Microeconomía I Prof. Enrique Kawamura
Problemas Prácticos V. Equilibrio competitivo general.

1. Sea una economía con los agentes A y B vistos en el primer ejemplo, donde $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = x_1^A x_2^A$ y $u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = x_1^B x_2^B$. Sean las dotaciones agregadas ω_1 y ω_2 respectivamente.
   (a) Considere el problema de maximizar $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right)$ sujeto a $u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \bar{u}^B$ y que $x_l^A + x_l^B = \omega_l$, con $l = 1, 2$. Obtenga las CPO de este problema.
   (b) Obtenga las CSO de este problema y demuestre que se cumplen.
   (c) De las CPO demuestre que
   $$x_2^A = \frac{\omega_2}{\omega_1} x_1^A$$
   (d) Reemplazando en la restricción, obtenga x_1^{A*} y x_2^{A*} como función de ω_1, ω_2 y $\bar{u}^B$.
   (e) Reemplazando x_1^{A*} y x_2^{A*} en la función de utilidad de A, obtenga la utilidad máxima de A dados ω_1, ω_2 y $\bar{u}^B$.
   (f) Supongamos $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Derive la utilidad máxima de A con respecto a $\bar{u}^B$. ¿Es negativa esta deriada? Derive por segunda vez con respecto a $\bar{u}^B$. ¿Qué signo tiene esta derivada segunda?

2. Considere el ejemplo de no-existencia del equilibrio visto en la clase magistral del 27/5/04. Suponga las mismas preferencias para B y para A suponga las preferencias dadas por $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \left(x_1^A\right)^2 + \left(x_1^B\right)^2$. Muestre si en este caso es cierto que puede no existir el equilibrio competitivo sigiuendo los mismos pasos del problema visto en clase.

3. Considere el ejemplo de no-existencia del equilibrio visto en la clase magistral del 27/5/04. Suponga las mismas preferencias para B y para A suponga las preferencias dadas por $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = x_1^A + x_2^A$. Demuestre que ahora debe existir el equilibrio competitivo para los mismos valores de (ω_1^i, ω_2^i) asumidos en la clase magistral. ¿Cuál es el precio p^* de equilibrio?

4. Este ejercicio constituye una aplicación del método de equilibrio general al estudio de la determinación de la tasa de interés de equilibrio entre dos países con flujo de capitales. Supongamos una economía que dura dos períodos, $t = 0, 1$ y en la que hay dos países, A y B. Todos los consumidores de los dos países comparten las mismas preferencias sobre consumo presente y futuro. Estas preferencias están dadas por la función de utilidad $U\left(c_0^i, c_1^i\right) = \frac{\left(c_0^i\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{\left(c_1^i\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, donde $i = A$, B y donde $\sigma > 0$. Cada consumidor del país i recibe un flujo positivo de dotaciones $\left(y_0^i, y_1^i\right)$, con $i = A$, B. Existe un mercado internacional de crédito por el cual cada consumidor puede prestar o tomar prestado a una tasa de interés neta r. Esta tasa será un dato para cada consumidor pero es una variable endógena a nivel de esta economía. Existen N^A consumidores (idénticos entre sí) en el país A y N^B consumidores (idénticos entre sí) en el país B.

(a) Obtenga la función de ahorro/desahorro individual óptimo para cada agente en cada economía.

(b) Obtenga la función de ahorro/desahorro agregada para cada economía.

(c) Escriba la ecuación de equilibrio en el mercado de crédito internacional.

(d) Compute la derivada de $1+r$ de equilibrio con respecto a σ. Interprete.

(e) Suponga que $\sigma = 1$. Obtenga la tasa de interés de equilibrio.

(f) Suponga que $\sigma = 1$. Obtenga el valor de ahorro/desahorro de equilibrio para cada economía. ¿Bajo qué supuestos son los consumidores de A deudores de los de B?

5. Sea una economía con dos agentes A y B, donde $u^i\left(x_1^i, x_2^i\right) = \min\left\{x_1^i; x_2^i\right\}$, $i = A, B$. Sean las dotaciones agregadas ω_1 y ω_2 respectivamente. Sean las del consumidor i ω_1^i y ω_2^i.

   (a) Suponga primero que $\omega_1 = \omega_2$. Defina $p \equiv \frac{p_1}{p_2}$. Demuestre que existen infinitos valores de p tal que existe equilibrio competitivo en esta economía.

