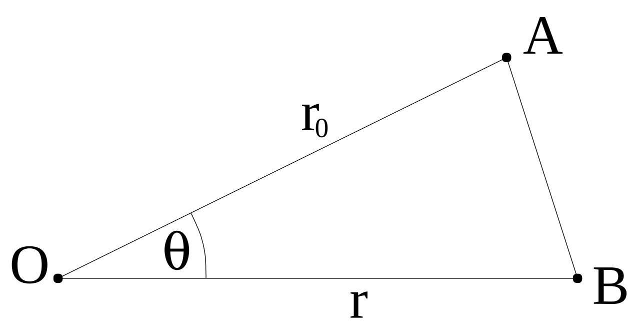
# Capítulo 16

# Polinomios de Legendre

## 16.1 Función generatriz

En diversos problemas físicos (gravitación, electrostática, etc.) nos encontramos con fuerzas que dependen del inverso de la distancia entre dos cuerpos. Los polinomios de Legendre aparecen naturalmente en el problema geométrico de determinar esta distancia inversa, lo cual los vincula con numerosas situaciones de interés físico.

Consideremos dos radios $r_0$ y $r$ que unen un punto O con dos puntos, $A$ y $B$, respectivamente:




La distancia $d = \overline{AB}$ está dada por:

$$d = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta} \ .$$

Definamos

$$x = \cos\theta \ , \quad -1 \leq x \leq 1 \ .$$

Si $r > r_0$ y $s = r_0/r < 1$, se tiene

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}} \ .$$

Si, por el contrario, $r < r_0$, y $s = r/r_0 < 1$:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}} \ .$$

En ambos casos, la segunda fracción es la misma y resulta ser precisamente la función generatriz de los polinomios de Legendre.

**Definición 16.1**

$$\boxed{\psi(x,s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2xs}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)s^n} \tag{16.1}$$

*es la función generatriz de los polinomios de Legendre* $P_n(x)$.

Observemos que $\psi(x,s)$ puede ser expandida en serie de Taylor en el argumento $(s^2-2xs)$:

$$\begin{aligned}\psi(x,s)=[1+(s^2-2xs)]^{1/2}&=1-\frac{1}{2}(s^2-2xs)+\frac{3}{8}(s^2-2sx)^2-\cdots\\&=1+xs+\frac{1}{2}(3x^2-1)s^2-\cdots\ ,\end{aligned}$$

lo cual nos permite encontrar expresiones explícitas para los polinomios de Legendre:

$$P_0(x)=1\ , \tag{16.2a}$$
$$P_1(x)=x\ , \tag{16.2b}$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ , \tag{16.2c}$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\ldots \tag{16.2d}$$

Considerando el caso particular $x=1$ en (16.1):

$$\psi(1,s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s}}=\frac{1}{1-s}=1+s+s^2+s^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)s^n\ .$$

Luego

$$P_n(1)=1\quad\forall n\in\mathbb{N}_0\ . \tag{16.3}$$

Análogamente, tomando $x=-1$:

$$\psi(-1,s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2+2s}}=\frac{1}{1+s}=1-s+s^2-s^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)s^n\ .$$

Luego

$$P_n(-1)=(-1)^n\quad\forall n\in\mathbb{N}_0\ . \tag{16.4}$$

También es inmediato evaluar $P_n(0)$:

$$\psi(0,s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=1-\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{8}s^4+\cdots=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}s^{2\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)s^n\ ,$$

luego

$$
\begin{aligned}
P_n(0) &= 0 \quad \text{si } n \text{ es impar,} \\
P_{2\nu}(0) &= (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \quad \text{si } \nu \geq 1, \\
P_0(0) &= 1 \ .
\end{aligned}
$$

## 16.2 Relaciones de recurrencia

1) Derivemos (16.1) respecto a $s$.

$$
\frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{1}{2}(1+s^2-2xs)^{-3/2}(2s-2x) = \frac{x-s}{1+s^2-2xs}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)s^{n-1} \ ,
$$

es decir

$$
(1+s^2-2xs)\frac{\partial\psi}{\partial s} - (x-s)\psi = 0 \ .
$$

Introduciendo la expansión (16.1) e igualando coeficientes de $s^n$, se obtiene la relación de recurrencia

$$
\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0} \ , \quad n \geq 1 \ , \tag{16.5a}
$$

$$
P_1 - xP_0 = 0 \ . \tag{16.5b}
$$

2) Escribamos los polinomios de Legendre en la forma

$$
P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}x^m \ . \tag{16.6}
$$

Reemplazando en (16.1) y comparando coeficientes de $x^{m+1}$ se sigue que:

$$
(n+1)\, a_{(n+1),(n+1)} = (2n+1)a_{n,n} \ ,
$$

$$
a_{m,m} = \frac{2m-1}{m}\, a_{m-1,m-1} \ , \quad m \geq 1 \ . \tag{16.7}
$$

Ésta es una relación de recurrencia entre los coeficientes supremos de los polinomios de Legendre. Puesto que $a_{00} = 1$ [relaciones (16.2)], se sigue que

$$
a_{11} = 1 \ , \quad a_{22} = \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2} \ , \quad a_{33} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} \ \ldots
$$

y en general

$$a_{nn} = \frac{(2n-1)!!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \ . \tag{16.8}$$

