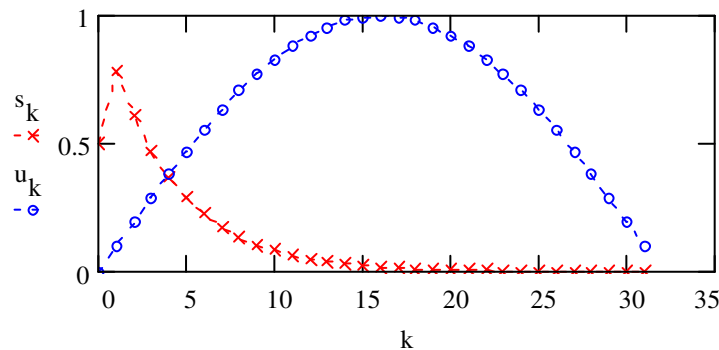


Relación entre la convolución discreta y continua

Convolución discreta:

Se desea convolucionar dos señales de tiempo continuo a las que se las muestrea con un cierto periodo.

$N := 32$	número de muestras
$k := 0..N - 1$	índice
$T := 0.25$	Periodo de muestreo
$s_k := e^{-(k \cdot T)}$	primera señal muestreada (exponencial decreciente)
$s_0 := 0.5$	valor medio en la discontinuidad
$u_k := \sin\left(k \cdot T \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{16}\right)$	segunda señal muestreada (un ciclo de senoide)

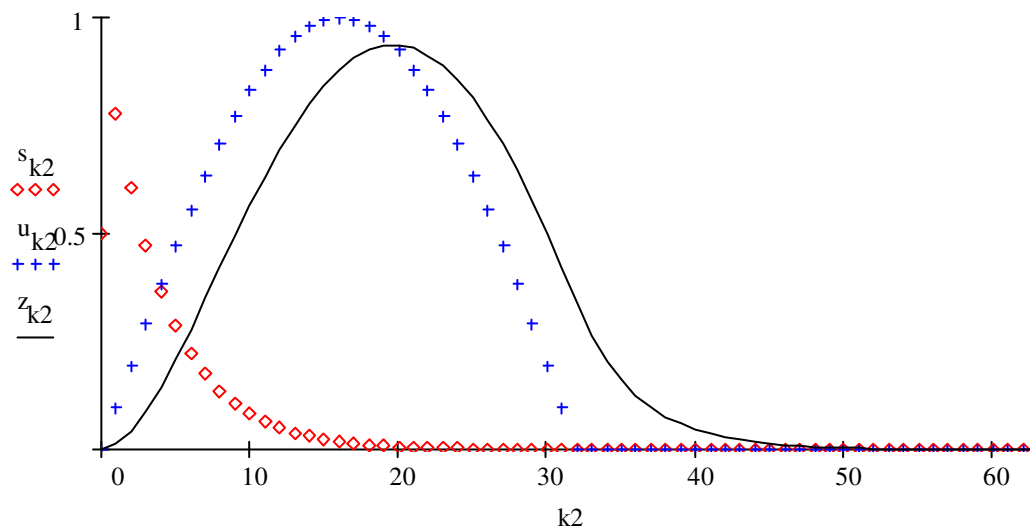


Dado que la convolución de dos señales necesita el doble de longitud de cada una de las señales (cuando tienen la misma longitud) se rellenan con ceros hasta completarla.

$k1 := N..2 \cdot N - 1$	$s_{k1} := 0$	$u_{k1} := 0$	Se completan con ceros
$k2 := 0..2 \cdot N - 1$	índice para contener la convolución		

$$z_{k2} := T \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot N - 1} s_i \cdot u_{\text{mod}((k2 - i) + 2 \cdot N, 2 \cdot N)} \quad \text{Convolución discreta}$$

Graficando conjuntamente:



Convolucion continua

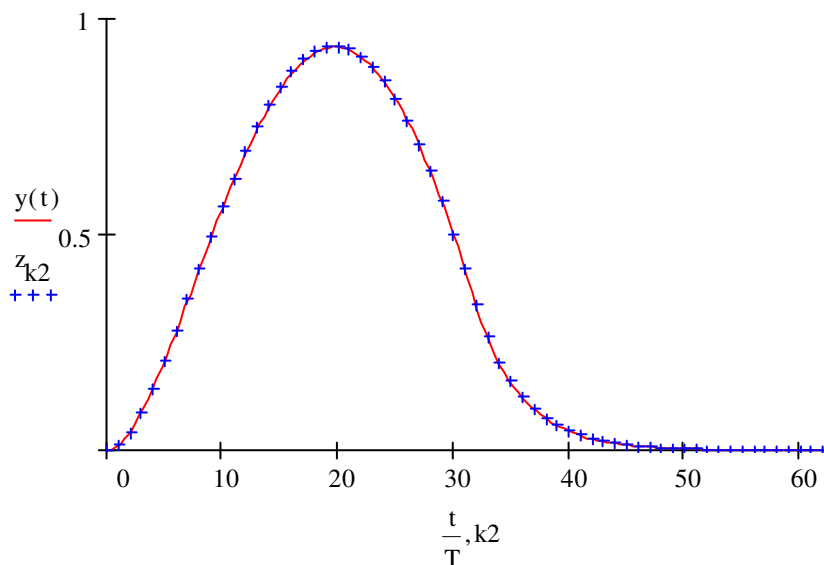
Si se analiza el mismo problema desde el punto de vista continuo (que servirá de referencia), Reemplazando kT por t :

$$x(t) := \text{if} \left[0 \leq t \leq (N-1) \cdot T, e^{-t}, 0 \right] \quad \text{Primera función (exponencial decreciente)}$$

$$h(t) := \text{if} \left[0 \leq t \leq (N-1) \cdot T, \sin \left(t \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{16} \right), 0 \right] \quad \text{Segunda función (tramo de senoide)}$$

$$t := 0, 0.1 \dots (2 \cdot N - 1) \cdot T \quad \text{rango}$$

$$y(t) := \int_0^{N \cdot T} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad \text{Convolución continua}$$



De la comparación se ve que la propuesta discreta es correcta.

