

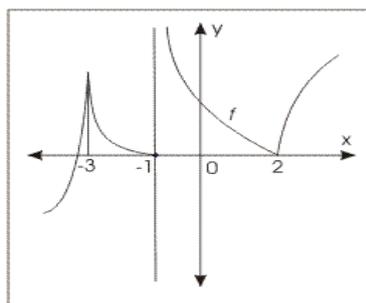
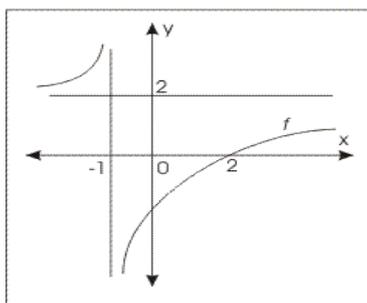
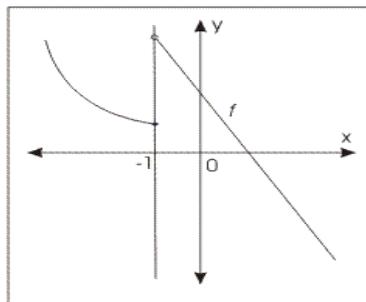
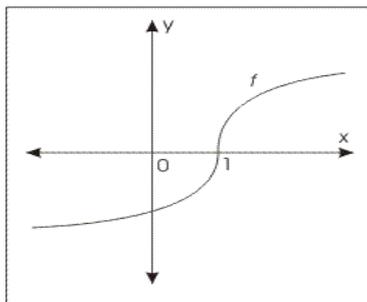
MATEMÁTICA I

EJE ESTRUCTURAL No. IV: "DERIVADA Y DIFERENCIAL"

SERIE DE EJERCICIOS 4

A partir de los siguientes gráficos de la función $f(x)$:

- a) Hallar, si existe, un x_0 tal que $f'(x_0) > 0$ y un x_1 tal que $f'(x_1) < 0$.
- b) Determinar en cada caso los puntos donde la función no es derivable. Explicar por qué.



2. Dadas las siguientes funciones, calcular mediante el estudio del cociente incremental, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$:

- | | |
|---------------------------------|--|
| a. $f(x) = 2x - 1$ en $P(2;3)$ | d. (P) $f(x) = x^3 + 4$ en $P(1;5)$ |
| b. $f(x) = 5$ en $P(3;5)$ | e. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en $P(3;2)$ |
| c. $f(x) = (x-1)^2$ en $P(3;4)$ | |

3. a. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = f(x)$ en el punto P para cada una de las funciones definidas en el ejercicio 2. Hacer un gráfico de la función y de las rectas halladas en cada caso.

(P) b. En que puntos tiene tangente horizontal la gráfica de: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

4. El desplazamiento (en metros) experimentado por un móvil está dado por la fórmula: $s(t) = 4t^2 + 3t$. Hallar la velocidad instantánea cuando $t = 2$ s.

5. Trazar el gráfico de la función continua $f: [-5; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumpla con los siguientes requisitos:

$$\begin{aligned} f(-4) &= 2 & ; & & f'(-4) &= 0 & ; & & f(-1) &= 1 & ; & & f'(-1) &= 1 \\ f(-2) &= -1 & ; & & f'(-2) &= \cancel{1} & ; & & f(1) &= 3 & ; & & f'(1) &= 2 \end{aligned}$$

6. Aplicando la definición, calcular la derivada de las siguientes funciones:

- a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$; b. $f(x) = x^3 - 2$; c. $f(x) = \frac{1}{x}$; d. $f(x) = (x+3)^2$
 e. (P) $f(x) = \sqrt{x}$

7. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

- a. $f(x) = 4\sqrt{x} + \ln x - x^3 + 3$; b. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \pi^x - \frac{2}{3}$;
 c. $f(x) = e - \ln x + x \ln 3 - \frac{3}{4}\sqrt{x}$ d. $f(x) = x^5 \cdot \ln x$; e. (P) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^5 - x)$
 f. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$; g. $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$; h. $f(x) = \frac{1+3^x}{1-x^3}$; i. $f(x) = e^x \cos x$
 j. $g(x) = \text{sen} x (\cos x - 1)$; k. $f(x) = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$