3) Derivando (16.1) respecto a $x$ se obtiene:

$$\boxed{xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)} \tag{16.9}$$

Derivando (16.5) respecto a $x$, y combinándola con (16.9) para eliminar el término en $P'_n(x)$:

$$\boxed{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)} \tag{16.10}$$

Restando (16.9) y (16.10):

$$\boxed{P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)} \tag{16.11}$$

## 16.3 Coeficientes del polinomio $P_n(x)$

Consideremos (16.1) y expandamos $\psi(x,s)$ en serie de Taylor:

$$\psi(x,s) = \frac{1}{\sqrt{1+(s^2-2sx)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (s^2-2sx)^k \ ,$$

donde

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)!}{k!(-\frac{1}{2}-k)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{k!(-\frac{1}{2}-k)!} \ .$$

Por su parte,

$$(s^2-2sx)^k = \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} s^{2\mu}(-2sx)^{k-\mu} \ ,$$

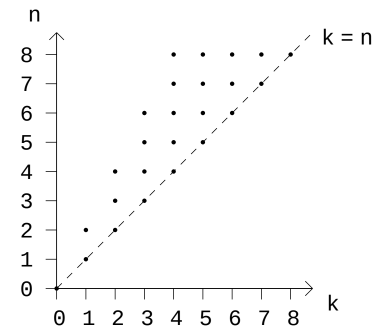
de modo que

$$\psi(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{k} \binom{-1/2}{k}\binom{k}{\mu} (-2x)^{k-\mu} s^{k+\mu} \ .$$

Sea $n = k+\mu$. Entonces

$$\psi(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{2k} \binom{-1/2}{k}\binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} s^{n} \ .$$

Deseamos intercambiar el orden de las sumas. Para ello observemos la siguiente figura:




Efectuar la doble suma equivale a sumar sobre los pares ordenados $(k, n)$ indicados con puntos en la figura. El orden en que se realizan las sumas corresponde a desplazarnos sobre el eje horizontal, escoger un valor de $k$, y luego desplazarnos sobre el eje vertical, recorriendo los valores de $n$ entre $n = k$ y $n = 2k$. Equivalentemente, podemos desplazarnos primero sobre el eje vertical, escoger un valor de $n$, y luego recorrer los puntos horizontalmente entre los límites $k = [(n+1)/2]$ y $k = n$. Así, la doble suma se puede escribir:

$$\psi(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} s^n \ ,$$

donde

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] \equiv \frac{n}{2} \qquad \text{si } n \text{ es par,}$$
$$\left[\frac{n+1}{2}\right] \equiv \frac{n+1}{2} \qquad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Comparando con (16.1), identificamos

$$P_n(x) = \sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n} \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} \ .$$

Definiendo $\mu = n - k$, el límite inferior de la suma corresponde a $\mu = n - [(n+1)/2] = [n/2]$, de modo que

$$P_n(x) = \sum_{\mu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{0} = \binom{-1/2}{n-\mu} \binom{n-\mu}{\mu} (-2)^{n-2\mu} x^{n-2\mu} \ ,$$

o bien

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{\mu}(2n-2\mu)!}{2^n (n-\mu)!(n-2\mu)!\mu!} x^{n-2\mu}} \qquad (16.12)$$

De (16.12) es fácil deducir que:

- $P_n(x)$ es par si $n$ es par.

- $P_n(x)$ es impar si $n$ es impar.

## 16.4 Fórmula de Rodrigues

Puesto que

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2(n-\mu)} = \frac{(2n-2\mu)!}{(n-2\mu)!}x^{n-2\mu} ,$$

(16.12) se puede reescribir en la forma:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{\mu=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^\mu \frac{1}{\mu!(n-\mu)!}\frac{d^n}{dx^n}x^{2(n-\mu)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{\mu=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^\mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu!)}x^{2(n-\mu)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n , \end{aligned}$$

obteniéndose la *fórmula de Rodrigues*:

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n} \tag{16.13}$$

La fórmula de Rodrigues nos permite demostrar fácilmente diversas propiedades de los polinomios de Legendre, como veremos en las siguientes secciones.

## 16.5 Ecuación diferencial de Legendre

Nos interesa ahora determinar la ecuación diferencial de la cual los polinomios de Legendre son solución. Sea

$$u(x) = (x^2-1)^n .$$

Entonces

$$\begin{aligned} u'(x) &= n(x^2-1)^{n-1}2x , \\ (x^2-1)u'(x) &= 2nx(x^2-1)^n = 2nxu(x) , \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x^2-1)u(x)\right] &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}2nxu(x) . \end{aligned}$$

Desarrollando las derivadas de productos a ambos lados de esta expresión:

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1}2xu^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{2}2u^{(n)}(x) = \\ 2nxu^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}2nu^{(n)}(x) ,$$

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x) + 2xu^{(n+1)}(x) - n(n-1)u^{(n)}(x) = 0 .$$

Luego, con (16.13), obtenemos la *ecuación diferencial de Legendre*:

$$\boxed{(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0} \tag{16.14}$$

## 16.6 Lugares nulos de $P_n(x)$

**Proposición 16.1** $P_n(x)$ tiene lugares nulos simples en el intervalo $(-1,1)$.

**Demostración** Sea $u(x) = (x^2-1)^n$. $u(x)$ tiene lugares nulos de multiplicidad $n$ en $x = \pm 1$, luego:

$$\begin{array}{l} u'(x) \text{ se anula una vez en } (-1,1) \\ u''(x) \text{ se anula dos veces en } (-1,1) \\ \qquad\qquad\vdots \\ u^{(n)}(x) \text{ se anula } n \text{ veces en } (-1,1) \end{array}$$

q.e.d.