Convolucion con Transformada de Fourier

Según la teoría, se puede hallar la convolución de dos funciones (discretizadas) mediante la transformada de Fourier. Para ello se halla la FT de ambas funciones y se multiplican elemento a elemento los vectores obtenidos, la FT inversa del vector resultante es la convolución de las dos funciones.

Para aplicar la FFT es necesario que ambos vectores tengan la misma longitud y conveniente que la longitud sea diádica (es decir, potencia de 2). Una forma fácil de conocer esta longitud es utilizar la siguiente expresión:

$$N1 := \text{if} \left(\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right) = \frac{\log(N)}{\log(2)}, 2^{\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right) + 1}, 2^{\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right)} \right)$$

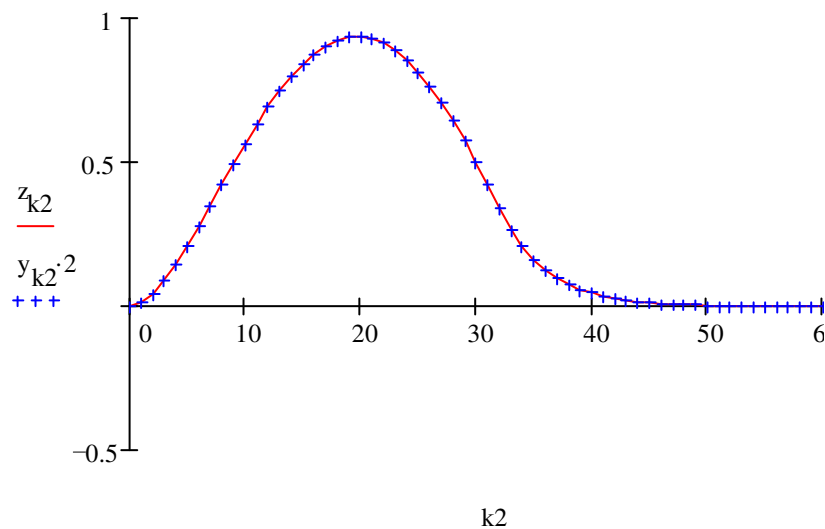
$$N1 = 64$$

y rellenar con ceros hasta lograrla en cada uno de los vectores. Esto ya ha sido hecho para lograr la convolución discreta.

$X := \text{fft}(s)$ $H := \text{fft}(u)$ FT de los vectores s y u
 $\longrightarrow$
 $Y := X \cdot H$ Producto de elementos análogos
 $y := \text{ifft}(Y)$ Antitransformada (resultado, convolución)

Verificando gráficamente:

$i := 0..2 \cdot N - 1$



Ejercicio N° 1 - Hallar la convolución entre las siguientes funciones:

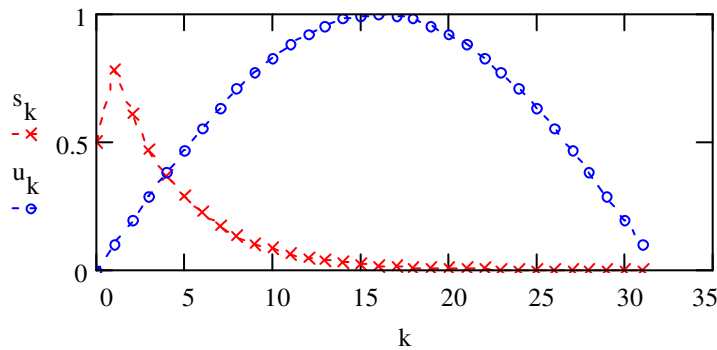
a) $f_1(x) = \sin(x)$ y $f_2(x) = -x + 1$ ambas con valores diádicos iguales comprendidos entre 0 y $\pi/4$. Hacer el correspondiente muestreo y comparar las soluciones para el caso continuo y con la utilización de la FFT.

b) $f_1(x) = x - 1$ y $f_2(x) = n$ ambas con valores diádicos iguales comprendidos entre 0 y 1. Hacer el correspondiente muestreo y comparar las soluciones para el caso continuo y con la utilización de la FFT.

Correlación discreta:

Se desea correlacionar dos señales de tiempo continuo a las que se las muestrea con un cierto periodo.

