usar métodos de Fourier en todo momento. Y estos métodos de Fourier son muy poderosos. La herramienta principal en este análisis es la Transformada de Fourier.

Una señal de tiempo discreto es aquella que está definida para valores de la misma en tiempos discretos, llamados **instantes de muestreo**. Si los a los valores muestra se los cuantifica y codifica, resulta de ello una **señal digital**.

Un dispositivo que realiza este muestreo se llama **Convertidor Analógico-a-Digital**. La entrada es una señal analógica (A), probablemente para medidas. La salida es una señal digital (D), probablemente para procesamiento en computadora. Usualmente un convertidor A/D pierde información de alta frecuencia (o la mezcla con bajas frecuencias, lo cual es **aliasing**).

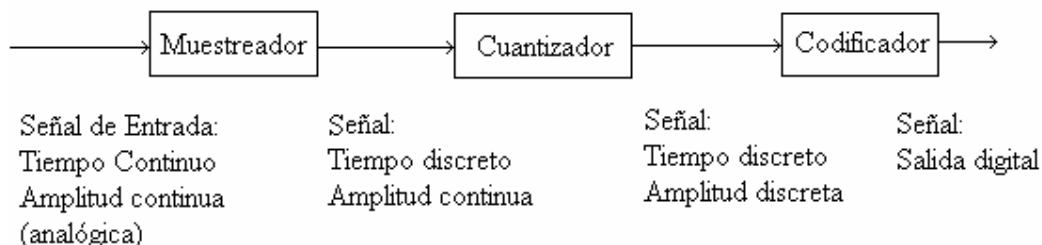
El Teorema de Shanon indicará que cuando no hay altas frecuencias en la señal, la señal analógica puede ser recuperada para todo t desde sus muestra digitales en los tiempos discretos nT .

Las señales de tiempo discreto se considerarán provenientes del muestreo de señales de tiempo continuo. De la cuantificación y codificación de estos valores resulta una señal digital.

En ocasiones, las señales digitales ocurren naturalmente y no hay señal de tiempo que muestrear. Un ejemplo de esto son los datos obtenidos por una computadora. Sin embargo, lo común es que las señales de tiempo discreto se originen en señales de tiempo continuo.

12 - CONVERSION ANALOGICA-A-DIGITAL

Un diagrama en bloques de un convertidor analógico-a-digital (A/D) se muestra en la siguiente figura:



El primer componente es el **muestreador** que extrae valores de la señal de entrada en los instantes de muestreo. La salida del muestreador es una señal de tiempo discreto y amplitud continua, ya que los valores de las muestras tienen el mismo rango continuo de los valores existentes en la señal de entrada $x(t)$. A estas señales frecuentemente se las denomina **señales de datos muestreados**.

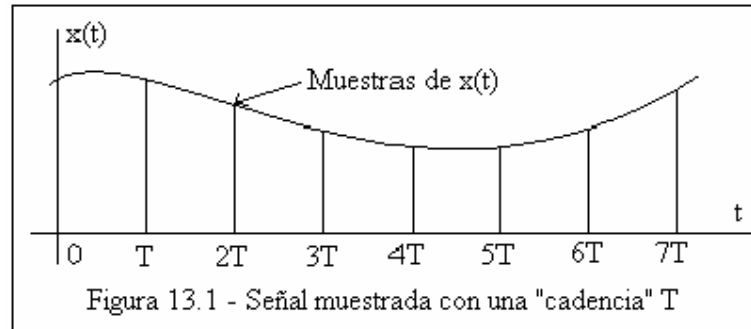
El segundo componente en un convertidor A/D, es un **cuantizador**, el cual convierte el rango continuo de los valores muestra en un número finito de valores, de modo que cada uno de ellos pueda ser representado por una palabra digital de precisión finita.

El **codificador** convierte cada valor de muestra en una palabra digital. Cada uno de estos procesos será descrito en detalle.

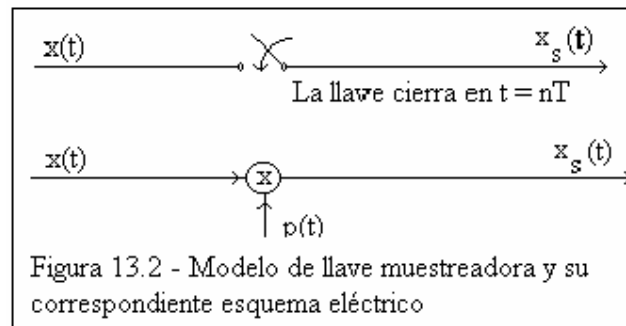
13 - MUESTREO

Muestrear una señal continua $x(t)$ implica representar a $x(t)$ en un número discreto de puntos, $t = nT$, donde T es el **periodo de muestreo**, el cual es el tiempo entre muestras, y n es un entero que establece la posición en tiempo de cada muestra.

El proceso se ilustra en la figura 13.1, la cual grafica un conjunto de muestras tomadas de una señal de tiempo continuo.



En la Figura 13.2 se observa una **llave muestreadora**, la cual constituye el modelo inicial de un dispositivo de muestreo.



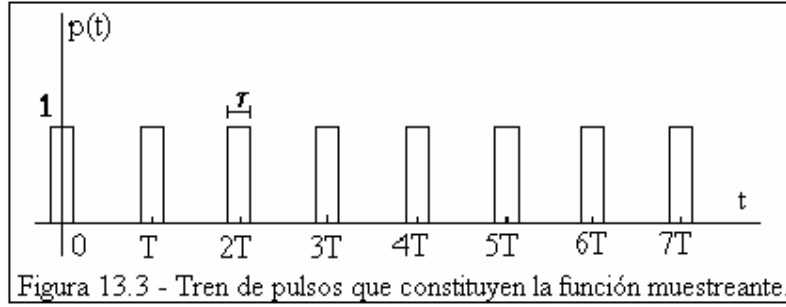
Con el objeto de extraer muestras de $x(t)$, la llave muestreadora cierra brevemente cada T segundos. Esto produce muestras que tienen el valor de $x(t)$ cuando la llave se cierra y un valor nulo cuando la llave está abierta.

Para que el proceso de muestreo sea útil, habrá que tener la capacidad de reconstruir la señal $x(t)$ a partir de las muestras.

En primera instancia se considerará la señal muestreada a partir de $x(t)$, que se llamará en adelante $x_s(t)$. Esto se especifica como:

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t)$$

donde $p(t)$, llamada **función muestreante**, modela la acción de la llave. Se supone que $p(t)$ es un tren de pulsos periódico como el de la siguiente figura:



A partir del espectro de $x_s(t)$, se vislumbrarán las posibilidades para la selección apropiada de los valores de T .

El espectro de $x_s(t)$ puede ser representado por una Serie de Fourier, dado que función muestreante $p(t)$ es periódica.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t}$$

donde C_n es el n -ésimo coeficiente de Fourier de $p(t)$ y está dado por:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t} dt \quad (13-1)$$

siendo f_s la frecuencia fundamental de $p(t)$, la cual es la frecuencia muestreante, y está dada por:

$$f_s = \frac{1}{T} \quad \text{en Hz.}$$

Ya que $x_s(t)$ es el producto entre $x(t)$ y $p(t)$, se tiene:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot x(t) \cdot e^{j \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t} \quad (13-2)$$

Se puede ahora determinar el espectro de $x_s(t)$, el cual será denotado por $X_s(f)$, tomando la Transformada de Fourier de la expresión anterior. Esto es porque $x_s(t)$ no es una función periódica.