## 16.7 Relación de ortogonalidad

Supongamos $0 \leq m < n$, y observemos que, por la fórmula de Rodrigues (16.13):

$$2^n n! \int_{-1}^{1} t^m P_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t^m u^{(n)}(t)\,dt \ ,$$

donde $u(t) = (t^2-1)^n$. Integrando por partes:

$$2^n n! \int_{-1}^{1} t^m P_n(t)\,dt = t^m u^{(n-1)}(t)\Big|_{-1}^{1} - m \int_{-1}^{1} t^{m-1} u^{(n-1)}(t)\,dt \ .$$

El término de borde es cero pues $u^{(m)}(\pm 1) = 0$ si $m < n$. Análogamente, integrando por partes $m$ veces:

$$2^n n! \int_{-1}^{1} t^m P_n(t)\,dt = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} u^{(n-m)}(t)\,dt = (-1)^m m!\, u^{(n-m-1)}(t)\Big|_{-1}^{1} = 0 \ .$$

Luego $P_n(x)$ es ortogonal a todo polinomio de grado $m < n$ en el intervalo $[-1,1]$, en particular a $P_m(x)$.

En el caso $m = n$, el producto interno entre los polinomios de Legendre es:

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} u^{(n)}(t) u^{(n)}(t)\,dt \ .$$

Integrando por partes:

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt = u^{(n)} u^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u^{(n+1)}(t) u^{(n-1)}(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} u^{(n+1)}(t) u^{(n-1)}(t)\,dt \ ,$$

pues el término de borde es nulo. Así, integrando por partes $n$ veces:

$$
\begin{aligned}
(2^n n!)^2 \int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt &= (-1)^n \int_{-1}^{1} u^{(2n)}(t)u(t)\,dt \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}}\left[(t^2-1)^n\right](t^2-1)^n\,dt \quad \text{usando: } \frac{d^{2n}}{dt^{2n}}\left[(t^2-1)^n\right] = (2n)! \\
&= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (-1)^n (1-t^2)^n\,dt \\
&= (2n)! \int_{-1}^{1} (1-t)^n (1+t)^n\,dt \ .
\end{aligned}
$$

Integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
(2^n n!)^2 \int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt &= (2n)! \left[ (1-t)^n \frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{1} + \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} (1-t)^{n-1}(1+t)^{n+1}\,dt \right] \\
&= (2n)! \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (1-t)^{n-1}(1+t)^{n+1}\,dt
\end{aligned}
$$

Análogamente, integrando por partes $n$ veces:

$$
\begin{aligned}
(2^n n!)^2 \int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt &= (2n)! \, \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \int_{-1}^{1} 1\cdot(1+t)^{2n}\,dt \\
&= (2n)!\, n! \frac{n!}{(2n)!} \frac{1}{2n+1}(1+t)^{2n+1}\Big|_{-1}^{1} \frac{(n!)^2\, 2^{2n+1}}{2n+1} \ .
\end{aligned}
$$

Obtenemos así la *relación de ortogonalidad*:

$$
\boxed{\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}} \tag{16.15}
$$

## 16.8 Expresiones integrales para $P_n(x)$

Sabemos, por el Teorema de Cauchy, que una función analítica se puede escribir en términos de una integral de contorno:

$$
f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du \ .
$$

Sea

$$
f(z) = \frac{1}{2^n\, n!}(z^2-1)^n \ .
$$

Entonces los polinomios de Legendre se pueden escribir en la forma:

$$
P_n(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \frac{1}{2^n\, n!} \oint \frac{(u^2-1)^n}{(u-z)^{n+1}}\,du \ ,
$$

obteniéndose la *fórmula de Schläfli*:

$$\boxed{P_n(z) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(u^2-1)^n}{(u-z)^{n+1}}\,du} \tag{16.16}$$

Integremos sobre una circunferencia de centro $z$ y radio $\rho$. Entonces

$$\begin{aligned} u &= z + \rho e^{i\phi}\ , \qquad 0 \leq \phi < 2\pi\ , \\ du &= i\rho e^{i\phi}\,d\phi = i(u-z)d\phi\ , \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{u^2-1}{u-z} &= \frac{z^2+2z\rho e^{i\phi}+\rho^2 e^{2i\phi}-1}{\rho e^{i\phi}} \\ &= \frac{1}{\rho}\left[(z^2-1)e^{-i\phi}+2z\rho+\rho^2 e^{i\phi}\right]\ , \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho^n}\left[(z^2-1)e^{-i\phi}+2z\rho+\rho^2 e^{i\phi}\right]^n i\,d\phi \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi}\left[(z^2-1)e^{-i\phi}+2z\rho+\rho^2 e^{i\phi}\right]^n\,d\phi\ . \end{aligned}$$

Si $z \neq \pm 1$ podemos tomar $\rho = \sqrt{z^2-1}$, con lo cual la relación anterior queda:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi}\left[\rho^2(e^{i\phi}+e^{-i\phi})+2z\rho\right]^n\,d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{\rho}\frac{(e^{i\phi}+e^{-i\phi})}{2}+\frac{2z\rho}{2\rho}\right]^n\,d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\rho\cos\phi+z\right]^n\,d\phi\ . \end{aligned}$$

Se obtiene así la *relación de Laplace*:

$$\boxed{P_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos\phi\right]^n\,d\phi} \tag{16.17}$$

Para $z = \pm 1$ tenemos simplemente

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n\ .$$

**Corolario** $|\,P_n(x)\,| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\ , \quad \forall x \in [-1,1]\ .$

**Demostración** Sea $x \in [-1,1]$. Adoptamos la convención de que la raíz cuadrada es un número positivo, y escribimos

$$\sqrt{x^2-1} = i\sqrt{1-x^2}\ .$$

El integrando en (16.17) satisface:

$$\left| x + i\sqrt{1-x^2}\cos\phi \right|^2 = x^2 + (1-x)^2\cos^2\phi \leq x^2 + 1 - x^2 = 1 \ ,$$

luego

$$\left( \left| x + i\sqrt{1-x^2}\cos\phi \right|^2 \right)^{n/2} \leq 1 \ .$$

Así,

$$|\, P_n(x) \,| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| x + i\sqrt{1-x^2}\cos\phi \right|^n \, d\phi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi = 1 \ .$$

q.e.d.