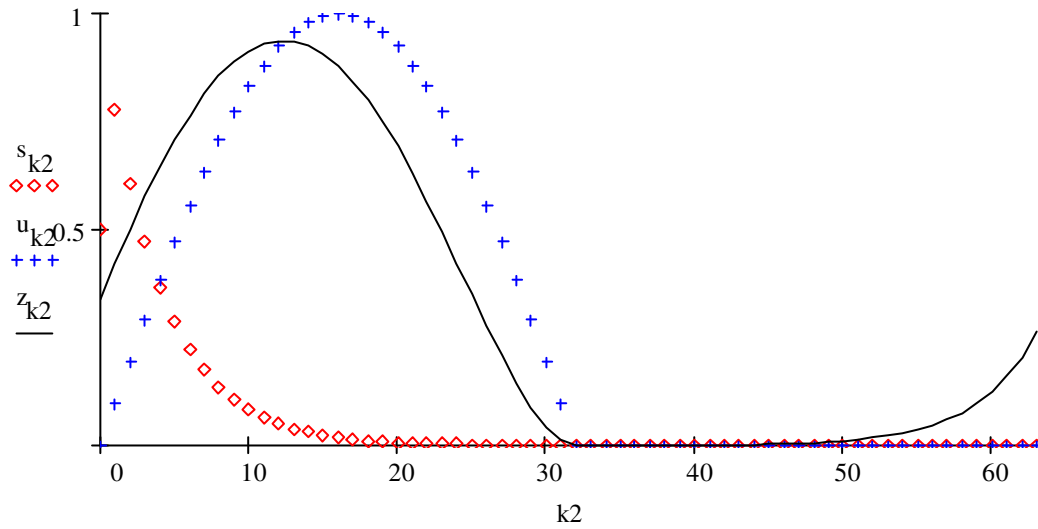
$N := 32$	número de muestras
$k := 0..N - 1$	índice
$T := 0.25$	Periodo de muestreo
$s_k := e^{-(k \cdot T)}$	primera señal muestreada (exponencial decreciente)
$s_0 := 0.5$	valor medio en la discontinuidad
$u_k := \sin\left(k \cdot T \cdot \frac{\pi}{16}\right)$	segunda señal muestreada (un ciclo de senoide)



Dado que la correlación de dos señales necesita el doble de longitud de cada una de las señales (cuando tienen la misma longitud) se rellenan con ceros hasta completarla.

$k1 := N..2 \cdot N - 1$	$s_{k1} := 0$	$u_{k1} := 0$	Se completan con ceros
$k2 := 0..2 \cdot N - 1$	índice para contener la convolución		
$2 \cdot N - 1$			
$z_{k2} := T \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot N - 1} s_i \cdot u_{\text{mod}((k2+i) + 2 \cdot N, 2 \cdot N)}$	Correlación discreta		

Graficando conjuntamente:



Correlación continua

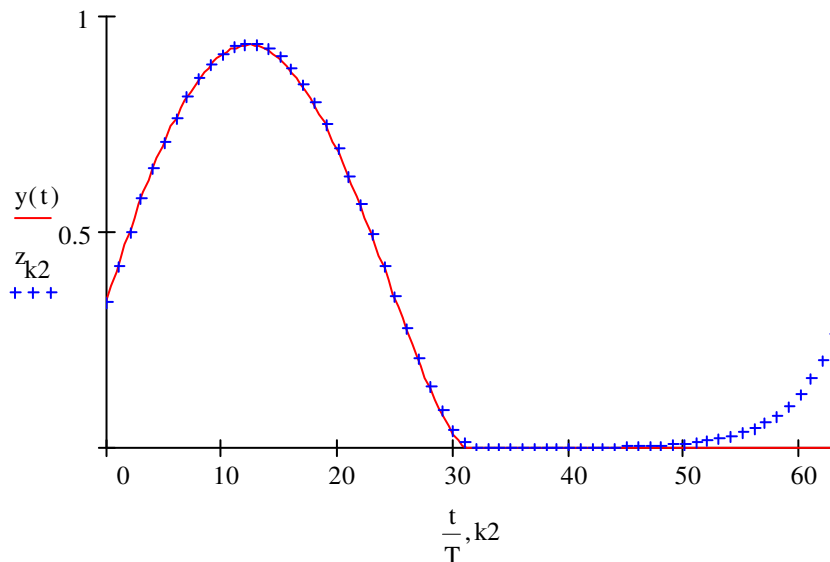
Si se analiza el mismo problema desde el punto de vista continuo (que servirá de referencia): Reemplazando kT por t :

$$x(t) := \begin{cases} 0 \leq t \leq (N-1) \cdot T, e^{-t}, 0 \end{cases} \quad \text{Primera función (exponencial decreciente)}$$

$$h(t) := \begin{cases} 0 \leq t \leq (N-1) \cdot T, \sin\left(t \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{16}\right), 0 \end{cases} \quad \text{Segunda función (tramo de senoide)}$$

$$t := 0, 0.1 \dots (2 \cdot N - 1) \cdot T \quad \text{rango}$$

$$y(t) := \int_0^{N \cdot T} x(\tau) \cdot h(t + \tau) d\tau \quad \text{Correlación continua}$$



De la comparación se ve que la propuesta discreta es correcta.

Correlación con Transformada de Fourier

Según la teoría, se puede hallar la correlación de dos funciones (discretizadas) mediante la transformada de Fourier. Para ello se halla la FT de ambas funciones y se multiplican elemento a elemento los vectores obtenidos (uno de ellos conjugado), la FT inversa del vector resultante es la correlación de las dos funciones.

Para aplicar la FFT es necesario que ambos vectores tengan la misma longitud y conveniente que la longitud sea diádica (es decir, potencia de 2). Una forma fácil de conocer esta longitud es utilizar la siguiente expresión:

$$N1 := \text{if} \left(\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right) = \frac{\log(N)}{\log(2)}, 2^{\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right) + 1}, 2^{\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right)} \right)$$

$$N1 = 64$$

y rellenar con ceros hasta lograrla en cada uno de los vectores. Esto ya ha sido hecho para lograr la convolución discreta.