   (b) Suponga ahora que $\omega_1 > \omega_2$. Dibuje el conjunto de Pareto en esta economía.

   (c) Bajo el supuesto $\omega_1 > \omega_2$, demuestre que no existe ningun equilibrio competitivo con $p > 0$.

   (d) Bajo el supuesto $\omega_1 > \omega_2$, ¿puede encontrar un equilibrio con $p^* = 0$? Interprete. Compute en caso afirmativo las asignaciones individuales en el equilibrio.

   (e) Suponga ahora que $\omega_1 < \omega_2$. Dibuje el conjunto de Pareto en esta economía.

   (f) Definamos $\bar{p} \equiv \frac{p_2}{p_1}$. Bajo el supuesto $\omega_1 < \omega_2$, ¿existe un equilibrio con $q^* > 0$? ¿con $q^* = 0$? Interprete y demuestre su respuesta.

6. Este ejercicio constituye una extensión del modelo básico de clase a economías con riesgo, como también el rol de los mercados de activos para alcanzar asignaciones Pareto eficientes. Supongamos dos agentes A y B que viven en dos períodos consecutivos, $t = 0, 1$. En el período 0 existe certeza sobre lo que ocurre en ese mismo período pero no sobre lo que ocurrirá en $t = 1$. En éste último, existen dos estados de la naturaleza, llamados respectivamente α y β. En el estado α, el consumidor A recibe $y > 0$ unidades de un bien de consumo ("maíz") y B recibe 0. En el estado β, es el consumidor B quien recibe $y > 0$ de maíz y A quien recibe 0. La probabilidad de que se realice el estado α es igual a un parámetro $\eta \in (0,1)$. Cada consumidor posee unas preferencias definidas sobre consumo de maíz en $t = 1$ en cada estado de la naturaleza. Concretamente, el consumidor $i = A$, B posee preferencias representadas por una función de utilidad $U^i\left(c_\alpha^i, c_\beta^i\right) = \eta \frac{\left[c_\alpha^i\right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + (1-\eta)\frac{\left[c_\beta^i\right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$, donde c_s^i es el consumo del consumidor i de maíz en el estado s. El concepto de Pareto-eficiencia en este contexto será entendido en términos ex-ante. Esto significa que una asignación $\left\{\left(c_\alpha^A, c_\beta^A\right); \left(c_\alpha^B, c_\beta^B\right)\right\}$ es ex-ante Pareto eficiente si es factible (esto es, $c_s^A + c_s^B = y$ para todo s) y si no existe otra asignación factible $\left\{\left(\bar{c}_\alpha^A, \bar{c}_\beta^A\right); \left(\bar{c}_\alpha^B, \bar{c}_\beta^B\right)\right\}$ tal que $U\left(\bar{c}_\alpha^i, \bar{c}_\beta^i\right) \geq U\left(c_\alpha^i, c_\beta^i\right)$ para todo i, y $>$ para al menos un consumidor i.

(a) Plantee el problema que caracteriza una asignación ex-ante Pareto eficiente, en términos de encontrar la máxima utilidad esperada de A dado un valor de utilidad esperada de B, $\bar{u}^B$.

(b) Caracterice, utilizando el punto anterior, una asignación Pareto-eficiente.

(c) Demuestre que la asignación $\left\{\left(c_\alpha^A, c_\beta^A\right);\left(c_\alpha^B, c_\beta^B\right)\right\} = \{(\eta y, \eta y);((1-\eta)\,y,(1-\eta)\,y)\}$ es ex-ante Pareto-eficiente.

(d) En base a su respuesta en c, la idea es ahora encontrar algún mecanismo de mercado que permita implementar esta última asignación. (Esta idea es debida al Premio Nobel de Economía Kenneth Arrow, la misma que apareció en el examen parcial de este semestre). Suponga que en $t = 0$ se abren dos *mercados*, en cada uno de los cuales se transan unidades de un contrato a término. En el mercado α se transa (compra / vende) unidades de un contrato que paga, a quien sea titular del mismo, exactamente una unidad de maíz (por contrato) si $s = \alpha$ y 0 si $s = \beta$. En el mercado β se transa (compra/vende) unidades de un contrato que paga, a quien sea titular del mismo, una unidad de maíz si $s = \beta$ y 0 si $s = \alpha$. Como ningún consumidor obtiene maíz en $t = 0$, la consecuencia es que, dado que q_s denota el precio nominal de cada contrato, y $z^i(s)$ denota la cantidad (positiva o negativa) de contrato s (con $s = \alpha$, β) transada por i, entonces la restricción presupuestaria de i en $t = 0$ es $q_\alpha z^i(\alpha) + q_\beta z^i(\beta) = 0$. Interprete esta restricción en términos de un *mutuo seguro*.