Poniendo $z = \cos\theta$ en (16.17), $\sqrt{z^2-1} = i \operatorname{sen}\theta$, y se obtienen la representación adicional:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^n \, d\phi \ ,$$

$$\boxed{P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^n \, d\phi} \tag{16.18}$$

## 16.9 Serie de Legendre

Los polinomios de Legendre, siendo ortonormales en $[-1,1]$, son candidatos a ser una base en ese intervalo, de modo que una función arbitraria podría ser escrita como una combinación lineal de los $P_n$. Estudiemos esta posibilidad.

Si la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$ converge uniformemente en $[-1,1]$ y representa allí a $f(x)$, es decir,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) \ ,$$

entonces

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_{-1}^{1} P_\nu(x)P_n(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \delta_{\nu n}\frac{2}{2n+1} = \frac{2a_n}{2n+1} \ .$$

Entonces los *coeficientes de Fourier* de $f(x)$ respecto a los polinomios de Legendre están dados por:

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx \ . \tag{16.19}$$

A la inversa: Sea $f(x)$ una función dada, acotada y seccionalmente continua en $[-1,1]$. Entonces se pueden calcular los coeficientes de Fourier $a_\nu$ respecto a $P_\nu$ y construir la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) \ .$$

¿Converge la serie? Si converge, ¿representa a $f(x)$?

Para saberlo, tomemos el módulo de (16.19):

$$|\, a_n \,| \leq \left(n+\frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} |\, f(x) \,|\, |\, P_n(x) \,|\; dx \ .$$

Sea $M = \max_{x\in[-1,1]} |\, f(x) \,|$. Como $|\, P_n(x) \,| \leq 1$,

$$|\, a_n \,| \leq \left(n+\frac{1}{2}\right) 2M = (2n+1)M \ .$$

Por otra parte, si $f'$ existe y es continua en $[-1,1]$, entonces para $n>0$ se tiene

$$a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \ .$$

Integrando por partes,

$$a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right) \left[ f(x) \int_{-1}^{x} P_n(x')\, dx' \bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x) \int_{-1}^{x} P_n(x')\, dx'\, dx \right] \ .$$

Pero, de la relación de recurrencia (16.10),

$$\int_{-1}^{x} P_n(x')\, dx' = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] \ ,$$

con lo cual

$$a_n = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f'(x) [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]\, dx \ .$$

Así,

$$|\, a_n \,| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |\, f'(x) \,| \left(|\, P_{n+1}(x) \,| + |\, P_{n-1}(x) \,|\right) \, dx \leq \int_{-1}^{1} |\, f'(x) \,| \; dx \equiv 2M' \ ,$$

donde

$$M' = \max_{x\in[-1,1]} |\, f'(x) \,| \ .$$

Realizando el mismo procedimiento suponiendo que $f''$ es seccionalmente continua en $[-1,1]$ se obtiene que

$$|\, a_n \,| \simeq \frac{1}{n^2} A \ ,$$

para $n$ suficientemente grande, y $A$ cierta constante. Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n \,|$ converge, luego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge uniformemente.

Ahora nos preguntamos: Dada una función $f$, calculamos los coeficientes $a_n$ y sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge uniformemente. ¿Representa esta serie de Legendre la función $f(x)$? Para responder, consideremos la diferencia entre la serie y la función $f(x)$:

$$g(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) \ .$$

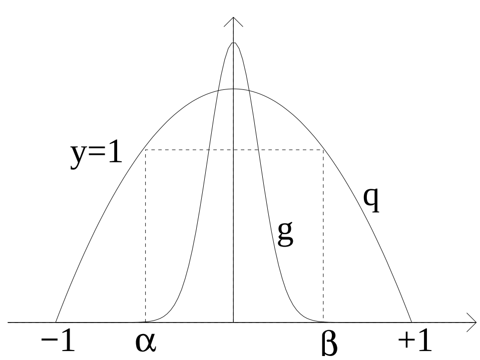
Los coeficientes de Fourier de $g(x)$ son:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} g(x) P_n(x)\, dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_{-1}^{1} P_\nu(x) P_n(x)\, dx\right] \\ &= a_n - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \delta_{n\nu} = 0 \ . \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$g(x) \equiv 0 \ .$$

**Demostración** Supongamos que $g(x) \neq 0$ en un intervalo $[\alpha, \beta] \in [-1, 1]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos además que $g(x) > 0$ en este intervalo. Sea $q(x)$ un polinomio de grado dos tal que $q(\alpha) = q(\beta) = 1$ y $q(x) < 1$ en $[-1, \alpha] \cup [\beta, 1]$. Gráficamente:




Luego

$$\int_{-1}^{1} g\, q^k \xrightarrow[k \gg 1]{} \int_{\alpha}^{\beta} g\, q^k > 0 \ .$$

Pero $g(x)$ es ortogonal a todos los polinomios $P_n(x)$, y por tanto a todo polinomio, luego

$$\int_{-1}^{1} g\, q^k = 0 \ ,$$

lo que contradice nuestro resultado anterior.

Por lo tanto $g(x) \equiv 0$.

q.e.d.