La Transformada de Fourier de $x_s(t)$ se define por:

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

de aquí, sustituyendo $x_s(t)$ de la expresión (13-2) en esta última:

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot x(t) \cdot e^{j \cdot n \cdot 2\pi \cdot f_s \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

intercambiando el orden entre integral y sumatoria da:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot (f - n \cdot f_s) \cdot t} dt$$

A partir de la definición de la Transformada de Fourier:

$$X(f - n \cdot f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot (f - n \cdot f_s) \cdot t} dt$$

de modo que la Transformada de Fourier de la señal muestreada puede ser escrita como:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot X(f - n \cdot f_s)$$

lo cual muestra que el espectro de la señal de tiempo continuo muestreada, $x_s(t)$, está compuesta por espectro de $x(t)$ más el espectro de $x(t)$ trasladado a cada armónica de la frecuencia de muestreo. Cada uno de los espectros trasladados está multiplicado por una constante, dada por el correspondiente término en la expansión en serie de Fourier de $p(t)$.

Esto se ilustra en la figura 13.4 para un $X(f)$ supuesto.

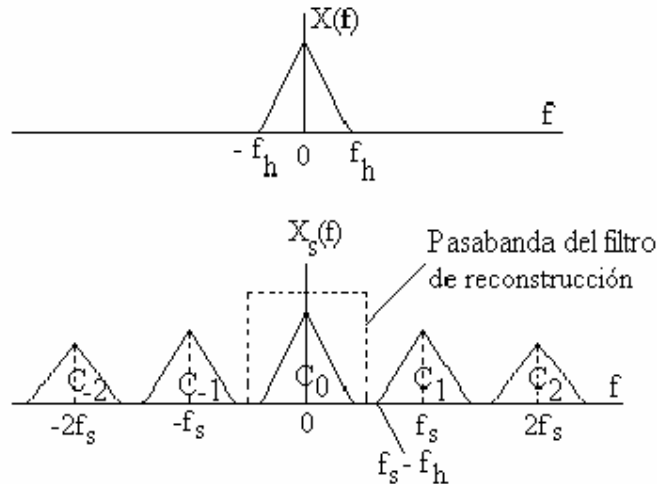


Figura 13.4 - Espectro de la señal muestreada

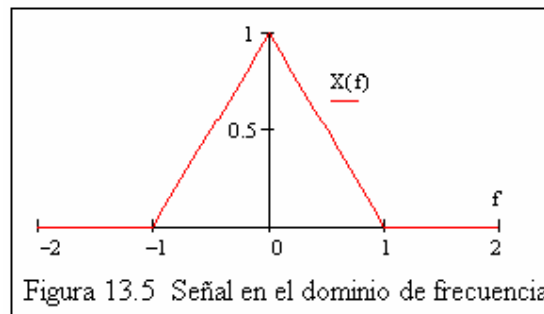
También se muestra la respuesta de amplitud de un supuesto filtro de reconstrucción. Si la señal muestreada es filtrada por el filtro de reconstrucción, la salida del filtro es, en el dominio de frecuencia, $C_0 \cdot X(f)$, y la señal en el dominio del tiempo es $C_0 \cdot x(t)$.

Numéricamente:

$$f_h := 1 \quad \text{Frecuencia de corte de la señal}$$

$$X(f) := \text{if} \left(|f| < f_h, \frac{-|f|}{f_h} + 1, 0 \right) \quad \text{Señal en el dominio de frecuencia}$$

$$f := -2 \cdot f_h, -2 \cdot f_h + 0.1 .. 2 \cdot f_h \quad \text{rango}$$



En cuanto a la función muestreante:

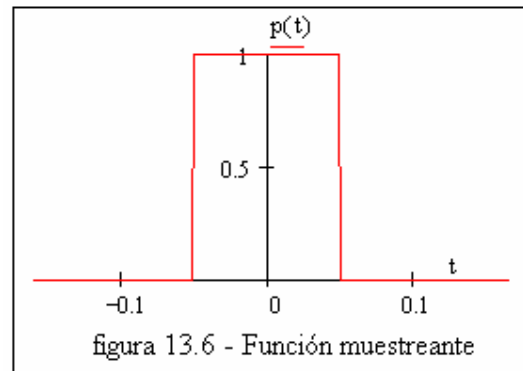
$$T := 0.4 \quad \text{periodo de muestreo} \quad f_s := \frac{1}{T}$$

$$\tau := 0.05 \quad \text{duración del pulso}$$

La función, en el intervalo $(-T/2 \text{ y } T/2)$ será:

$p(t) := \text{if}(|t| < \tau, 1, 0)$ Función muestreante en el dominio del tiempo

$$t := -\frac{T}{2}, -\frac{T}{2} + 0.001 \dots \frac{T}{2} \text{ rango}$$



Algunos de los coeficientes de la Serie de Fourier serán:

$n := 0..4$ cinco coeficientes

$$C_n := \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) \cdot e^{-j \cdot (n-2) \cdot 2\pi \cdot f_s \cdot t} dt$$

$$C^T = (0.159 + 0.001j \quad 0.225 + 8.413 \cdot 10^{-4}j \quad 0.25 \quad 0.225 - 8.413 \cdot 10^{-4}j \quad 0.159 - 0.001j)$$

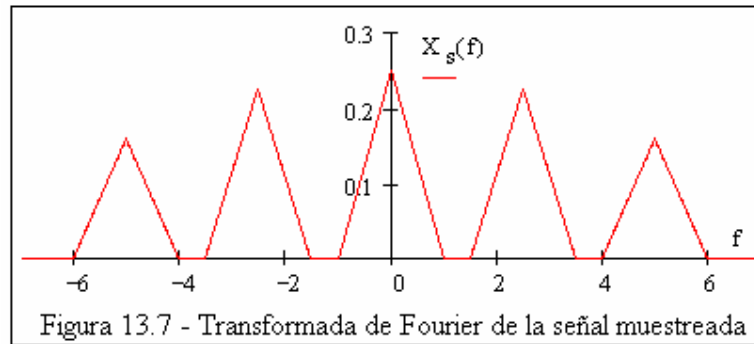
Para no trabajar con subíndices negativos en Mathcad, en el vector C resultante:

$$C_0 = C_{-2} \quad C_1 = C_{-1} \quad C_2 = C_0 \quad C_3 = C_1 \quad C_4 = C_2$$

De aquí:

$$f := -3 \cdot f_s, -3 \cdot f_s + 0.01 \dots 3 \cdot f_s \quad n := 0..4$$

$$X_s(f) := \sum_n |C_n| \cdot X[f - (n-2) \cdot f_s]$$



En la figura 13.4, la supuesta $x(t)$ es **banda-limitada**. En otras palabras, $X(f)$ se supone cero para $|f| \geq f_h$. Es claro, a partir de la misma figura, que si $X(f)$ ha de ser recuperable desde $X_s(f)$, y consecuentemente $x(t)$ desde $x_s(t)$, entonces:

$$f_s - f_h \geq f_h \quad \text{ó} \quad f_s \geq 2 \cdot f_h \text{ [Hz]}$$

De este modo, la mínima frecuencia de muestreo es $2f_h$ Hz. Donde f_h es la más alta frecuencia en $x(t)$.

De esta forma se ha formulado el **Teorema del Muestreo** para señales banda-limitadas paso-bajo.

14 - TEOREMA DEL MUESTREO

Una señal banda-limitada $x(t)$, que no tiene componentes de frecuencia por encima de f_h Hz, está **completamente** especificada por muestras que son tomadas a una tasa **uniforme** mayor que $2f_h$ Hz. En otras palabras, el tiempo entre muestras es menor $1/(2f_h)$ segundos.

La frecuencia $2f_h$ es conocida como la **tasa de Nyquist**.

15 - MUESTREO CON TREN DE IMPULSOS

La función muestreante utilizada en la sección precedente era general, la única restricción que tenía era la de ser supuesta periódica. En la práctica, el tiempo durante el cual $p(t)$ es no nula - esto es, el ancho del pulso - es pequeño comparado con el período T .