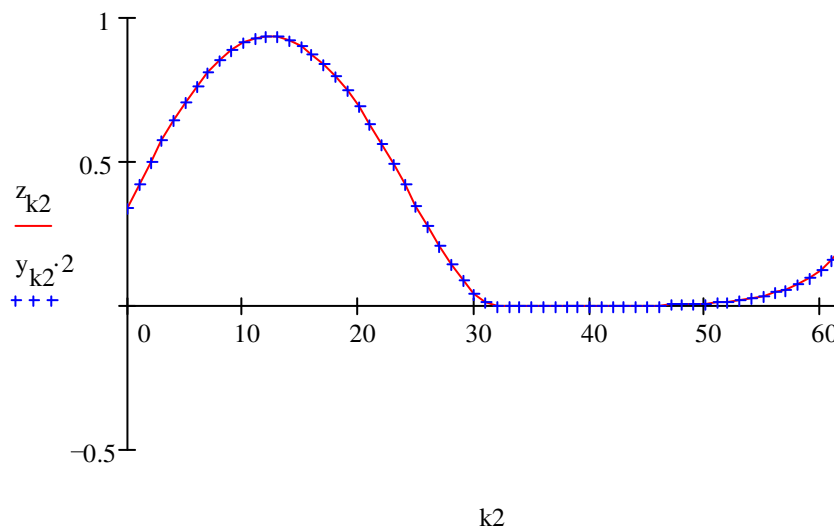
$$X := \text{fft}(s) \quad H := \text{fft}(u) \quad \text{FT de los vectores } s \text{ y } u$$

$$Y := \overline{X} \cdot H \quad \text{Producto de elementos análogos}$$

$$y := \text{ifft}(Y) \quad \text{Antitransformada (resultado, correlación)}$$

Verificando gráficamente:

$$i := 0..2 \cdot N - 1$$



Ejercicio N° 2 - Hallar la correlación entre las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \sin(x)$ y $f_2(x) = -x + 1$ ambas con valores diádicos iguales comprendidos entre 0 y $\pi/4$. Hacer el correspondiente muestreo y comparar las soluciones para el caso continuo y con la utilización de la FFT.

b) $f_1(x) = x - 1$ y $f_2(x) = n$ ambas con valores diádicos iguales comprendidos entre 0 y 1. Hacer el correspondiente muestreo y comparar las soluciones para el caso continuo y con la utilización de la FFT.

Convolución de dos vectores de longitudes distintas

Se desea convolucionar dos señales de tiempo continuo a las que se las muestrea con un cierto periodo.

$$s := (0 \ -1 \ -1.2 \ 2 \ 1.2 \ 1.2 \ 0.5 \ 0 \ -0.8)^T \quad N := \text{length}(s)$$

$$u := (1 \ -0.6 \ -0.3 \ -0.2)^T \quad M := \text{length}(u)$$

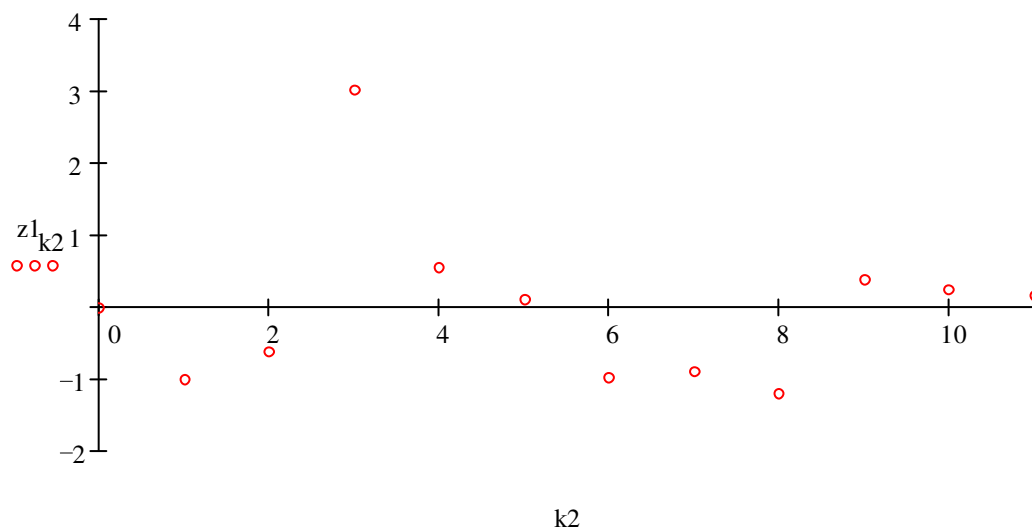
Dado que la convolución de dos señales necesita la suma de longitudes de cada una de las señales se rellenan con ceros hasta completarla.

$$k_1 := N..N + M - 1 \quad s_{k_1} := 0 \quad u_{k_1} := 0 \quad \text{Se completan con ceros}$$

$$k_2 := 0..N + M - 2 \quad \text{índice para contener la convolución}$$

$$z_{k_2} := \sum_{i=0}^{N+M-1} s_i \cdot u_{\text{mod}((k_2 - i) + N + M - 1, N + M - 1)} \quad \text{Convolución discreta}$$

Graficando conjuntamente:



Convolución con Transformada de Fourier

Para aplicar la FFT es necesario que ambos vectores tengan la misma longitud y conveniente que la longitud sea diádica (es decir, potencia de 2). Una forma fácil de conocer esta longitud es utilizar la siguiente expresión:

$$N1 := \text{if} \left(\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right) = \frac{\log(N)}{\log(2)}, 2^{\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right) + 1}, 2^{\text{ceil} \left(\frac{\log(N)}{\log(2)} \right)} \right)$$

$$N1 = 16$$

y rellenar con ceros hasta lograrla en cada uno de los vectores.