Luego,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) \ .$$

## 16.10 Funciones asociadas de Legendre

Una manera de obtener la ecuación asociada de Legendre es partir de la ecuación regular de Legendre (16.14)

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \ , \tag{16.14}$$

y con la ayuda de la fórmula de Leibniz, para la derivada $n$-ésima de un producto de funciones,

$$\frac{d^n}{dx^n}[A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{(n-s)!s!} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x) \ , \tag{16.20}$$

diferenciarla $m$ veces obteniendo:

$$(1-x)^2 u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0 \ , \tag{16.21}$$

donde

$$u(x) \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \ .$$

Reemplazando

$$\psi(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \ ,$$

resolviendo para $u$ y diferenciando,

$$\begin{aligned} u' &= \left( \psi' + \frac{mx\psi}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{-m/2} \ , \\ u'' &= \left[ \psi'' + \frac{2mx\psi'}{1-x^2} + \frac{m\psi}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2\psi}{(1-x^2)^2} \right] (1-x^2)^{-m/2} \ . \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (16.21), encontramos que $\psi$ satisface la ecuación diferencial

$$\boxed{(1-x^2)\ \psi'' - 2x\ \psi' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \psi = 0 \ .} \tag{16.22}$$

La cual es conocida como *la ecuación asociada de Legendre*. Para reobtener la ecuación de Legendre (16.14) basta tomar $m = 0$. Haciendo el cambio de variable $x = \cos\theta$, obtenemos la ecuación expresada en coordenadas polares, que es la forma usual en que nos la vamos a encontrar

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\psi}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\psi=0\ . \tag{16.23}$$

Las soluciones regulares, denotadas por $P_n^m(x)$, son:

$$\psi(x)=P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\ . \tag{16.24}$$

Ocasionalmente los $P_n^m(x)$ aparecen en su definición con un factor $(-1)^m$, por ejemplo en *Classical Electrodynamics, Second Edition* de J.D. Jackson, esta elección es conocida como fase de Magnus y Oberhettinger o de Condon y Shortley. Nosotros incluiremos esta fase en la definición de los armónicos esféricos, al estilo seguido en *Mathematical Methods for Physicists, Fourth Edition* de G.B. Arfken y H.J. Weber. A pesar de que el factor de fase se introduce en distintos puntos de las definiciones los armónicos esféricos resultates son iguales.

Algunos ejemplos de funciones asociadas de Legendre

$$\begin{aligned}
P_1^1(x)&=(1-x^2)^{1/2}=\operatorname{sen}\theta\ ,\\
P_2^1(x)&=3x\,(1-x^2)^{1/2}=3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\ ,\\
P_2^2(x)&=3\,(1-x^2)=3\operatorname{sen}^2\theta\ ,\\
P_3^1(x)&=\frac{3}{2}\,(5x^2-1)\ (1-x^2)^{1/2}=\frac{3}{2}(5\cos^2\theta-1)\operatorname{sen}\theta\ ,\\
P_3^2(x)&=15x\ (1-x^2)=15\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\ ,\\
P_3^3(x)&=15\ (1-x^2)^{3/2}=15\operatorname{sen}^3\theta\ ,\\
P_4^1(x)&=\frac{5}{2}\,(7x^3-3x)\ (1-x^2)^{1/2}=\frac{5}{2}(7\cos^3\theta-3\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\ ,\\
P_4^2(x)&=\frac{15}{2}\,(7x^2-1)\ (1-x^2)=\frac{15}{2}(7\cos^2\theta-1)\operatorname{sen}^2\theta\ ,\\
P_4^3(x)&=105x\ (1-x^2)^{3/2}=105\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta\ ,\\
P_4^4(x)&=105\ (1-x^2)^2=105\operatorname{sen}^4\theta\ .
\end{aligned} \tag{16.25}$$

La relación entre $P_n^m$ y $P_n^{-m}$ es:

$$P_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(x)\ . \tag{16.26}$$

La función generatriz de las funciones asociadas de Legendre

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_{\nu+m}^m(x)t^\nu\ . \tag{16.27}$$

Las relaciones de recurrencia que satisfacen las funciones asociadas de Legendre

$$P_n^{m+1}-\frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^m+[n(n+1)-m(m-1)]P_n^{m-1}=0\ , \tag{16.28}$$

$$(n+m)P_{n-1}^m+(n-m+1)P_{n+1}^m=(2n+1)xP_n^m\ , \tag{16.29}$$

$$\frac{1}{2}P_n^{m+1}-\frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}=(1-x^2)^{1/2}P_n^{m\prime}\ , \tag{16.30}$$

$$
\begin{aligned}
(2n+1)(1-x^2)^{1/2}P_n^m &= P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m-1} \ , \qquad (16.31)\\
&= (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1} \\
&\qquad -(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1} \ . \qquad (16.32)
\end{aligned}
$$

La relación de paridad satisfecha por las funciones asociadas de Legendre es

$$
P_n^m(-x) = (-1)^{n+m}P_n^m(x) \ . \qquad (16.33)
$$

Además, se satisface en los extremos que

$$
P_n^m(\pm 1) = 0 \qquad \text{para } m \neq 0. \qquad (16.34)
$$

Las funciones asociadas de Legendre satisafacen distintas relaciones de ortogonalidad dependiendo sobre cual índice se tomen. La primera:

$$
\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_q^m(x)\,dx = \frac{2}{2q+1}\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\,\delta_{p\,q} \ , \qquad (16.35)
$$

en coordenadas polares

$$
\int_{0}^{\pi} P_p^m(\cos\theta)P_q^m(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{2}{2q+1}\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\,\delta_{p\,q} \ . \qquad (16.36)
$$

Sobre el otro índice

$$
\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_n^k(x)(1-x^2)^{-1}\,dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}\delta_{m\,k} \ . \qquad (16.37)
$$