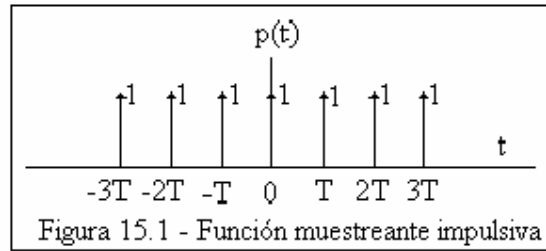
En sistemas digitales, donde la muestra está en la forma de un número cuya magnitud representa el valor de la señal $x(t)$ en los instantes de **muestreo**, el ancho del pulso de la función muestreante es infinitamente pequeño.

Debido a que un pulso extremadamente estrecho es una situación **modelada** por un impulso y también debido a simplificaciones matemáticas que resultarán, se supondrá que $p(t)$ está compuesta de un tren infinito de funciones impulsivas de período T .

Así, la expresión matemática de la función muestreante impulsiva responde a la siguiente fórmula:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T)$$

y gráficamente se representa en la Figura 15.1.



Los valores de C_n pueden ser computados a partir de (13.1): Esto produce

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t} dt \quad \text{lo cual es} \quad C_n = \frac{1}{T} = f_s$$

por la propiedad de desplazamiento de la función delta.

Así C_n es igual a f_s para todo n y la expresión para el espectro de la función muestreada $x_s(t)$, se convierte en:

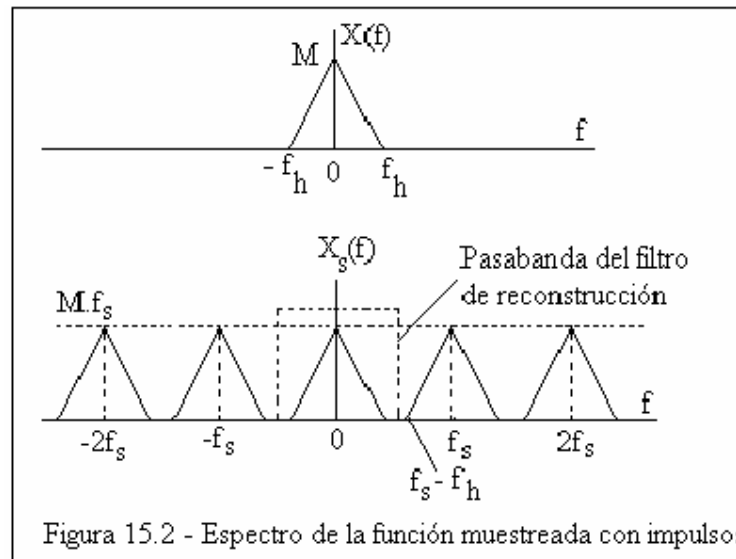
$$X_s(f) = f_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n \cdot f_s) \quad (15-1)$$

El efecto del muestreo con un tren de impulsos se ilustra en la figura 15.2.

Debe notarse que el efecto es el mismo que el discutido en la figura 13.4, excepto en que todo el espectro trasladado tiene la misma amplitud.

Otra vez, $X(f)$ puede obtenerse de $X_s(f)$, y consecuentemente $x(t)$ de $x_s(t)$, usando un filtro pasa-bajo para la reconstrucción de la forma de onda en tiempo continuo.

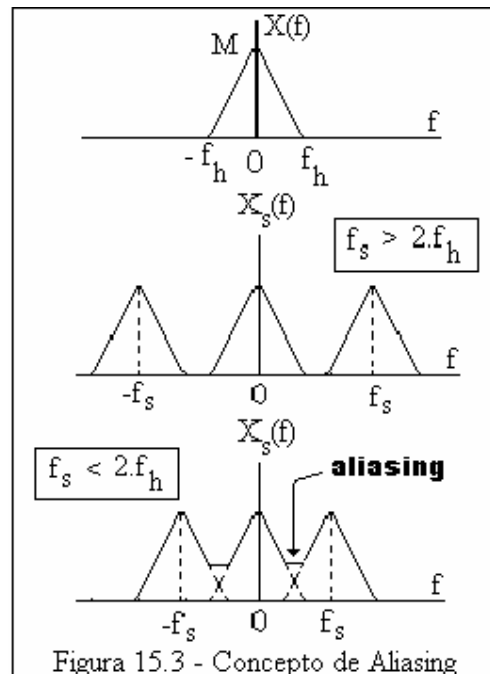
El efecto del muestreo a una tasa demasiado baja puede también ser visto desde la Figura 15.2.



Si una señal es muestreada por debajo de la tasa de Nyquist:

$$f_s - f_h \geq f_h$$

el espectro se sobrelapa haciendo imposible recuperar $x(t)$ por filtrado. Este efecto es conocido como **aliasing** y se ilustra en la Figura 15.3 para $X(f)$ supuesta real.



Numéricamente, en referencia al ejemplo de más arriba, se incrementa el periodo de muestreo y se disminuye la duración del pulso (tiende a un impulso)

$$T := 0.6 \quad \text{periodo de muestreo} \quad f_s := \frac{1}{T}$$

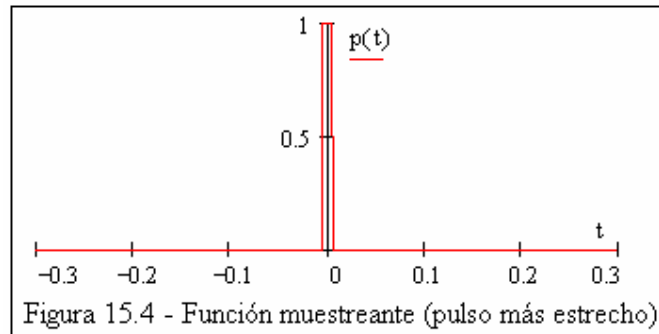
$$\tau := 0.005 \quad \text{duración del pulso}$$

La función muestreante, en el intervalo $(-T/2 \text{ y } T/2)$ será:

$$p(t) := \text{if}(|t| < \tau, 1, 0) \quad \text{Función muestreante}$$

$$t := -\frac{T}{2}, -\frac{T}{2} + 0.001 .. \frac{T}{2} \quad \text{rango}$$

Dicha función se aprecia gráficamente en la Figura 15.4.



Algunos de los coeficientes de la Serie de Fourier serán:

$$n := 0..4 \quad \text{cinco coeficientes}$$

$$C_n := \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) \cdot e^{-j \cdot (n-2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t} dt$$

$$C^T = (0.016 \quad 0.016 \quad 0.016 \quad 0.016 \quad 0.016)$$

Como se puede observar, los coeficientes son prácticamente iguales entre sí. En la expresión anterior se ven iguales debido a que en la Hoja de Mathcad que se calculó, la exactitud estaba fijada a 3 cifras decimales.

Dado que Mathcad no trabaja con subíndices negativos, en el vector C resultante:

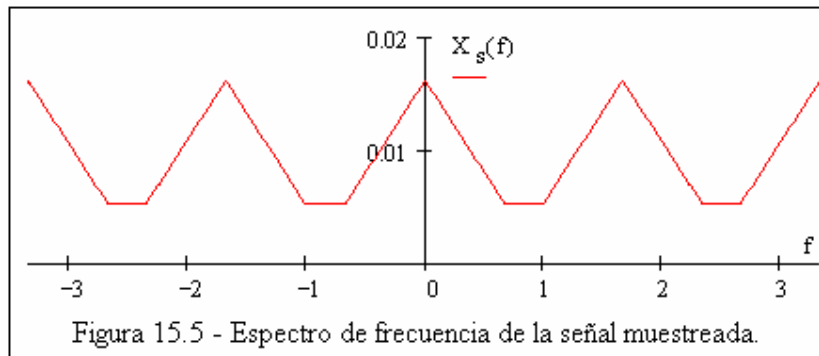
$$C_0 = C_{-2} \quad C_1 = C_{-1} \quad C_2 = C_0 \quad C_3 = C_1 \quad C_4 = C_2$$

De aquí:

$$f := -3 \cdot f_s, -3 \cdot f_s + 0.01 .. 3 \cdot f_s \quad n := 0..4$$

$$X_s(f) := \sum_n |C_n| \cdot X[f - (n - 2) \cdot f_s]$$

El espectro de frecuencia de la señal muestreada se observa en la Figura 15.5.