$$k1 := N..N1 - 1 \quad s_{k1} := 0 \quad k3 := M..N1 - 1 \quad u_{k3} := 0$$

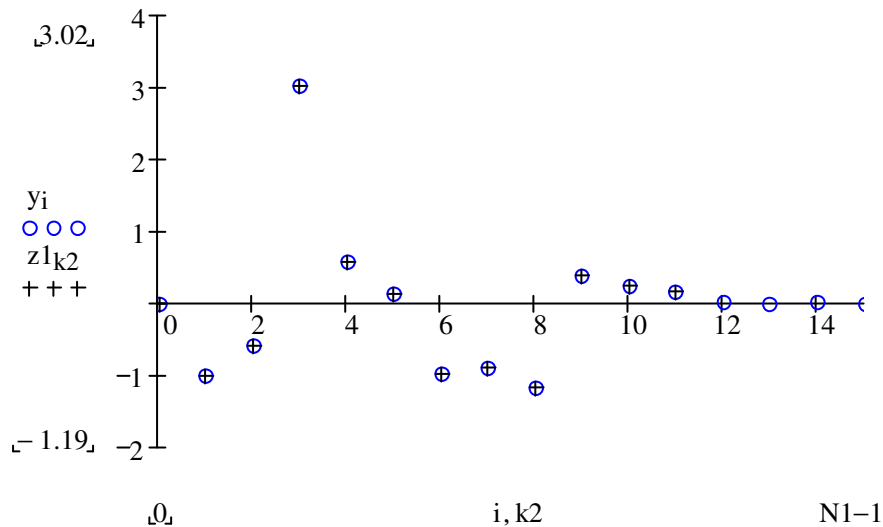
$$X := \text{fft}(s) \quad H := \text{fft}(u) \quad \text{FT de los vectores s y u}$$

$$Y := \overrightarrow{H \cdot X} \quad \text{Producto de elementos análogos}$$

$$y := \text{ifft}(Y) \cdot \sqrt{N1} \quad \text{Antitransformada (resultado, convolución)}$$

Verificando gráficamente:

$$i := 0..2 \cdot N - 1 \quad \text{índice}$$

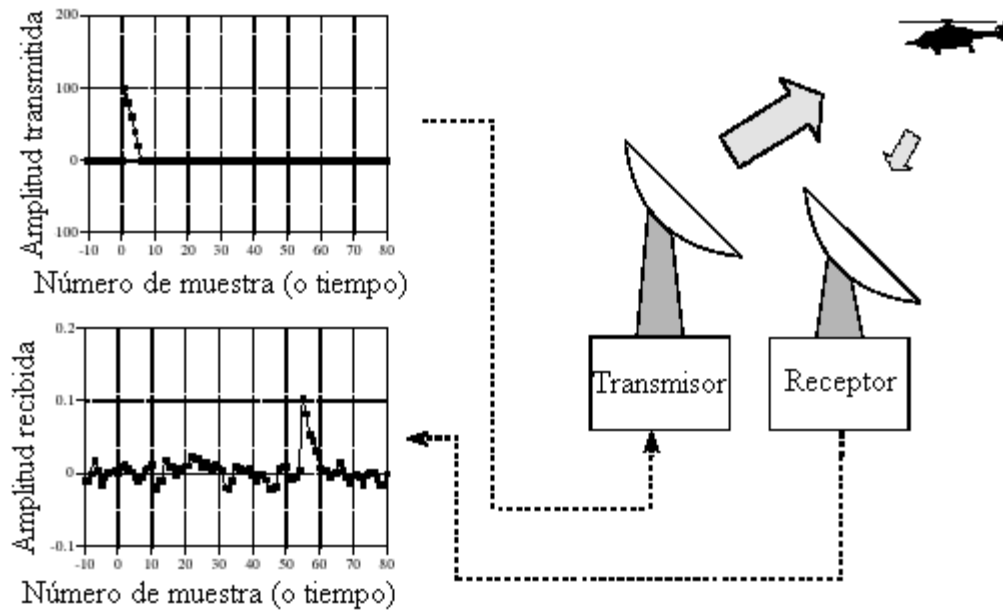


Ejercicio N° 3 - Hallar la correlación entre las siguientes funciones:

- Las que están almacenadas en los archivos [convol1.prn](#) y [convol2.prn](#). Verificar mediante la utilización de la FFT.
- Las que están almacenadas en los archivos [convol1.prn](#) y [convol3.prn](#). Verificar mediante la utilización de la FFT.

Correlación

El concepto de correlación se puede comprender mejor con un ejemplo. La Figura muestra los elementos clave de un sistema de radar. Una antena especialmente diseñada transmite un corto pulso de energía de onda de radio en una dirección seleccionada.



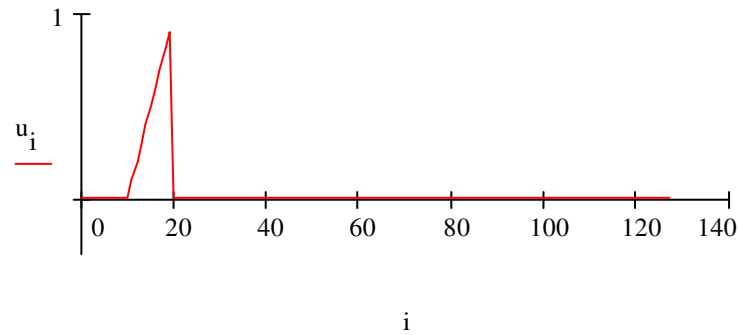
Si la señal propagante choca contra un objeto, tal como el helicóptero de la ilustración, una pequeña fracción de la energía se refleja hacia el radio receptor localizado cerca del transmisor. El pulso transmitido es de una forma específica que se selecciona, tal como un triángulo en el ejemplo. La señal recibida consistirá de dos partes: (1) una versión desplazada y escalada del pulso transmitido y (2) ruido aleatorio, resultante de la interferencia de ondas de radio, ruido térmico en la circuitería, etc.