## 16.11 Armónicos esféricos

En la separación de variable de la ecuación de Laplace, en la dependencia espacial de la ecuación de onda, en la ecuación de Schrödinger tiempo independiente para un campo de fuerzas centrales aparecen ecuaciones del tipo

$$
\nabla^2\Psi + k^2 f(r)\Psi = 0 \ . \qquad (16.38)
$$

La dependencia angular, viniendo enteramente del operador laplaciano, es

$$
\frac{\Phi(\phi)}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \frac{\Theta(\theta)}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + n(n+1)\Theta(\theta)\Phi(\phi) = 0 \ . \qquad (16.39)
$$

Una constante de separación de la forma $n(n+1)$ con $n$ un entero asegura que la solución en serie de la ecuación de Legendre llege a ser un polinomio. De otra manera ambas soluciones en serie divergen en $\cos\theta = \pm 1$. La dependencia azimutal satisface

$$
\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = m^2 \ , \qquad (16.40)
$$

con soluciones

$$\Phi(\phi) = \left\{e^{-im\phi}, e^{im\phi}\right\} \ . \tag{16.41}$$

Las cuales satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} {\Phi^*}_{m_1}(\phi)\Phi_{m_2}(\phi)\, d\phi = \int_0^{2\pi} e^{-im_1\phi} e^{im_2\phi}\, d\phi = 2\pi\delta_{m_1 m_2} \ . \tag{16.42}$$

En la mayoría de los problemas físicos requerimos que $m$ sea un entero para que $\Phi(\phi)$, sea una función monovaluada del ángulo azimutal. Dada la relación (16.42)

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \ , \tag{16.43}$$

es un conjunto de funciones ortonormales con respecto a la integración sobre el ángulo azimutal $\phi$. Separando la dependencia azimutal, la dependencia en el ángulo polar $\theta$ conduce a una ecuación asociada de Legendre

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0 \ . \tag{16.44}$$

La cual es satisfecha por las funciones asociadas de Legendre, esto es, $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos\theta)$. Para incluir valores megativos $m$, nosotros usamos la fórmula de Rodrigues en la definición de $P_n^m(\cos\theta)$.

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n \ , \quad -n \le m \le n \ . \tag{16.45}$$

Normalizando las función asociadas de Legendre

$$\mathcal{P}_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m(\cos\theta) \ , \quad -n \le m \le n \ . \tag{16.46}$$

La función $\Phi_m(\phi)$ es ortonormal con respecto al ángulo azimutal $\phi$, puesto que la función $\mathcal{P}_n^m(\cos\theta)$ es ortonormal con respecto al ángulo polar $\theta$. Nosotros tomamos el producto de ambas y definimos los *armónicos esféricos*:

$$Y_{nm}(\theta,\phi) = Y_n^m(\theta,\phi) \equiv (-1)^m\sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \ , \tag{16.47}$$

obteniendo funciones en los dos ángulos, las cuales son ortonormales sobre la superficie esférica. La integral completa de ortogonalidad

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1\,*}(\theta,\phi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\phi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi = \delta_{n_1\, n_2}\delta_{m_1\, m_2} \ , \tag{16.48}$$

o bien,

$$\int_{4\pi} Y_{n_1}^{m_1\,*}(\Omega) Y_{n_2}^{m_2}(\Omega) d\Omega = \delta_{n_1\, n_2}\delta_{m_1\, m_2} \ , \tag{16.49}$$

donde $\Omega$ es el ángulo sólido.

A continuación, una lista de los primeros armónicos esféricos:

$$
\begin{aligned}
Y_0^0(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \\
Y_1^1(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta e^{i\phi} \ , \\
Y_1^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \ , \\
Y_1^{-1}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi} \ , \\
Y_2^2(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\operatorname{sen}^2\theta e^{2i\phi} \ , \\
Y_2^1(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{i\phi} \ , \\
Y_2^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right) \ , \\
Y_2^{-1}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{-i\phi} \ , \\
Y_2^{-2}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\operatorname{sen}^2\theta e^{-2i\phi} \ .
\end{aligned}
\tag{16.50}
$$

Parte de la importancia de los armónicos esféricos yace en la propiedad de completitud. Esta propiedad, en este caso, significa que cualquier función $f(\theta,\phi)$, con las suficientes propiedades de continuidad, evaluada sobre la superficie de la esfera puede ser expandida en una uniformemente convergente doble serie de armónicos esféricos, conocida como serie de Laplace,

$$
f(\theta,\phi) = \sum_{m,n} a_{mn} Y_n^m(\theta,\phi) \ . \tag{16.51}
$$

Si $f(\theta,\phi)$ es conocida, los coeficientes pueden ser inmediatamente encontrados por el uso de la integral de ortogonalidad (16.48).

Una propiedad importante que satisfacen los armónicos esféricos es:

$$
Y_n^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y_n^{m*}(\theta,\phi) \ . \tag{16.52}
$$

Consideremos a continuación dos direcciones en coordenadas polares esféricas en un espacio tridimensional, $(\theta_1,\phi_1)$ y $(\theta_2,\phi_2)$. El ángulo entre las dos direcciones lo denotamos $\gamma$. Este ángulo satisface la siguiente identidad trigonométrica

$$
\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2) \ . \tag{16.53}
$$

El *teorema de adición para los armónicos esféricos* afirma que

$$
P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}(-1)^m Y_n^m(\theta_1,\phi_1) Y_n^{-m}(\theta_2,\phi_2) \ , \tag{16.54}
$$

o equivalentemente

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(\theta_1,\phi_1)Y_n^{m*}(\theta_2,\phi_2) \ . \tag{16.55}$$

En términos de los polinomios de Legendre

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta_1)P_n(\cos\theta_2) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_1)P_n^m(\cos\theta_2)\cos m(\phi_1-\phi_2) \ . \tag{16.56}$$

La ecuación (16.53) es un caso especial de la ecuación (16.56).