En una situación práctica es imposible muestrear una señal y reconstruir la señal original a partir de las muestras con error cero debido a que ninguna señal práctica es estrictamente banda-limitada.

Sin embargo, en todas las señales prácticas hay alguna frecuencia más allá de la cual la energía es despreciable. Esta frecuencia es usualmente tomada como el Ancho de Banda. Otra fuente de error proviene de la inexistencia de filtros de reconstrucción ideales. Esto significa que habrá algún espacio espectral debido a la pendiente finita del filtro de reconstrucción más allá de la frecuencia de corte.

Todas estas consideraciones resultan minimizadas cuando el muestreo no se hace a la tasa de Nyquist, sino a alguna frecuencia **significativamente** más alta.

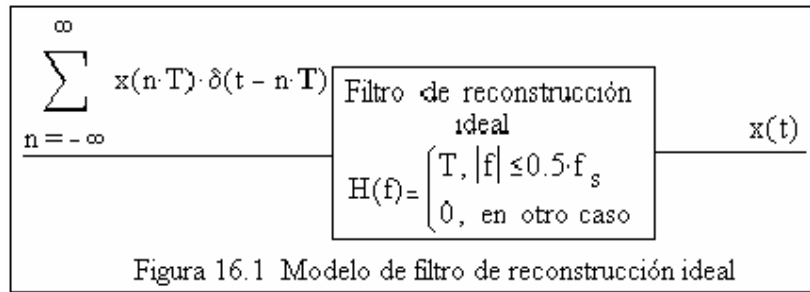
Las señales de banda-no-limitada que tienen espectro paso-bajo son frecuentemente muestreadas a aproximadamente 10 veces la frecuencia para la cual el espectro de amplitud está 3 dB por debajo de su valor máximo.

Deberá ponerse énfasis en que la señal impulsiva muestreante fue elegida con el objeto de tener un modelo de muestreo simple, el cual produce resultados también simples. Seguramente no se encontrarán generadores de señales de función impulsiva verdaderas como elemento de hardware.

16 - RECONSTRUCCION DE DATOS

Se vio en la sección precedente que $x(t)$ podía ser reconstruida a partir de $x_s(t)$ a través de un filtro paso-bajo ideal que tenga un ancho de banda mayor que f_h , pero menor que $f_s - f_h$.

También, la respuesta de amplitud debe ser T si la constante de escalamiento introducida por el muestreador se quiere simplificar. Esto se ilustra en la figura 16.1.



Suponiendo que el ancho de banda del filtro es $f_s / 2$, la respuesta al impulso en $t=0$, $x(0) \cdot \delta(t)$, será la respuesta al impulso unidad del filtro ponderado por $x(0)$. La respuesta al impulso unidad del filtro paso-bajo ideal con ganancia T es:

$$h(t) = T \cdot \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = \frac{T}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot f_s \cdot t} - e^{-j \cdot \pi \cdot f_s \cdot t} \right)$$

que puede ser reescrita:

$$h(t) = T \cdot f_s \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f_s \cdot t)}{(\pi \cdot f_s \cdot t)} = \text{sinc}(\pi \cdot f_s \cdot t) \quad (16-1)$$

de modo que la respuesta a $x(0) \cdot \delta(t)$ es:

$$x(0) \cdot h(t) = x(0) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_s \cdot t)$$

La respuesta a la n -ésima muestra puede ser obtenida de (16-1) desplazando la respuesta a $t = nT$ y ponderando la respuesta por el valor $x(nT)$.

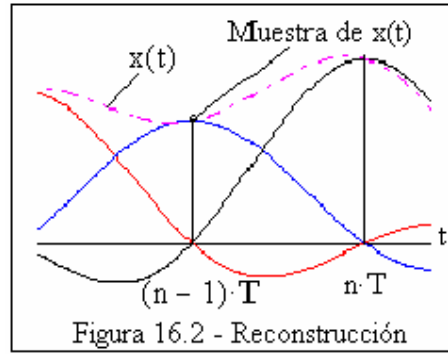
Por lo tanto, la respuesta a $x(nT) \cdot \delta(t - nT)$ es:

$$x(n \cdot T) \cdot h(t) = x(n \cdot T) \cdot \text{sinc}[\pi \cdot f_s \cdot (t - n \cdot T)]$$

La salida del filtro de reconstrucción paso-bajo es la sumatoria de todas las contribuciones debidas a las muestras aplicadas a la entrada del mismo. Por lo tanto:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n \cdot T) \cdot \text{sinc}[\pi \cdot f_s \cdot (t - n \cdot T)]] \quad (16-2)$$

La expresión precedente muestra que la señal de datos original puede ser reconstruida ponderando cada muestra por una función **sinc** y haciendo la sumatoria. Esta operación se ilustra en la Figura 16.2.



Ejemplo 1:

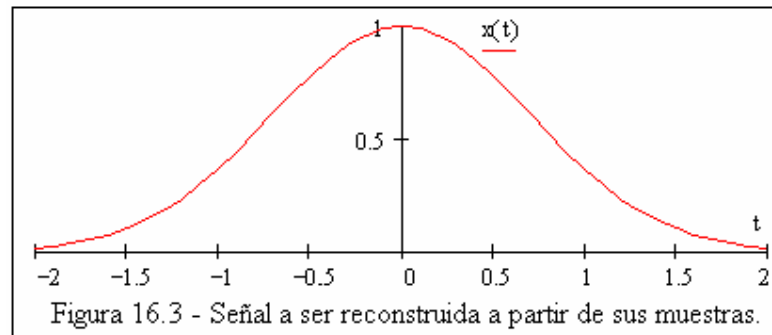
$x(t) := \exp(-t^2)$ función a ser reconstruida a partir de sus muestras

$T := 0.1$ Intervalo de muestreo

$f_s := \frac{1}{T}$ frecuencia de muestreo $f_s = 10$

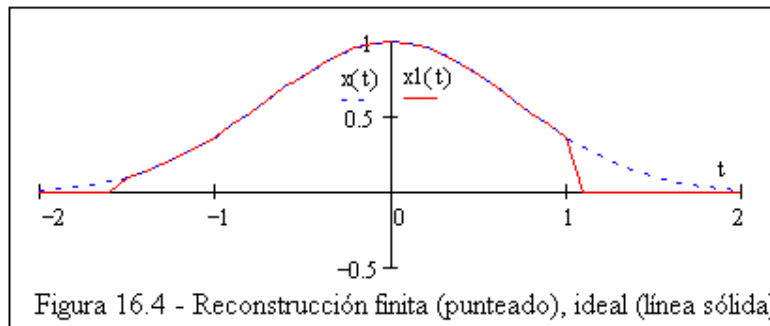
$t := -2, -2 + T .. 2$ rango de tiempo (aquí se evidencia el número de muestras)

En la Figura (16-3) se observa la señal definida $x(t)$.