8. Hallar la derivada de las funciones compuestas:

a. $f(x) = (x^3 + 2)^4$	b. $f(x) = \sqrt{(x^3 + 3)^2 + 1}$	c. $f(x) = \ln(3x^2 + 2) - x$
d. $f(x) = (2 - 3x^2) \cdot \sqrt{1 + 4x^2}$	e. (P) $f(t) = [\sqrt{t^2 + 3} - \ln(2t)]^4$	f. (P) $f(w) = \text{sen}\left(\frac{3}{4}w^3\right)$
g. $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln(1 + x)$	h. $f(z) = \ln(e^{-\text{sen} z} + 1)$	i. $f(t) = \frac{2 - t^2 + 3t}{2 + t^2 - 3t}$
j. $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2$	k. (P) $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^3}$	l. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{5+x}{5-x}}$
m. $f(w) = e^{3w \ln w}$	n. (P) $f(x) = 4x^{\frac{\ln x}{x^2}}$	ñ. $f(x) = x^8 \cdot 3^x$
o. $f(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x}$	p. $f(z) = \sqrt{1 + \cos^2 z}$	q. $f(x) = \ln(x \cdot \sqrt{x^2 - 1})$
r. (P) $f(z) = \ln\left(\frac{z^2}{z-1}\right)$	s. $f(x) = \left[\frac{e^{2x} - x}{2x}\right]^4$	t. $f(x) = [\ln(x^2 + 6x + 1)]^9$
u. $f(x) = 5^{(x^2-1) \cdot (x+1)^2}$	v. (P) $f(t) = 2^{\cos(t^2)}$	w. $f(z) = \text{sen}^2(z^3 + 5z^2)$

9. Derivar y valuar las siguientes funciones implícitas:

a. $3x^2 - 2xy + y - 3 = 0$ en $(1; 0)$ b. **(P)** $xy^2 + 4\sqrt{x} - 4y - x = 0$ en $(1; 3)$

c. $\frac{y}{x} + y^3 - x^2 = 5$ en $(-1; 2)$ d. $y^5x^5 - x^2y^2 = 1$ en $(2; 3)$

(P)

e. $3(x^2 + y^2) = 100xy$ en $(1; 2)$

. Calcular $f''(-1)$ de las siguientes funciones: a. $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$; b. $f(x) = e^{2-x^3}$

ESTUDIO DE FUNCIONES

11. Para las siguientes funciones determinar: a) Dominio; b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento; c) Máximos y mínimos

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$; b. $f(x) = x^2(2-x)^2$; c. **(P)** $f(z) = \sqrt{9-z^2}$

12. Para las siguientes funciones determinar: a) Puntos de inflexión ; b) Intervalos de concavidad y convexidad

a. $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 6x - 3$; b. $f(t) = \frac{4t-1}{t+2}$; c. **(P)** $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

13. Para las siguientes funciones determinar: a) Dominio ; b) Máximos y mínimos locales ; c) Puntos de Inflexión ; d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento ; e) Intervalos de concavidad ; f) Intervalos de positividad y negatividad; g) Gráfica de la función.

a. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; b. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$; c. $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2$

d. **(P)** $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 - 3)$

14. Realizar el estudio completo y las gráficas aproximadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \ln(1+x)$; b. $f(x) = x \cdot (12-2x)^2$; c. $f(x) = \frac{-2}{x+1} + 1$; d. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

e. $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$; f. **(P)** $f(x) = x \cdot e^x$; h. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$; g. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS

15. Entre los pares de números cuya suma es 30, encontrar aquellos dos cuyo producto es máximo.
16. Con un alambre tejido de 3.600 metros de largo, se quiere alambrar un terreno rectangular con un lado sobre el río. ¿Cuáles son las dimensiones para que su área sea máxima?
17. Se quiere fabricar latas cerradas cilíndricas de 250 cm^3 de volumen. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lata para que su superficie sea mínima?.
18. Dada una hoja cuadrada de lado 18 cm, determinarlas dimensiones de la caja de volumen máximo y de base cuadrada que con ella se puede construir.

DIFERENCIAL

21. Calcular, utilizando diferenciales, el valor aproximado de: a) $(3,05)^3$; b) $\sqrt[4]{82}$
22. Calcular la variación aproximada de $f(x) = x^4 - x$ cuando "x" varía de 2 a 2.15.
23. (P) Dado un bloque de acero de forma cúbica cuyo volumen es de 125 cm^3 con un error tolerado de $0,01 \text{ cm}^3$, ¿Cuál es el error que se puede cometer en la medición de la longitud de la arista del bloque?.
24. Se desea fabricar discos de acero circulares de un radio de 8 cm con un error tolerado de 0.01 cm^2 en el área, ¿Cuál es el error en el radio?.