Capítulo 17

La ecuación diferencial de Bessel

17.1 La ecuación diferencial de Bessel

Consideremos en la ecuación hipergeométrica general el caso $A = 0$, $C = \infty$, $\alpha + \alpha' = 0$, $\beta + \beta' = 1$ y $\gamma + \gamma' = 0$, lo cual esta de acuerdo con $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$

$$\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left[\frac{-B\,\alpha\alpha'}{z^2(z-B)} + \frac{B\,\beta\beta'}{z(z-B)^2} + \frac{\gamma\gamma'}{z(z-B)}\right]\Psi = 0 \ ,$$

si consideramos además, $\beta\beta' = \gamma\gamma' = B^2$ y tomamos el límite $B \to \infty$, obtenemos

$$\boxed{\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right)\Psi = 0 \ .} \tag{17.1}$$

la cual es conocida como *la ecuación diferencial de Bessel*. Esta ecuación tiene una singularidad fuchsiana en $z = 0$ cuando $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Planteamos como solución

$$\Psi(z) = z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{\nu+\sigma} \ ,$$

sustituir en la ecuación (17.1)

$$z^2\Psi'' + z\Psi' - \alpha^2\Psi = -z^2\Psi \ ,$$

tenemos

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{a_\nu(\nu+\sigma)(\nu+\sigma-1) + a_\nu(\nu+\sigma) - a_\nu\alpha^2\right\} z^{\nu+\sigma} = -\sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu-2} z^{\nu+\sigma} \ ,$$

obteniendo

$$a_\nu\left[(\nu+\sigma)^2 - \alpha^2\right] = -a_{\nu-2} \quad \nu = 2, 3, \cdots \ ,$$

mientras para $\nu = 0$

$$a_0(\sigma^2 - \alpha^2) = 0 \ ,$$

lo que da una ecuación para el exponente $\sigma^2 = \alpha^2$, con dos soluciones, $\sigma_1 = +\alpha$ y $\sigma_2 = -\alpha$. Elegimos $\sigma = \sigma_1 = +\alpha$ y $a_0 \neq 0$. Para $\nu = 1$

$$a_1(1 + 2\alpha) = 0 \ ,$$

lo que implica $a_1 = 0$. Además, usando la *fórmula recursiva* para los coeficientes

$$\boxed{a_\nu = -\frac{a_{\nu-2}}{\nu(\nu + 2\alpha)} \ ,} \tag{17.2}$$

se puede demostrar que todos los coeficientes impares son nulos. Los coeficientes pares

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2\, 1!\, (\alpha+1)} \ , \qquad a_4 = \frac{a_0}{2^4\, 2!\, (\alpha+1)(\alpha+2)} \ .$$

El término general

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu \frac{a_0}{2^{2\mu}\, \mu!\, (\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\mu)} \ ,$$

tomamos

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)} \ ,$$

se obtiene

$$\boxed{J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!\, \Gamma(\mu+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} \ ,} \tag{17.3}$$

con $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$, conocida como función de Bessel de orden α.

17.2 Funciones de Bessel de índice no entero

Consideremos $\sigma = -\alpha$. Hay solución, en este caso, linealmente independiente de J_α, en forma de serie

$$J_{-\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!\, \Gamma(\mu-\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} \ , \tag{17.4}$$

Ejemplo En el caso $\alpha = 1/2$, la resta de las dos raices $\sigma_1 - \sigma_2 = 1/2 + 1/2 = 1 \in \mathbb{Z}$. A pesar de estar en el caso incómodo las dos soluciones todavía *funcionan*