La siguiente es la expresión para la reconstrucción a partir de las muestras a través de un filtro ideal Paso-bajo.

$$x_1(t) := \sum_{n=-15}^{15} \left[x(n \cdot T) \cdot \frac{\sin[\pi \cdot f_s \cdot (t - n \cdot T)]}{\pi \cdot f_s \cdot (t - n \cdot T)} \right]$$



En un análisis parcial:

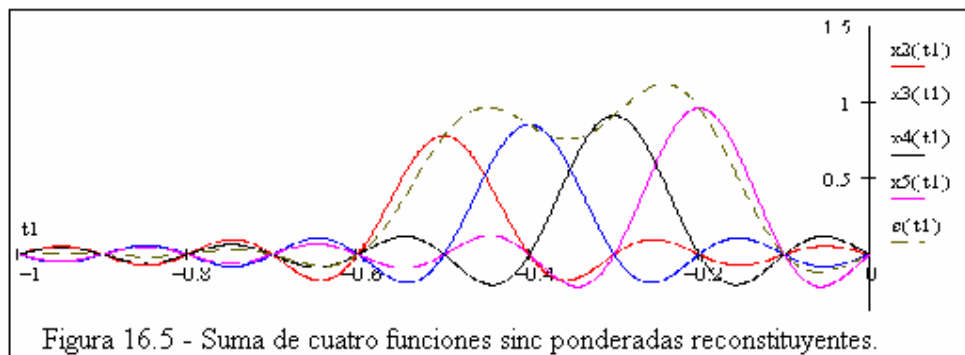
$$xx(n,t) := x(n \cdot T) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi \cdot (t - n \cdot T)}{T}\right]}{\pi \cdot (t - n \cdot T)} \quad \text{Término genérico de la sumatoria}$$

$t1 := -1, -0.999..0$ nuevo rango para una observación más precisa

$x2(t1) := xx(-5, t1)$ $x3(t1) := xx(-4, t1)$ $x4(t1) := xx(-3, t1)$

$x5(t1) := xx(-2, t1)$

$s(t1) := x2(t1) + x3(t1) + x4(t1) + x5(t1)$ suma de los cuatro términos.



Ejemplo 2:

Considérese la señal:

$$x(t) := 6 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (5) \cdot t)$$

muestreada a 7 y 14 Hz.

Ya que la frecuencia más alta (la única frecuencia en este caso) es 5 Hz, se verá el efecto de muestrear una señal a una frecuencia menor como a una frecuencia mayor que el doble de la más alta frecuencia en $x(t)$.

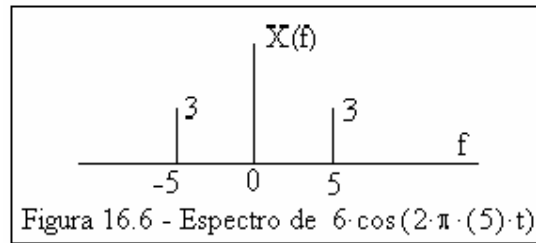
Ya que:

$$X(f) = 3 \cdot \delta(f - 5) + 3 \cdot \delta(f + 5) \quad \text{transformada de Fourier de } x(t)$$

se sigue de (15.1) que el espectro de la $x(t)$ muestreada está dado por:

$$X_s(f) = 3 \cdot f_s \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - 5 - n \cdot f_s) + \delta(f + 5 - n \cdot f_s) \right]$$

El espectro de $x(t)$ se muestra en la Figura 16.6.

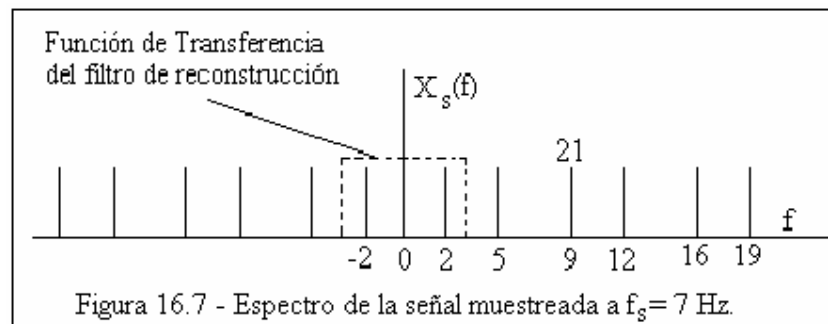


El espectro de la señal muestreada para una frecuencia de 7 Hz se ve a continuación:

$$X_s(f) = 3 \cdot 7 \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - 5 - n \cdot 7) + \delta(f + 5 - n \cdot 7) \right]$$

Para	$n := 0$	$-5 + n \cdot 7 = -5$	$5 + n \cdot 7 = 5$
	$n := 1$	$-5 + n \cdot 7 = 2$	$5 + n \cdot 7 = 12$
	$n := 2$	$-5 + n \cdot 7 = 9$	$5 + n \cdot 7 = 19$

Lo que arroja el espectro graficado en la Figura 16.7.

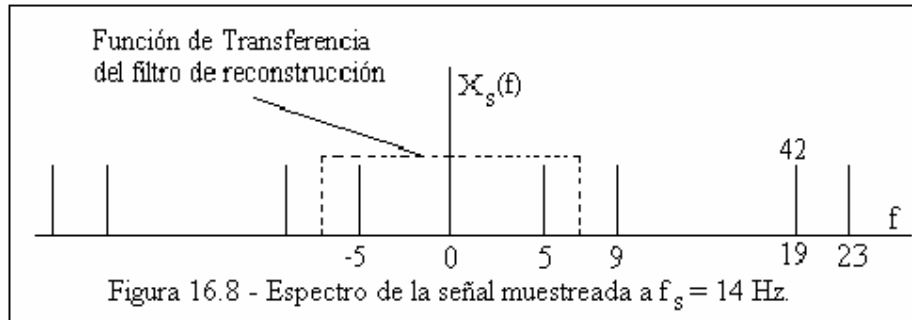


En cambio, el espectro de la señal muestreada para una frecuencia de 14 Hz se estima a continuación:

Para	$n := 0$	$-5 + n \cdot 14 = -5$	$5 + n \cdot 14 = 5$
	$n := 1$	$-5 + n \cdot 14 = 9$	$5 + n \cdot 14 = 19$
	$n := 2$	$-5 + n \cdot 14 = 23$	$5 + n \cdot 14 = 33$

$n := -1$	$-5 + n \cdot 14 = -19$	$5 + n \cdot 14 = -9$
$n := -2$	$-5 + n \cdot 14 = -33$	$5 + n \cdot 14 = -23$
$n := -3$	$-5 + n \cdot 14 = -47$	$5 + n \cdot 14 = -37$

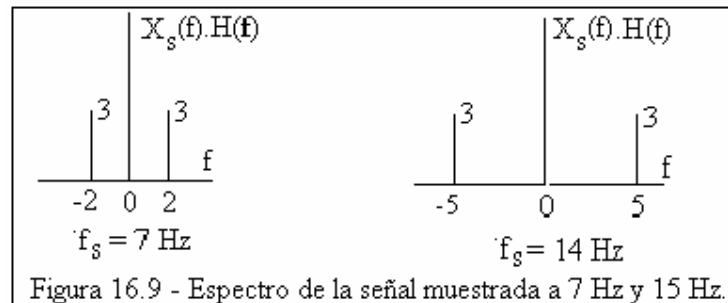
Lo que se puede apreciar en la Figura 16.8.



Ambos espectros se extienden desde - infinito a + infinito.

El filtro de reconstrucción es un filtro ideal, $H(f)$, paso-bajo e ideal con ancho de banda de $0.5 f_s$ y una amplitud de respuesta T .

Así, la salida del filtro pasabajos tiene los siguientes espectros para 7 y 14 Hz, como se puede apreciar en la figura 16.9.



La parte izquierda de la Figura 16.9, correspondiente a $f_s = 7$ Hz, ilustra el efecto del **aliasing** producido por el uso de una frecuencia de muestreo menor que el doble de la más alta frecuencia en $x(t)$ [5 Hz].

El resultado es una señal que tiene la amplitud apropiada pero la frecuencia incorrecta [2 Hz en lugar de 5 Hz].

Queda como regla, para este caso, que la frecuencia de la componente a la salida del filtro de reconstrucción es siempre la frecuencia de muestreo [7 Hz, en este caso] menos la frecuencia de la señal de entrada [5 Hz].