## 16.12 Segunda solución de la ecuación de Legendre

Los polinomios de Legendre son solución de la ecuación diferencial (16.14). Pero ésta es una ecuación de segundo grado, y por tanto debe existir otra solución, linealmente independiente a los $P_n(x)$. La encontraremos observando que los polinomios de Legendre son un caso particular de la función hipergeométrica. En efecto, consideremos la ecuación hipergeométrica general:

$$\begin{aligned} &W'' + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-A} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-B} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-C}\right)W' \\ &-\left(\frac{\alpha\alpha'}{(z-A)(B-C)} + \frac{\beta\beta'}{(z-B)(C-A)} + \frac{\gamma\gamma'}{(z-C)(A-B)}\right)\frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{(z-A)(z-B)(z-C)}W = 0\,, \end{aligned}$$

con soluciones

$$P\left\{\begin{matrix} A & B & C & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} \ .$$

Considerando el caso particular

$$\begin{gathered} A=-1\ , \qquad B=1\ , \qquad C=\infty\ , \\ \alpha=\alpha'=0\ , \quad \beta=\beta'=0\ , \quad \gamma=-n\ , \quad \gamma'=n+1\ , \end{gathered} \tag{16.57}$$

que satisface la condición $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$, la ecuación hipergeométrica queda

$$W'' + \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right)W' - \frac{n(n+1)}{(z+1)(z-1)}W = 0\ ,$$

es decir

$$\boxed{(z^2-1)W'' + 2zW' - n(n+1)W = 0} \tag{16.58}$$

que es la *ecuación diferencial de Legendre* ya encontrada en (16.14).

Los polinomios de Legendre se pueden escribir entonces como la función

$$P_n(z) = P \left\{ \begin{matrix} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -n & z \\ 0 & 0 & n+1 & \end{matrix} \right\} . \tag{16.59}$$

Para encontrar una base, planteamos para la otra solución:

1. Si $W_1 = P_n(x)$, entonces

$$W_2(x) = P_n(x) \int_{x_0}^{x} u(x')\, dx' .$$

2. Desarrollo con centro en 1, véase base canónica.

3. Desarrollo con centro en 0 [corresponde a] series de Taylor.

   $W(0) \neq 0$, $W'(0) = 0$, si $n$ es par resulta $P_n$ (salvo constante).

   $W(0) = 0$, $W'(0) \neq 0$, si $n$ es impar resulta $P_n$ (salvo constante).

4. A fin de tener algo univalente en $|\, z \,| > 1$ consideremos

$$\boxed{Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{z-t}\, dt} \tag{16.60}$$

$Q_n(z)$ satisface la ecuación diferencial de Legendre. En efecto,

$$\begin{aligned} (z^2-1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) &= \int_{-1}^{1} (z^2-1) \frac{P_n(t)}{(z-t)^3}\, dt - \int_{-1}^{1} z \frac{P_n(t)}{(z-t)^2}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left[ \frac{t^2-1}{(z-t)^3} + \frac{t(z-t)}{(z-t)^3} \right] P_n(t)\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} (t^2-1) P_n(t) \cdot \frac{dt}{(z-t)^3} + \int_{-1}^{1} \frac{tP_n(t)}{(z-t)^2}\, dt . \end{aligned}$$

Integrando por partes la primera integral:

$$\begin{aligned} (z^2-1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) &= \left[ (t^2-1)P_n(t) + \frac{1}{2(z-t)^2} \right] \Bigg|_{-1}^{1} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} \left[ (t^2-1)P_n'(t) + 2tP_n(t) \right] \frac{dt}{2(z-t)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{tP_n(t)}{(z-t)^2}\, dt \\ &= - \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)P_n'(t)}{2(z-t)^2}\, dt . \end{aligned}$$

Integrando nuevamente por partes:

$$(z^2-1)Q_n''(z)+2zQ_n'(z)=\left[(t^2-1)P_n'(t)\frac{1}{2(z-t)}\right]\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(t^2-1)P_n''(t)+2tP_n'(t)}{z-t}\,dt\ .$$

Luego

$$\begin{aligned}(z^2-1)&Q_n''(z)+2zQ_n'(z)+n(n+1)Q_n(z)\\ &=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(t^2-1)P_n''(t)+2tP_n'(t)+n(n+1)P_n(t)}{z-t}\,dt\ .\end{aligned}$$

Pero el integrando es precisamente la ecuación de Legendre, que es satisfecha por los $P_n$, luego el integrando es cero y

$$(z^2-1)Q_n''(z)+2zQ_n'(z)+n(n+1)Q_n(z)=0\ . \tag{16.61}$$

Las funciones $Q_n(z)$ son la *segunda solución de la ecuación de Legendre.* (16.60) se puede reescribir:

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)I(z)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}Q_n^*(z,t)\,dt\ , \tag{16.62a}$$

con

$$I(z)=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{z-t}\ , \tag{16.62b}$$

$$Q_n^*(z,t)=\frac{P_n(z)-P_n(t)}{z-t}\ . \tag{16.62c}$$

Se tiene

$$I(z)=-\ln(z-t)\Bigg|_{t=-1}^{t=1}=\ln(z+1)-\ln(z-1)=\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\ ,$$

que es univaluado en todo el plano complejo, salvo en la recta $-1\le z\le 1$, luego

$$I(z)=\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\ , \quad \text{salvo en } -1\le z\le 1. \tag{16.63}$$