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{z}{2}} \frac{1}{z\sqrt{\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu 2^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \frac{z^{2\mu+1}}{2^{2\mu}} \ , \tag{17.5}$$

hemos usado que

$$\mu!\Gamma(\mu+3/2) = \mu!(\mu+1/2)\Gamma(\mu+1/2) \ ,$$

ya que $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ y

$$\mu!\,\Gamma(\mu+3/2) = \mu!(\mu+1/2)(2\mu-1)!!\sqrt{\pi}/2^{\mu} \ ,$$

donde se uso que $\Gamma(n+1/2) = (2n-1)!!\sqrt{\pi}/2^{n}$,

$$\begin{aligned}\mu!\,\Gamma(\mu+3/2) &= \mu!(2\mu+1)(2\mu-1)!!\sqrt{\pi}/2^{\mu+1} \ ,\\ &= \mu!(2\mu+1)!!\sqrt{\pi}/(2^{\mu+1}) \ ,\end{aligned}$$

como $(2n+1)!! = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$,

$$\mu!\,\Gamma(\mu+3/2) = (2\mu+1)!\sqrt{\pi}/2^{2\mu+1} \ .$$

Expandimos la serie (17.5)

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) \ , \tag{17.6}$$

luego

$$\boxed{J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{z}} \ .} \tag{17.7}$$

La otra solución

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{z}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}2^{2\mu}}{(2\mu)!}\frac{z^{2\mu}}{2^{2\mu}} \ , \tag{17.8}$$

o bien

$$\boxed{J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos z}{\sqrt{z}} \ .} \tag{17.9}$$

Sin demostración: J_α para índices $\alpha = \pm(2n+1)/2$ se expresa por fórmulas semejantes.

17.3 Funciones de Bessel de índice entero

J_n holomorfa en $z=0$, realmente J_n holomorfa en todo el plano. Consideremos la primera función de Bessel, es decir con $n=0$ y derivemosla

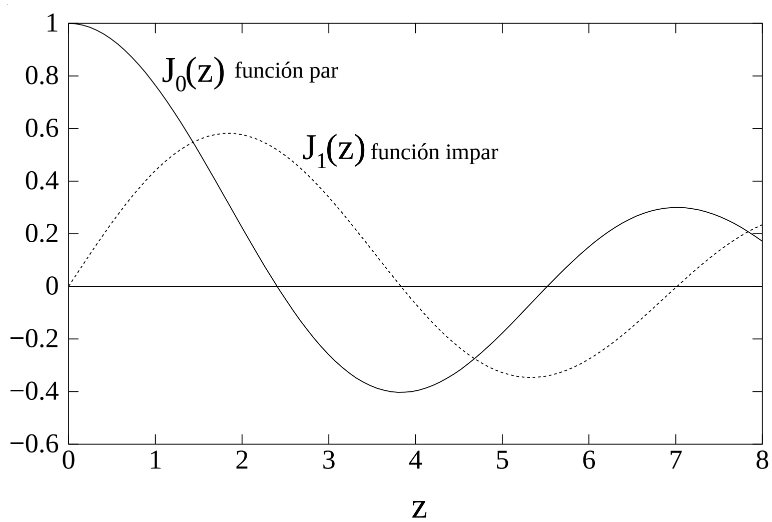
$$\begin{aligned}J_0(z) &= \sum_{\nu}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(\nu!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{z^4}{2^4} - \cdots \ ,\\ J_0'(z) &= -\frac{2}{(1!)^2}\frac{z}{2^2} + \frac{4}{(2!)^2}\frac{z^3}{2^4} - \frac{6}{(3!)^2}\frac{z^5}{2^6} + \cdots \ .\end{aligned}$$

Consideremos la función de Bessel de índice uno

$$J_1(z) = \frac{z}{2}\sum_{nu}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = \frac{z}{2}\left\{1 - \frac{1}{(1!)^2}\frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{z^4}{2^4} - \cdots\right\} ,$$

comparando concluímos que

$$\boxed{J_1(z) = -J_0'(z)\ .} \tag{17.10}$$



Proposición 17.1 Para una variable real $x \gg 1$, toda solución real de la ecuación de Bessel es aproximadamente de la forma $A\cos(x+\gamma)/\sqrt{x}$.