Es decir, para el ejemplo:

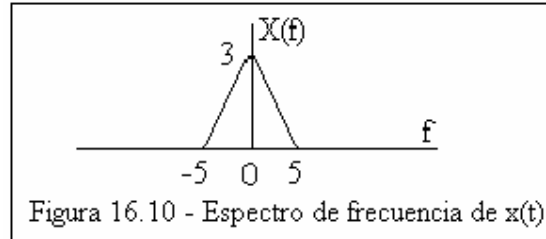
$$7 \text{ Hz} - 5 \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}.$$

En cambio, en la parte derecha de la Figura 16.9, correspondiente a $f_s = 14$ Hz, se ilustra el efecto de un muestreo adecuado a una frecuencia más grande que el doble de la frecuencia de $x(t)$.

La salida del filtro de reconstrucción es idéntica a la señal original.

Ejemplo 3:

En este ejemplo se considerará la señal no periódica $x(t)$ de modo que $X(f)$ tenga un espectro continuo. Se supondrá también que $X(f)$ sea real. El espectro de $x(t)$ se aprecia en la Figura 16.10.



La frecuencia más alta es de 5 Hz, de modo que la mínima frecuencia de muestreo aceptable es de 10 Hz. Otra vez se supondrán frecuencias de muestreo de 7 y 14 Hz. La ecuación:

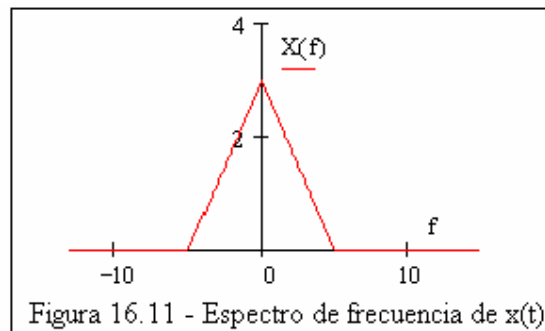
$$X_s(f) = f_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_s)$$

indica que el espectro de la señal muestreada se obtiene multiplicando a $X(f)$ por f_s y luego reproduciendo $f_s \cdot X(f)$ en torno a la componente continua (dc) y todas las armónicas de la frecuencia de muestreo. Esto se aprecia en las figuras posteriores para frecuencias de muestreo de 7 Hz y 14 Hz.

$$X(f) := \begin{cases} 3 - \frac{3}{5}|f| & \text{espectro de frecuencia de } x(t) \\ 0 & \text{if } |f| > 5 \end{cases}$$

$f := -25, -24.9 \dots 25$ rango

En la figura 16.11 se representa gráficamente el espectro de frecuencia de $x(t)$.

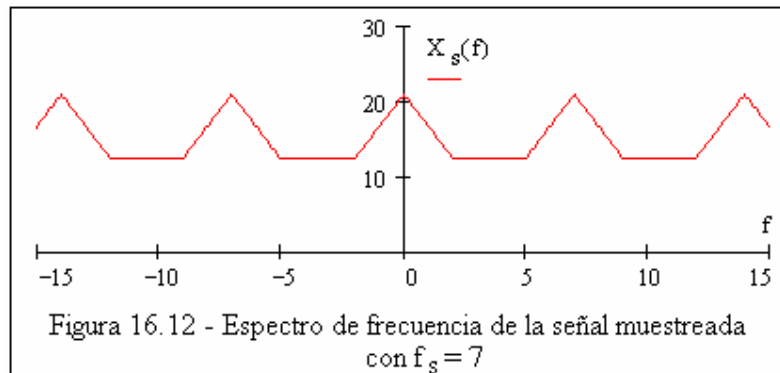


- **1er. Caso:**

$f_s := 7$ frecuencia de muestreo

$$X_s(f) := f_s \cdot \sum_{n=-2}^2 X(f - n \cdot f_s) \quad \text{función muestreada}$$

En la figura 16.12 se representa gráficamente el espectro de frecuencia de $x(t)$ cuando se ha muestreado a $f_s=7$.

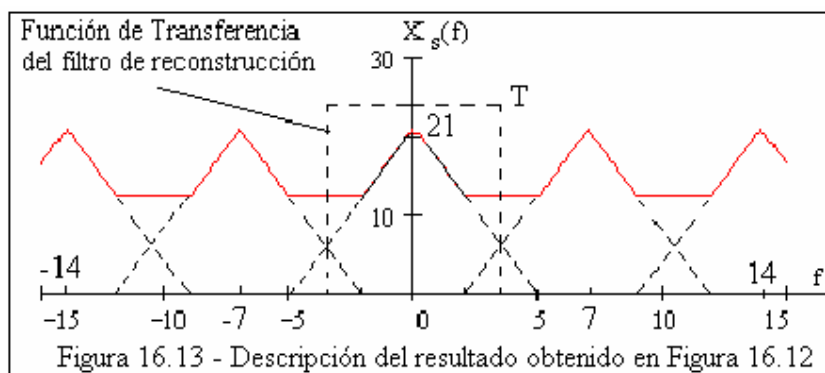


En la figura 16.13 se hace un análisis más descriptivo de este proceso.

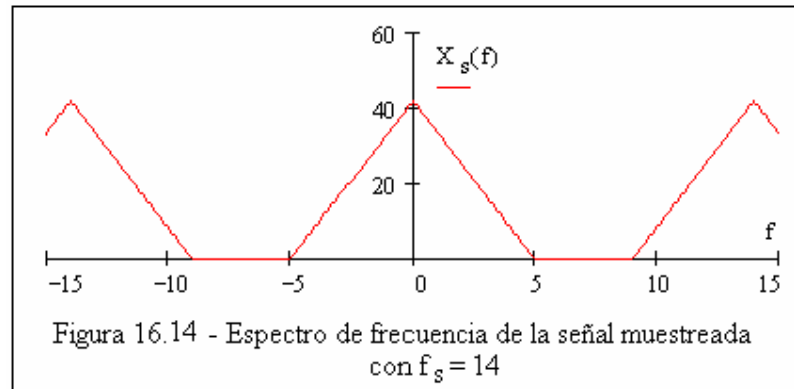
• **2do. Caso**

$f_s := 14$ frecuencia de muestreo

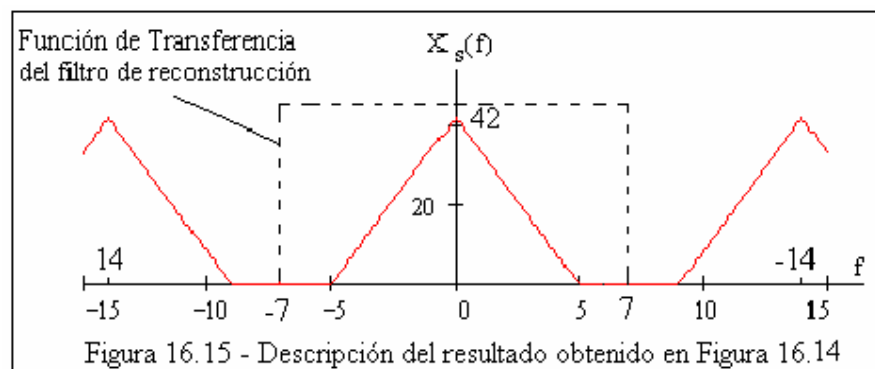
$$X_s(f) := f_s \cdot \sum_{n=-2}^2 X(f - n \cdot f_s) \quad \text{función muestreada}$$



En la figura 16.14 se representa gráficamente el espectro de frecuencia de $x(t)$ cuando se ha muestreado a $f_s=14$



En la figura 16.15 se hace un análisis más descriptivo de este proceso.