El numerador de $Q_n^*$ es un polinomio de grado $n$, y su denominador es un polinomio de grado 1. Se puede mostrar que $Q_n^*$ es un polinomio de grado $n-1$ en $t$ y $z$. Así, la segunda integral en (16.62a) es un polinomio en $z$ de grado $n-1$. Finalmente,

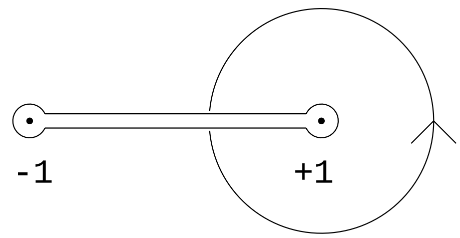
$$Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-q_n(z)\ , \tag{16.64}$$

con $q_n(z)$ un polinomio de grado $n-1$ con coeficientes reales.

Para $-1<\xi<1$, (16.64) nos permite afirmar que

$$Q_n(\xi+0i)=Q_n(\xi-0i)-\pi iP_n(\xi)\ . \tag{16.65}$$

Basta considerar el circuito en torno al polo en $z=1$:




**Afirmación** Si $x$ es real, $|x| > 1$, entonces $Q_n(x) \in \mathbb{R}$.

**Demostración** Basta observar que el argumento del logaritmo en (16.64) es siempre positivo, pues el numerador y el denominador son positivos (negativos) si $x > 1$ $(x < 1)$.

q.e.d.

Denominamos a las soluciones $Q_n$ de la ecuación de Legendre, *funciones de Legendre de segunda especie.*

De las expresiones explícitas (16.62a), (16.62c) y (16.64), notamos que

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \ , \tag{16.66}$$

$$Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 1 \ . \tag{16.67}$$

Podemos utilizar (16.60) para encontrar una expansión en serie para $Q_n$. En efecto,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2z}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-\frac{t}{z}} P_n(t)\, dt \ .$$

Si $|z| > 1$,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2z}\sum_{\nu=n}^{\infty}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t}{z}\right)^{\nu} P_n(t)\, dt \ .$$

Observemos que todos los términos con $\nu < n$ en la suma son cero, debido a la ortogonalidad de $P_n(t)$ y $t^\nu$. Obtenemos así

$$Q_n(z) = \frac{b_{n+1}}{z^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{z^{n+2}} + \cdots \ ,$$

con

$$b_\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{\mu-1} P_n(t)\, dt \ .$$

En particular,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{n} P_n(t)\, dt \ .$$

Como

$$P_n(t) = \frac{1\cdot 3\cdots (2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\, t^n + \cdots \ ,$$

se tiene, dada la ortogonalidad de $P_n(t)$ con polinomios de grado menor que $n$,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdots (2n-1)} \int_{-1}^{1} P_n(t)P_n(t)\, dt = \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdots (2n-1)}\,\frac{2}{2n+1} \ .$$

Es decir,

$$b_{n+1} = \frac{n!}{(2n+1)!!} \ .$$

Obtengamos una relación de recurrencia para $Q_n(z)$. En general,

$$\lim_{|\,z\,|\to\infty} z^n Q_n(z) = 0 \ , \quad n = 0, 1 \ldots$$

Sea $n \geq 1$.

$$(n+1)Q_{n+1} - z(2n+1)Q_n + nQ_{n-1} =$$
$$\frac{1}{2}[(n+1)P_{n+1} - z(2n+1)P_n + nP_{n-1}] \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - (\text{polinomio}) \ .$$

El factor entre paréntesis cuadrados es cero. Sea $|\,z\,| \to \infty$. Entonces

$$0 = \lim_{|\,z\,|\to\infty} -(\text{polinomio}) \ ,$$

luego el polinomio es nulo. Por tanto, para todo $z$,

$$\boxed{(n+1)Q_{n+1} - z(2n+1)Q_n + nQ_{n-1} = 0} \tag{16.68}$$

**Ejemplo** Sea $z \notin [-1, 1]$. Entonces

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t) \ ,$$

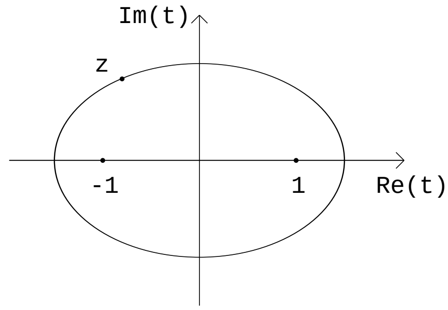
al menos en $-1 \leq t \leq 1$. Los coeficientes de la expansión están dados por

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{z-t}\, dt = (2n+1)Q_n(z) \ ,$$

luego

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(t)Q_n(z) \ . \tag{16.69}$$

**Afirmación** (**Sin demostración**) El desarrollo (16.69) es válido en el interior de la elipse con focos en $\pm 1$ que pasa por $z$:




## 16.13 Problema de Sturm-Liouville asociado

Podemos escribir la ecuación de Legendre en la forma

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0\ , \tag{16.70}$$

con la condición de borde

$$y(\pm 1)\ \text{finito}\ . \tag{16.71}$$

Esto corresponde a un problema de autovalores de un operador diferencial autoadjunto, y resulta ser relevante en situaciones de interés físico. Al buscar soluciones no triviales se encuentra que los autovalores deben satisfacer

$$\lambda=-n(n+1)\ , \quad n\in\mathbb{Z}\ , \tag{16.72}$$

y que las soluciones corresponden a los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, pues los $Q_n(x)$ no satisfacen la condición de borde impuesta.