Demostración Sea

$$\sqrt{x}\Psi(x) = u(x) ,$$

despejando y diferenciando tenemos

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= x^{-1/2}u(x) ,\\ \Psi'(x) &= x^{-1/2}u'(x) - \frac{1}{2}x^{-3/2}u(x) ,\\ \Psi''(x) &= x^{-1/2}u''(x) - x^{-3/2}u'(x) + \frac{3}{4}x^{-5/2}u(x).\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel

$$u''(x) - \frac{u'(x)}{x} + \frac{3}{4}\frac{u(x)}{x^2} + \frac{u'(x)}{x} - \frac{1}{2}\frac{u(x)}{x^2} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)u(x) = 0 ,$$

quedando

$$u''(x) + \left(1 - \frac{1/4-\alpha^2}{x^2}\right)u(x) = 0 .$$

Para x muy grande

$$u''(x) + u(x) = 0 \text{ , con solución } u(x) = A\cos(x+\gamma) \ ,$$

luego la solución completa es

$$\Psi(x) = A\frac{\cos(x+\gamma)}{\sqrt{x}} \ .$$

q.e.d.

Por otra parte, cerca de cero la función de Bessel de índice nulo se puede aproximar por

$$J_0(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} = \left(1 - \frac{z^2}{8}\right)^2 \ . \tag{17.11}$$

Consideremos ahora las funciones de Bessel de índice entero pero negativo

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \ ,$$

consideraremos nulos los coeficientes con $\nu < n$ en la función gamma. Sea $\mu = \nu - n$, luego

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu(-1)^n}{(\mu+n)!\mu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} \ ,$$

lo que resumimos como

$$\boxed{J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \ .} \tag{17.12}$$

17.4 Función generatriz

Consideremos

$$\begin{aligned}
\Psi(z,s) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right] &= e^{zs/2} e^{-z/2s} \ , \\
&= \left(1 + \frac{z}{2}\frac{s}{1!} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{s^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{z}{2}\frac{s^{-1}}{1!} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{s^{-2}}{2!} + \cdots\right) \ , \\
&= s^0\left(1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{z}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} - \cdots\right) \\
&\quad + s^1\left(\frac{z}{2}\frac{1}{0!1!} - \left(\frac{z}{2}\right)^3 \frac{1}{1!2!} + \left(\frac{z}{2}\right)^5 \frac{1}{2!3!} - \cdots\right) \\
&\quad + s^{-1}\left(-\frac{z}{2}\frac{1}{0!1!} + \left(\frac{z}{2}\right)^3 \frac{1}{1!2!} - \cdots\right) + s^2\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{0!2!} - \left(\frac{z}{2}\right)^4 \frac{1}{1!3!} + \cdots\right) + \cdots \ .
\end{aligned}$$

Luego, la función generatriz

$$\boxed{\Psi(z,s) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu(z) s^\nu \ .} \tag{17.13}$$

17.5 Fórmulas de adición

Consideremos la función generatriz (17.13) con argumento $z = (z_1 + z_2)/2$

$$\exp\left[\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\left(s-\frac{1}{s}\right)\right] = \exp\left[\frac{z_1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right]\exp\left[\frac{z_2}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right] ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z_1+z_2) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s^\mu J_\mu(z_1) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s^\nu J_\nu(z_2) .$$

Comparando coeficientes para iguel potencia en s tenemos

$$\boxed{J_n(z_1+z_2) = \sum_{\substack{\nu+\mu=n \\ n=-\infty\cdots\infty}} J_\nu(z_1)J_\mu(z_2) .} \tag{17.14}$$

Particularicemos (17.14) al caso $n=0$ y $z_1 = z = -z_2$

$$J_0(0) = 1 = J_0^2(z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu(z)J_{-\mu}(-z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(-z)J_{-\nu}(z) ,$$

obteniendo

$$\boxed{1 = J_0^2(z) + 2\sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu^2(z) .} \tag{17.15}$$

En el caso que la variable $z \in \mathbb{R}$ y considerando que $|\,J_0(z)\,| \leq 1$, podemos acotar los J_ν por

$$|\,J_\mu(z)\,| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad \text{si } \mu = 1, 2, 3, \cdots. \tag{17.16}$$

Reemplazamos $s = e^{i\varphi}$ con $\varphi \in \mathbb{R}$, luego

$$\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = i\,\mathrm{sen}\,\varphi .$$