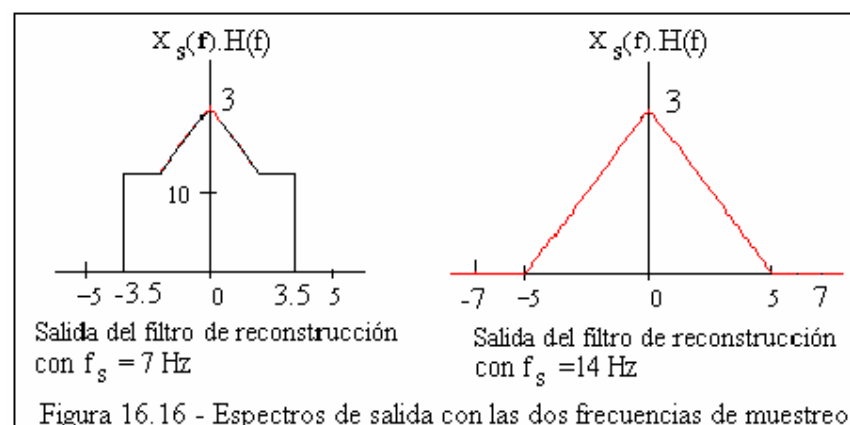


Para la frecuencia de muestreo de 7 Hz, ocurre el solapamiento del espectro trasladado (aliasing).

Para la frecuencia de muestreo de 14 Hz, no hay solapamiento con el espectro trasladado ya que la frecuencia de muestreo excede el valor mínimo de 10 Hz.

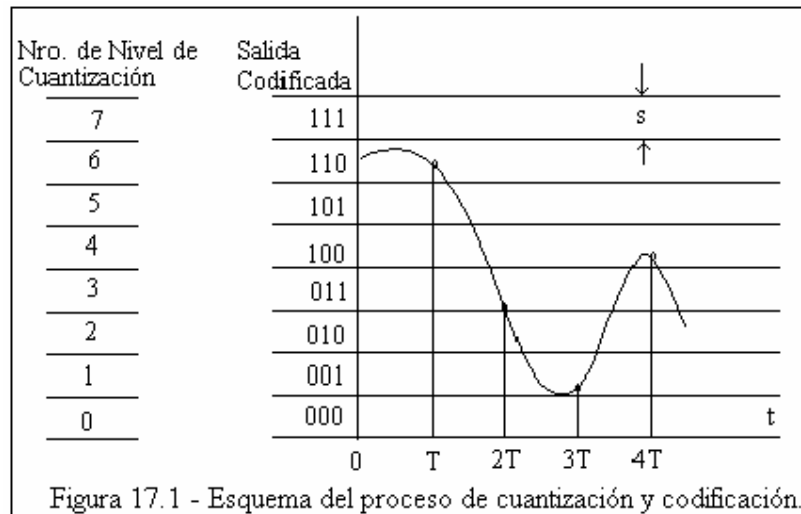
Como en los ejemplos previos, el filtro de reconstrucción se supone que es un paso-bajo ideal con respuesta de amplitud T y ancho de banda de $1/(2f_s)$.

El espectro de salida del filtro de reconstrucción se muestra en las siguientes figuras para las frecuencias de muestreo de 7 y 14 Hz. El impacto del aliasing es claro comparando la figura de la izquierda con la de la derecha.



17 - CUANTIZACION Y CODIFICACION

El proceso de cuantización y codificación se ilustra en la Figura 17.1.



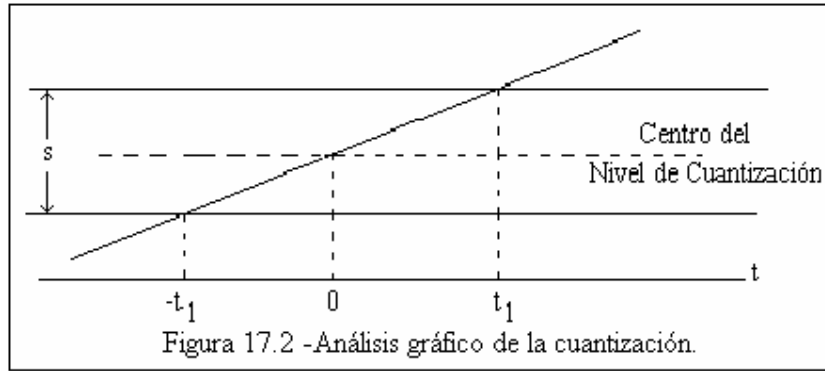
Para cuantizar un valor de muestra, se redondea dicho valor para de ese modo aproximar a un conjunto finito de valores permisibles. La codificación es llevada a cabo representando cada uno de los valores muestra permisible mediante una palabra digital. El número de niveles de cuantización q y la longitud de palabra digital n están relacionados por:

$$q=2^n$$

Dado que el nivel de cuantización es el único valor retenido después que los valores muestra son cuantizados, se inducen errores en esta instancia que no pueden ser corregidos por procesamiento adicional. Una medida cuantitativa de este error se derivará a continuación.

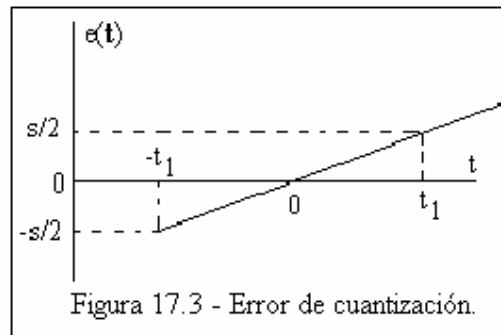
Ya que normalmente se "codificaría" un nivel cuantizado como el centro de ese nivel, el error máximo inducido por la cuantización de una muestra es " $+s/2$ ó $-s/2$ ", donde s es el ancho del nivel de cuantización.

Suponiendo que hay un gran número de niveles de cuantización, ello se traduce en pequeño valor de s . Entonces, para **muchos** niveles de cuantización, la señal $x(t)$ debe ser lo más cercanamente lineal con respecto al nivel de cuantización, como se muestra en la Figura 17.2



Para el sistema, el interés está en las muestras que son cuantizadas y no en la señal de tiempo continuo $x(t)$. Sin embargo, ya que el muestreo y la reconstrucción pueden ser llevados a cabo sin error para señales banda-limitadas, el cuantizador es la única fuente de error en este modelo de convertidor A/D.

De modo que se puede evaluar el error simplemente determinando el error resultante de la cuantización de una señal de tiempo continuo. Este error se muestra en la Figura 17.3, en la cual $2t_1$ es el tiempo en que la señal de tiempo continuo $x(t)$ permanece dentro del nivel de cuantización.



El error medio cuadrado, E , está dado por:

$$E = \frac{1}{2 \cdot t_1} \cdot \int_{-t_1}^{t_1} e(\alpha)^2 d\alpha = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} e(\alpha)^2 d\alpha$$

Ya que el error está dado por:

$$e(t) = \frac{s}{2 \cdot t_1} \cdot t \quad \text{ecuación de la recta}$$

se tiene:

$$E = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} \left(\frac{s}{2 \cdot t_1} \cdot \alpha \right)^2 d\alpha = \frac{s^2}{12}$$

la cual no es una función de t_I . Ya que E es el valor medio cuadrático de una señal, tiene dimensiones de watts y por lo tanto se interpreta como una **potencia de ruido**.

La cantidad de interés a la salida del convertidor A/D es usualmente la **Relación señal-a-ruido**, la cual se define como la razón de la potencia de señal a la potencia de ruido. Con el objeto de computar esta cantidad, se define el **rango dinámico D** como el rango de variación de la señal de entrada $x(t)$ al convertidor A/D. Esto es:

$$D = \max(x(t)) - \min(x(t)) \quad \text{rango dinámico}$$

Ya que hay $q = 2^n$ niveles de cuantización, el ancho de cada nivel de cuantización es:

$$s = \frac{D}{2^n} = D \cdot 2^{-n}$$

lo que produce:

$$E = \frac{D^2}{12} \cdot 2^{-2 \cdot n} \quad (17-1)$$

Dividiendo esta cantidad por la potencia de señal lleva a la **relación señal-a-ruido**.