Ya que las señales de radio viajan a una tasa conocida, la velocidad de la luz, el desplazamiento entre el pulso transmitido y recibido es una medida directa de la distancia al objeto que está siendo detectado. Este es el problema: dada una señal de alguna forma conocida, cuál es la mejor forma de determinar dónde (o si) la señal ocurre en **otra** señal.

La respuesta es la **Correlación**.

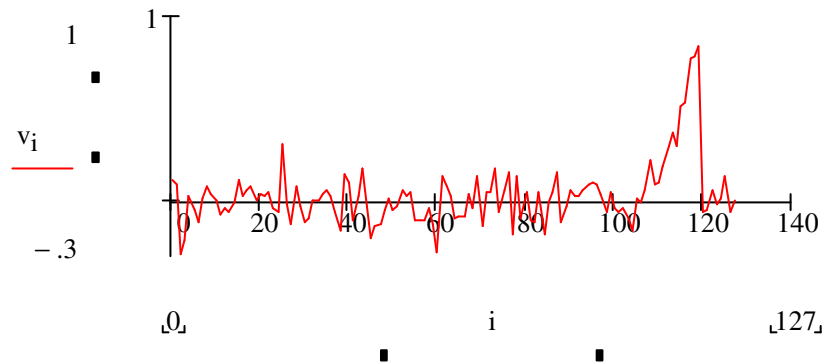
Sea la señal emitida por el transmisor la siguiente:

$$i := 0..127 \quad u_1 := \text{if} \left(10 < i < 20, \frac{i-10}{10}, 0 \right)$$



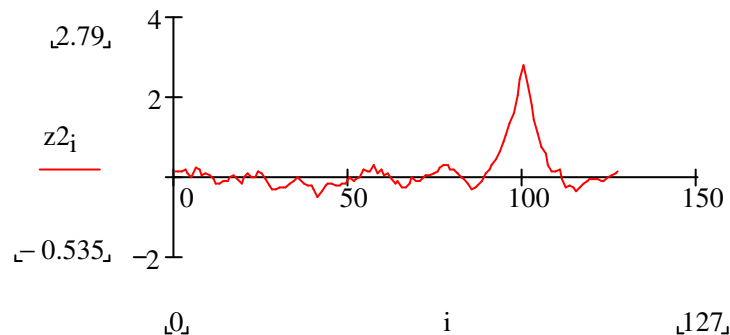
y la señal recibida (contaminada con un ruido blanco gaussiano)

$$r := \text{rnorm}(128, 0, 0.1) \quad v_{\text{mod}}(i+100, 128) := u_i + r_i$$



Correlacionando las dos señales, utilizando FFT.

$$U := \text{fft}(u) \quad V := \text{fft}(v) \quad z2 := \text{ifft}\left(\overrightarrow{(\overline{U} \cdot V)}\right) \cdot \sqrt{\text{length}(u)}$$



Si hay ruido en la señal recibida, habrá también ruido en la señal correlacionada. Es un hecho inevitable. Excepto por este ruido, el pico generado en la señal correlacionada es simétrico a izquierda y derecha. Esto es verdad aún si la señal target no es simétrica. Además, el ancho del pico es dos veces el ancho de la señal target. Recuerdese, la señal

correlacionada está intentando **detectar** la señal target, **no recrearla**. No hay razón para esperar que el pico aún sea igual a la señal target original.

La correlación es una técnica **óptima** para detectar una forma de onda conocida en ruido aleatorio. Esto es, el pico es más alto por encima del ruido usando la correlación que el que puede ser producido por cualquier otro sistema lineal. (Para ser perfectamente correctos, es sólo óptimo para **ruido blanco aleatorio**).

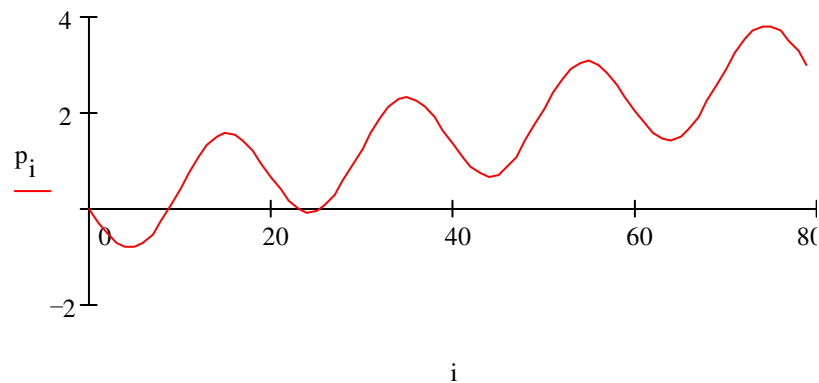
CONVOLUCIÓN

La convolución es una operación matemática formal, tal como la multiplicación, adición e integración. La adición toma dos **números** y produce un tercer **número**. Mientras que la convolución toma dos **señales** para producir una tercera **señal**. La convolución es usada en muchos campos de la matemática, tales como probabilidad y estadística. En sistemas lineales, la convolución se usa para describir la relación entre tres señales de interés: la señal de entrada, la respuesta impulsiva, y la señal de salida.

A continuación se muestra como se usa la convolución para obtener la señal de salida a partir de una de entrada pasando 1) por un filtro pasabajo 2) por un filtro paso-alto. Esto se obtiene convolucionando la señal de entrada con la respuesta impulsiva del filtro.