En la función generatriz

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right] = \exp(iz\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \cos(z\,\mathrm{sen}\,\varphi) + i\,\mathrm{sen}(z\,\mathrm{sen}\,\varphi) ,$$

$$\boxed{\exp(iz\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi}J_n(z) .} \tag{17.17}$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}\exp(iz\,\mathrm{sen}\,\varphi) &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(z)(\cos n\varphi - i\,\mathrm{sen}\,n\varphi) ,\\ &= J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(z)\cos 2m\varphi + 2i\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(z)\,\mathrm{sen}(2m+1)\varphi ,\end{aligned}$$

Comparando partes real e imaginaria, con $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\cos(x \operatorname{sen} \varphi) &= J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos 2m\varphi \ , \\
\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) &= 2\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(x)\operatorname{sen}(2m+1)\varphi \ .
\end{aligned}
\tag{17.18}
$$

Sea $\varphi = 0$

$$
\boxed{1 \equiv J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \ .} \tag{17.19}
$$

Sea $\varphi = \pi/2$

$$
\begin{aligned}
\cos x &\equiv J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(x) \ , \\
\operatorname{sen} x &\equiv 2\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(x) \ .
\end{aligned}
\tag{17.20}
$$

17.6 Representaciones integrales

Multipliquemos la ecuación (17.17) por $e^{-im\varphi}$ e integremos

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(z \operatorname{sen} \varphi - m\varphi) d\varphi = 2\pi J_m(z) \ .
$$

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $J_m(x)$ es real, lo que significa

$$
J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(x \operatorname{sen} \varphi - m\varphi\right) \, d\varphi \ ,
$$

por paridad de la función subintegral, podemos reescribir la integral como

$$
\boxed{J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left(m\varphi - x \operatorname{sen} \varphi\right) \, d\varphi \ .} \tag{17.21}
$$

En particular

$$
J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \, d\varphi = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \, d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \, d\varphi\right] \ ,
$$

haciendo el cambio de variable $\theta = \varphi - \pi$, tenemos

$$
J_0(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \, d\varphi + \int_{-\pi/2}^{0} \cos(x sen(\theta + \pi)) \, d\theta\right] \ ,
$$

usando que $\operatorname{sen}(\theta+\pi) = -\operatorname{sen}\theta$ y que coseno es una función par

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos(x\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi + \int_{-\pi/2}^{0} \cos(xsen\theta)\,d\theta\right] ,$$

sumando ambas integrales

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi \ . \tag{17.22}$$

Hagamos un cambio de variable en (17.22) $\omega = \operatorname{sen}\varphi$, luego $d\varphi = \dfrac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$ y la integral nos queda

$$J_0(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(\omega x)}{\pi\sqrt{1-\omega^2}}\,d\omega \ .$$

Definamos una función $p(\omega)$ de la forma

$$p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\,\omega\,| \geq 1, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-\omega^2}} & \text{si } |\,\omega\,| < 1, \end{cases}$$

podemos reescribir J_0 como

$$J_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x)p(\omega)\,d\omega \ .$$

Hagamos los cambios de variable $x = t$ y $\omega = 2\pi s$, obtenemos

$$J_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)F(s)\,ds \ ,$$

donde

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\,s\,| \geq \frac{1}{2\pi}, \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-4\pi s^2}} & \text{si } |\,2\,| < \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

Si tomemos la transformada de Fourier a la relación (17.12) obtenemos:

$$\mathcal{F}\{J_1\} = \mathcal{F}\{-J_0'\} = -i2\pi s\mathcal{F}\{J_0\} = -2\pi i sF(s) \ ,$$

donde $F(s)$ es la función indicada anteriormente.