Para calcular la potencia de señal, la suposición usualmente hecha es que la potencia de señal a la salida del convertidor A/D es igual a la señal a la entrada del convertidor A/D (no atenúa).

Hay que destacar que (17-1) no siempre es una buena aproximación aún cuando el número de niveles de cuantización sea grande. Si una señal está en sus valores máximos o mínimos por intervalos de tiempo significativos, la expresión (17-1) no es válida ya que ésta ignora la contribución del error en los valores máximo y mínimos. Una onda cuadrada es un buen ejemplo de tal señal.

Ejemplo

Supóngase que la señal senoidal:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

es muestreada y cuantizada. La potencia de la señal es:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} (A \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

donde T_p es el periodo de la forma de onda ($T_p = 2 \cdot \pi$). El rango dinámico D es $2 \cdot A$ para una señal senoidal. Así la potencia de ruido se expresa:

$$E = 4 \cdot \frac{A^2}{12} \cdot 2^{-2 \cdot n} = \frac{A^2}{3} \cdot 2^{-2 \cdot n}$$

La relación señal-a-ruido es:

$$\text{SNR} = \frac{\frac{A^2}{2}}{E} = \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{A^2}{3} \cdot 2^{-2 \cdot n}} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2 \cdot n}$$

Ya que un pequeño cambio en la longitud de palabra, n , causa un gran cambio en la relación señal-a-ruido, es conveniente expresar **SNR** en decibeles (dB).

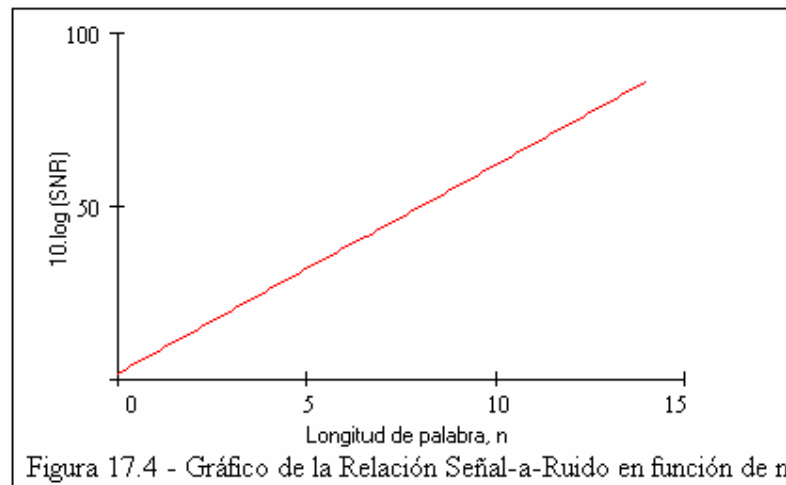
$$10 \cdot \log(\text{SNR}) = 10 \cdot \log\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{2 \cdot n}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right) + 20 \cdot n \cdot \log(2) = 1.76 + 6.02 \cdot n$$

Así la relación señal-a-ruido a la salida del conversor A/D se incrementa en aproximadamente 6 db por cada bit agregado a la longitud de palabra. Esta última ecuación es ilustrada en la Figura 17.4.

La importancia de usar una longitud de palabra tan grande como sea posible es obvio.

El efecto de **no usar** el rango pleno del cuantizador se traduce en una disminución efectiva en q y así en la longitud de palabra, n . Por lo tanto, es también importante que el valor pico-a-pico de la señal que está siendo procesada ocupe el rango pleno ($q.s$) del cuantizador.

La última ecuación fue deducida suponiendo una señal sinusoidal. Cabe esperar resultados similares cuando se aplica a cualquier señal de prueba, ya que en general, la relación señal-a-ruido crece 6.02 dB por incremento en la longitud de palabra. El corte, 1.76 en este caso, cambiará a medida que la forma de onda de la señal de prueba cambie.



Numéricamente:

$$x(t) := \exp\left(-\frac{t}{10}\right) \quad \text{señal}$$

$$n := 3 \quad \text{longitud de palabra}$$

$$q := 2^n \quad q = 8 \quad \text{número de niveles}$$

$$i := 0..10 \quad \text{índice para muestras en un intervalo}$$

$$X_i := x(i) \quad \text{vector con valores "verdaderos" de cada muestra}$$

$$D := \max(X) - \min(X) \quad D = 0.632 \quad \text{rango dinámico}$$

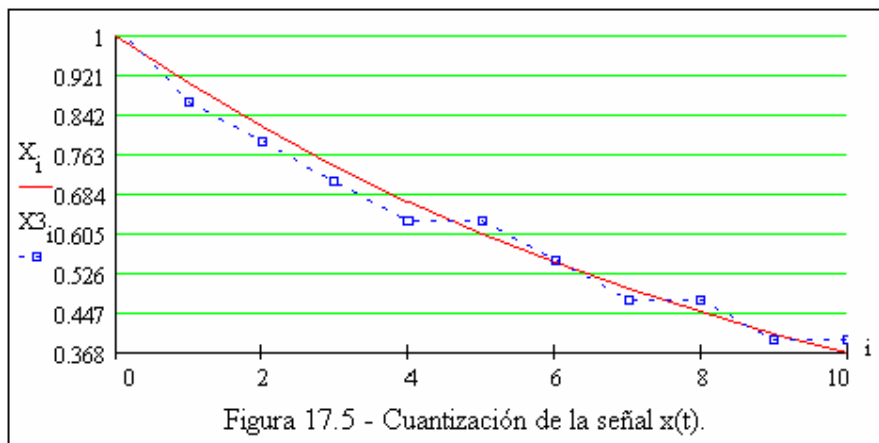
$$s := \frac{D}{q} \quad s = 0.079 \quad \text{separación entre niveles de cuantización}$$

$$X1_i := X_i \cdot \frac{q}{D} \quad \text{vector ajustado para cuantización}$$

$$X2_i := \text{floor}(X1_i + 0.5) \quad \text{vector cuantizado ajustado}$$

$$X3_i := X2_i \cdot \frac{D}{q} \quad \text{vector cuantizado}$$

Resumiendo gráficamente estos conceptos, se representan en la Figura 17.5 la señal (vector X) y los correspondientes valores cuantizados (vector X3).



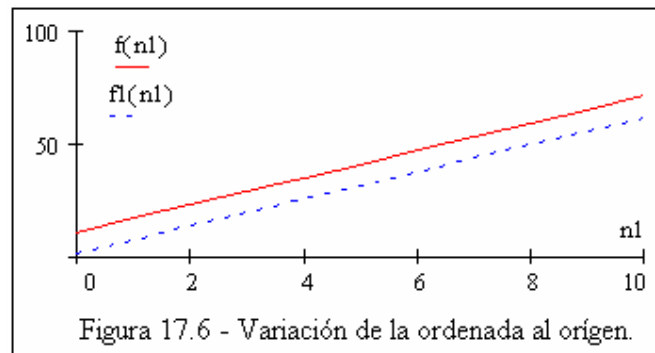
$$ms := \frac{1}{10} \int_0^{10} x(t)^2 dt \quad ms = 0.432 \quad \text{cuadrado medio de la función}$$

$$E(n1) := \frac{D^2}{12} \cdot 2^{-2 \cdot n1} \quad E(n) = 5.203 \cdot 10^{-4} \quad \text{error medio cuadrático}$$

$$SNR(n1) := \frac{ms}{E(n1)} \quad SNR(n) = 830.958 \quad \text{relación señal-a-ruido}$$

$$f(n1) := 10 \cdot \log(SNR(n1)) \quad \text{relación señal-a-ruido (en dB)}$$

$n1 := 0..10$ $f1(n1) := 1.76 + 6.02 \cdot n1$ relación señal-a-ruido (sinusoide)



En la figura 17.6 se aprecia la variación de la ordenada al origen de la recta para dos tipos distintos de forma de onda.