$N1 := 80$ longitud de la señal de entrada $i := 0.. N1 - 1$

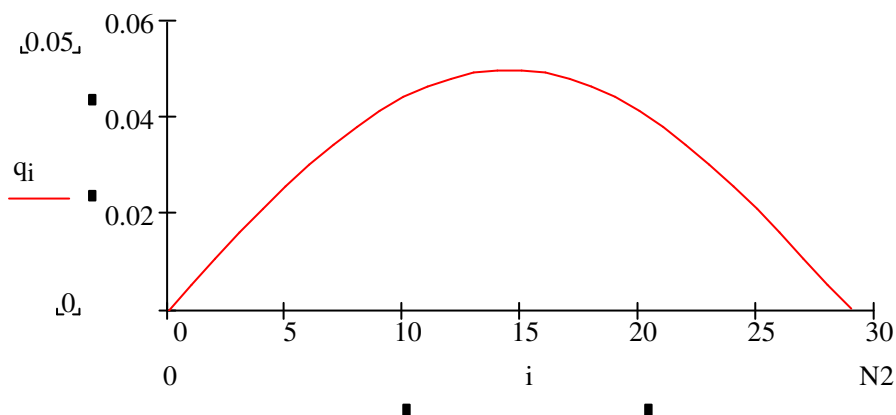
$$p_i := -\sin\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{4}{N1 - 1}\right) + 3 \cdot \frac{i}{N1 - 1} \quad \text{señal de entrada}$$



$N2 := 30$ longitud de la respuesta impulsiva (**filtro paso-bajo**)

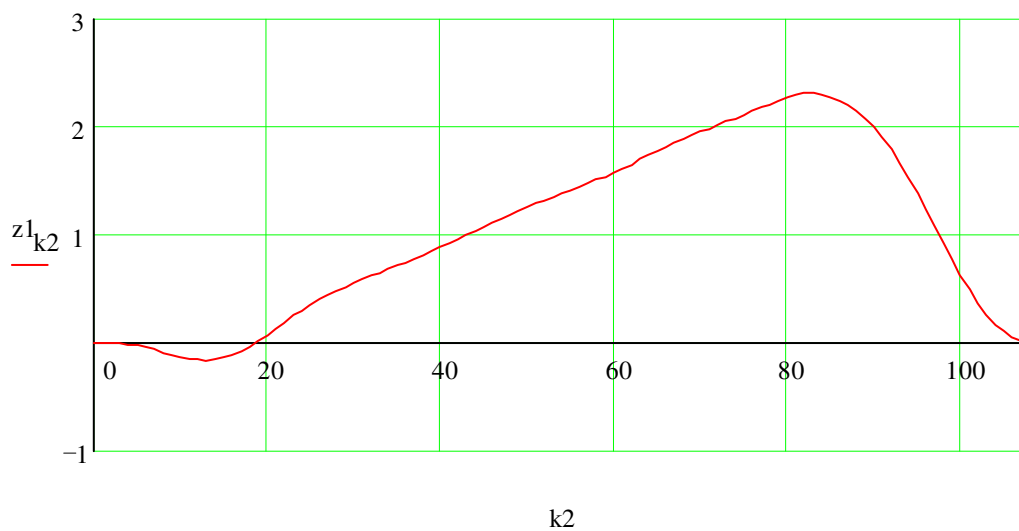
$j := 0.. N2 - 1$

$$q_j := 0.05 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N2 - 1} \cdot j\right) \quad \text{respuesta impulsiva}$$



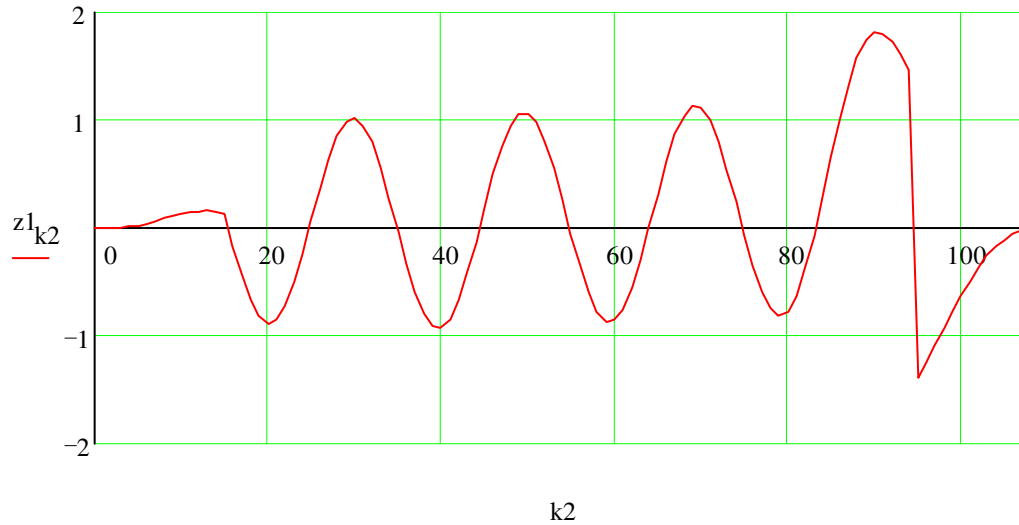
$k1 := N1 .. N1 + N2 - 1$ $p_{k1} := 0$ Se completan con ceros
 $k3 := N2 .. N1 + N2 - 1$ $q_{k3} := 0$
 $k2 := 0 .. N1 + N2 - 2$ índice para contener la convolución

$$z1_{k2} := \sum_{i=0}^{N1 + N2 - 1} p_i \cdot q_{\text{mod}((k2 - i) + N1 + N2 - 1, N1 + N2 - 1)} \quad \text{Convolución discreta}$$



$q := -q$ $\frac{q_{N2}}{2} := 1 + \frac{q_{N2}}{2}$ respuesta impulsiva (**filtro paso-bajo**)
 $k3 := N2 .. N1 + N2 - 1$ $q_{k3} := 0$ Se completan con ceros