17.7 Relaciones de recurrencia

Derivemos la función generatriz (17.13) respecto a s,

$$\frac{\partial\Psi(z,s)}{\partial s} = \frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) \ ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n s^{n+1} J_n(z) = \frac{z}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[J_{n-1}+J_{n+1}\right] s^{n+1} \ ,$$

comparando coeficientes

$$\boxed{\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \ .} \tag{17.23}$$

Derivamos (17.13) respecto a z y obtenemos

$$\frac{\partial\Psi(z,s)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) \ ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n'(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[J_{n-1}-J_{n+1}\right] s^{n} \ ,$$

comparando coeficientes

$$\boxed{2J_n'(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \ .} \tag{17.24}$$

Sumando (17.23) y (17.24) tenemos

$$\frac{n}{z}J_n(z) + J_n'(z) = J_{n-1}(z) \Longleftrightarrow z^n J_{n-1}(z) = \left[z^n J_n(z)\right]' \ . \tag{17.25}$$

Restando (17.23) y (17.24) obtenemos

$$J_n'(z) - \frac{n}{z}J_n(z) = -J_{n+1}(z) \Longleftrightarrow -z^{-n} J_{n+1}(z) = \left[z^{-n} J_n(z)\right]' \ . \tag{17.26}$$

Consideremos (17.19)

$$1 = J_0(z) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[J_{2\nu}(z) + J_{2\nu+2}(z)\right] \ ,$$

usando la relación de recurrencia (17.23) para $n = 2\nu+1$ tenemos

$$1 = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2\nu+1}{z}J_{2\nu+1}(z) \ ,$$

$$\frac{z}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)J_{2\nu+1}(z) \ ,$$

y por inducción completa:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\nu+n)(n+\nu+1)!}{\nu!}J_{2\nu+n}(z) \ . \tag{17.27}$$

Podemos pues expresar cualquier serie de potencias en serie de funciones de Bessel.

17.8 Relaciones de ortogonalidad

Sin demostración. Relaciones de ortogonalidad en el intervalo $0 \leq x \leq \infty$. Consideremos

$$f(x) = J_\sigma(hx) \ , \qquad g(x) = J_\sigma(kx) \ , \quad \text{con } h \neq k. \tag{17.28}$$

Tomemos las derivadas

$$\begin{aligned} f'(x) &= hJ'_\sigma(hx) \ , \qquad & f''(x) &= h^2 J''_\sigma(hx) \ , \\ g'(x) &= kJ'_\sigma(kx) \ , \qquad & g''(x) &= k^2 J''_\sigma(kx) \ . \end{aligned}$$

La ecuaciones de Bessel que satisfacen

$$\begin{aligned} J''_\sigma(hx) + \frac{1}{hx} J'_\sigma(hx) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2} \right) J_\sigma(hx) = 0 \ , \\ J''_\sigma(kx) + \frac{1}{kx} J'_\sigma(kx) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2} \right) J_\sigma(kx) = 0 \ . \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por h^2 y la segunda por k^2 y usando las definiciones dadas en (17.28) obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2} \right) f(x) = 0 \ , \\ g''(x) + \frac{1}{x} g'(x) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2} \right) g(x) = 0 \ , \end{aligned}$$

multiplican por $xg(x)$ y por $xf(x)$ respectivamente y restando

$$\begin{aligned} xf(x)''g(x) - xg(x)''f(x) + (xf'(x)g'(x) - xf'(x)g'(x)) \\ + f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + x(h^2 - k^2)f(x)g(x) = 0 \ . \end{aligned}$$

El factor entre paréntesis corresponde a un cero agregado para lograr el reordenamiento

$$[x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))]' = (k^2 - h^2)xf(x)g(x) \ .$$

Integrando en el intervalo $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b tf(t)g(t)\, dt = \frac{1}{k^2 - h^2} \Big[x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \Big]_a^b \ .$$

La expresión del lado derecho se anulará en tres casos

1. Si $J_\sigma(hx)$ y $J_\sigma(kx)$ se anulan en a y en b.

2. Sus derivadas se anulan en a y en b.

3. O bien $J_\sigma(ha) = J_\sigma(ka) = 0 = J'_\sigma(hb) = J'_\sigma(kb)$.

$$\int_a^b x J_\sigma(hx) J_\sigma(kx)\, dx$$

es la típica integral que interviene en asuntos de ortogonalidad.

Ortogonalidad

Para $m \neq n$

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) \rho\, d\rho = 0\ . \tag{17.29}$$

Esto da ortogonalidad sobre el intervalo $[0, a]$. Donde los $\alpha_{\nu m}$ son tales que $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$.

Normalización

$$\int_0^a \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2 \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2\ . \tag{17.30}$$