(e) En equilibrio debe ocurrir que para todo $s = \alpha$, β, $z^A(s) + z^B(s) = 0$. Demuestre entonces que se aplica la Ley de Walras en este contexto. Esto implica que podemos normalizar uno de los dos q_s. Supongamos que $q_\beta = 1$ en los próximos dos puntos. Llamamos $q \equiv q_\alpha$.

(f) Escriba la igualdad que relaciona $c^i(s)$ con $z^i(s)$ para cada s en particular.

(g) Plantee el problema de optimización del consumidor i que elige $z^i(s)$ que satisfaga todas las restricciones presupuestarias. Obtenga las condiciones de primer orden.

(h) De las CPO despeje $z^i(\alpha)$ en función de q, η, σ, $y^i(s)$.

(i) Reemplazando en $y^i(s)$ por los valores de las dotaciones dichas en el párrafo introductorio, e imponiendo la condición de equilibrio en los mercados de activos obtenga el valor de q de equilibrio (como función de η).

(j) Reemplazando en $z^i(\alpha)$, y luego en las restricciones individuales, demuestre que en este equilibrio cada consumidor obtiene la cantidad de maíz que se obtiene en la asignació Pareto eficiente del punto c.

(k) Suponga que ahora, el mercado de contratos a término β es reemplazado por un mercado de contratos que paga al dueño de cada contrato una unidad de maíz independientemente del estado de la naturaleza observada en $t = 1$. El mercado del contrato α todavía persiste en esta economía. Suponga que $\sigma = 1$. Rehaga los puntos (d) a (j) con estos dos mercados.

7. En la historia ha existido una prolongada discusión sobre qué debe exportar un país, qué debe importar, etc. Por ejemplo, se ha discutido muchísimo si la Argentina debe todavía contentarse con exportar bienes de origen agropecuario o agroindustrial, o si en

realidad debe “diseñar” una política que exporte bienes con mayor “valor agregado”. Para dar una respuesta menos ambigua, el modelo de equilibrio general con producción ha sido un instrumento útil en el análisis sobre patrones de comercio. En este ejercicio extendemos el modelo visto en clase a una economía con dos países en el que ambos intercambian bienes.

Supongamos dos economías A y B. Cada economía está poblada por un consumidor. Cada consumidor tiene una función de utilidad $u = x_1 x_2$. Las preferencia son idénticas entre los consumidores de los dos países. Cada economía tiene una firma de cada tipo que produce el bien i ($i = 1, 2$) idénticas. La firma que produce el bien 1 tiene una función de producción igual a $y_1 = K_1^{1/3} L_1^{2/3}$. La firma productora del bien 2 posee una función de producción $y_2 = K_2^{2/3} L_2^{1/3}$. Aquí x_i hace referencia a la demanda del bien i e y_i hace referencia a la oferta. Cada consumidor es dueño del trabajo, capital y una firma. Cada consumidor en el país A posee 1.5 unidades de trabajo y 1 de capital. Cada consumidor en el país B tiene 1 de trabajo y 3 de capital. Supongamos para normalizar que el precio del bien 1 es igual a 1 y el precio del bien 2 es p. Se supone que solamente hay comercio entre los países en el mercado de bienes. Es decir, es imposible importar o exportar trabajo y capital.

(a) Obtenga las funciones de costo mínimo para cada tipo de empresa.

(b) Con la información de (1), de la condición de maximización de beneficios en la empresa obtenga w^* y r^* en función de p.

(c) Obtenga, de las demandas condicionadas de factores que obtivo en (1), las cantidades de trabajo y capital demandado por cada firma en función de p e y_i.

(d) Utilizando entonces la condición de demanda total de trabajo y capital en cada país es igual a su oferta obtenga y_i^* (producción) en función de p.

(e) De la condición de equilibrio en el mercado del bien 1 obtenga el valor de p^* de equilibrio.

(f) Dado este valor de p^*, ¿cuál país exporta el bien 1 y cuál el bien 2? (Ayuda: utilice calculadora u hoja de calculo). Relacione su respuesta con la abundacia relativa de capital con respecto al trabajo en cada país.