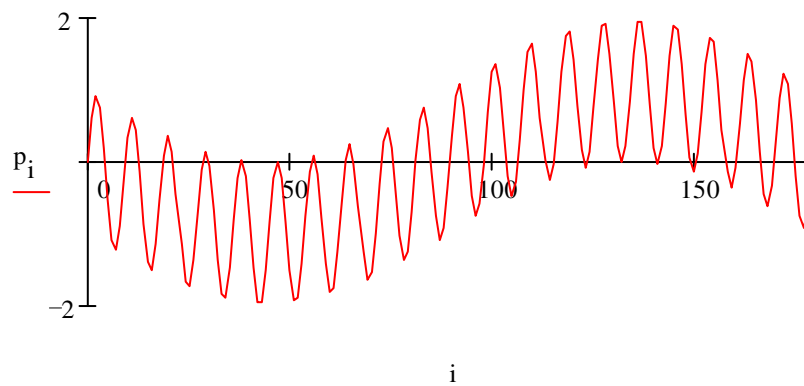
$$z1_{k2} := \sum_{i=0}^{N1 + N2 - 1} p_i \cdot q_{\text{mod}((k2 - i) + N1 + N2 - 1, N1 + N2 - 1)} \quad \text{Convolución discreta}$$



$N1 := 180$ longitud de la señal de entrada

$i := 0..N1 - 1$

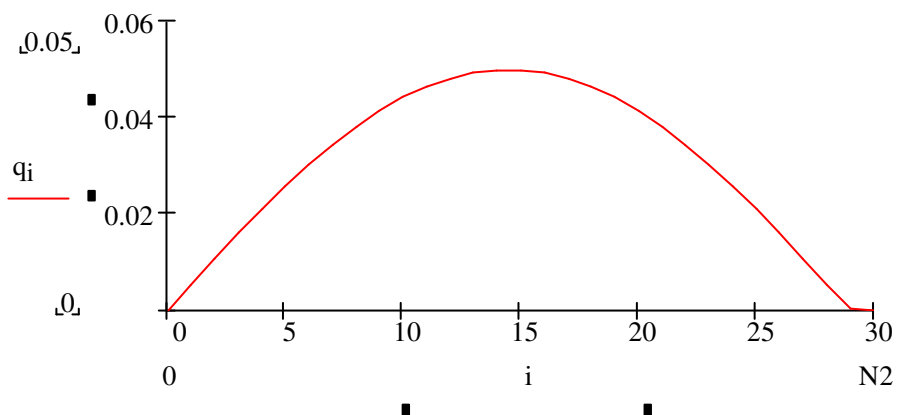
$$p_i := -\sin\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{1}{N1 - 1}\right) + \sin\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{20}{N1 - 1}\right)$$



$N2 := 30$ longitud de la respuesta impulsiva (**filtro paso-bajo**)

$j := 0..N2 - 1$

$$q_j := 0.05 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N2 - 1} \cdot j\right) \quad \text{respuesta impulsiva}$$

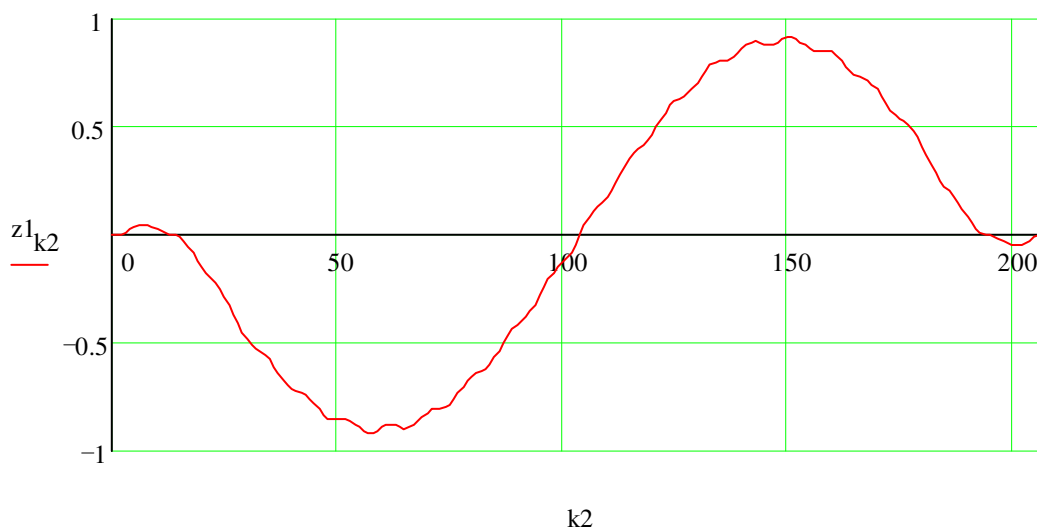


$k1 := N1 .. N1 + N2 - 1$ $p_{k1} := 0$ Se completan con ceros

$k3 := N2 .. N1 + N2 - 1$ $q_{k3} := 0$

$k2 := 0 .. N1 + N2 - 2$ índice para contener la convolución

$$z1_{k2} := \sum_{i=0}^{N1+N2-1} p_i \cdot q_{\text{mod}((k2-i)+N1+N2-1, N1+N2-1)} \quad \text{Convolución discreta}$$



$q := -q$ $\frac{q_{N2}}{2} := 1 + \frac{q_{N2}}{2}$ respuesta impulsiva (**filtro paso-bajo**)

$k3 := N2 .. N1 + N2 - 1$ $q_{k3} := 0$ Se completan con ceros

$$z1_{k2} := \sum_{i=0}^{N1 + N2 - 1} p_i \cdot q_{\text{mod}((k2 - i) + N1 + N2 - 1, N1 + N2 - 1)} \quad \text{Convolución discreta}$$