8. (Del examen parcial de Primavera 2000). En su tesis de licenciatura, Federico Jeanneret (2000) se interesa en estudiar el efecto de una mayor apertura comercial en la distribucion de salarios. La siguiente es una cita extraida del mencionado trabajo, referida a la evidencia acerca de este efecto en Estados Unidos.

   Tanto Murphy y Welch (1991) como Borjas, Freeman y Katz (1992) estimaron el efecto del aumento en las importaciones durante los años ochenta para los Estados Unidos. Ambos trabajos llegaron a conclusiones similares: el comercio generó una disminución en la demanda de los trabajadores no calificados y un aumento en la de los calificados.

   Jeanneret intenta brindar una explicacion de la relación entre apertura comercial y distribución de salarios utilizando un modelo de equilibrio competitivo. El problema del examen es un caso particular del modelo de Jeanneret. Considere una economia pequena y abierta, con dos bienes. El precio de cada uno de estos bienes esta dado exogenamente para esta economia, ya que esta dado por los mercados internacionales (no modelados aqui). El bien 1 utiliza dos factores, trabajo calificado y trabajo no calificado. La tecnologia de produccion del bien 1 puede representarse por la siguiente funcion de produccion.

$$y_1 = L_1^{\frac{2}{5}} H_1^{\frac{3}{5}}$$

donde L_1 es la cantidad de trabajo no calificado usado por la firma que produce 1 y H_1 es la cantidad de trabajo calificado usado por la firma productora de 1. El bien 2 tambien se produce usando ambos tipos de mano de obra. La funcion de produccion de la firma que produce el bien 2 es la siguiente.

$$y_2 = L_2^{\frac{1}{5}} H_2^{\frac{4}{5}}$$

donde L_2 es la cantidad de trabajo no calificado usado por la firma que produce 2 y H_2 es la cantidad de trabajo calificado usado por la firma que produce 2. Suponemos que existen M firmas de cada tipo.

Existen tambien M consumidores - trabajadores no calificados. Sus preferencias vienen dadas por la funcion de utilidad siguiente.

$$u^N = x_1^N x_2^N$$

donde x_1^N denota la cantidad de unidades del bien 1 consumidos por un consumidor - trabajador no calificado y x_2^N denota la cantidad de unidades del bien 2 consumidos por un consumidor - trabajador no calificado. Este trabajador nace con una dotacion total de una unidad de tiempo que puede ser usado para ofrecer trabajo o consumir ocio. Existen M consumidores - trabajadores calificados. Su funcion de utilidad viene dada por la siguiente expresion.

$$u^C = x_1^C x_2^C$$

donde x_1^C denota la cantidad de unidades del bien 1 consumidos por un consumidor - trabajador calificado y x_2^C denota la cantidad de unidades del bien 2 consumidos por un consumidor - trabajador calificado. Este trabajador nace con una dotacion total de una unidad de tiempo que puede ser usado para ofrecer trabajo o consumir ocio.

Existe un gobierno que cobra un *arancel* sobre el bien 1. Llamamos τ a la alicuota del arancel (donde τ es un valor entre 0 y 1). El gobierno destina todo lo recaudado a un gasto publico cuyo valor es siempre igual a la recaudacion (el gasto se ajusta a la recaudacion fiscal, tal que no existe deficit fiscal). El precio internacional del bien 1 es igual a 1, mientras que el precio internacional del bien 2 es igual a p. Como τ es un arancel, los productores de la firma 1 no reciben un precio unitario de 1 sino de $1 + \tau$. Denotamos w^N al salario por unidad de tiempo de trabajo de los trabajadores no calificados y w^C al de los calificados.

(a) (15 puntos) La restriccion presupuestaria del consumidor tipo h ($h = N, C$) tiene la forma

$$(1+\tau)\, x_1^h + p x_2^h = w^h$$

Obtenga las funciones de demanda por parte de cada consumidor (argumente que las CPO son suficientes a traves de demostrar la convexidad de las curvas de indiferencia o a traves de condiciones de segundo orden)

(b) (25 puntos) Obtenga las funciones de costo minimo de cada tipo de firma. Demuestre que el costo marginal es constante e igual al costo medio.

(c) (10 puntos) De la condicion de maximizacion de beneficios de cada firma (precio igual al costo marginal) despeje los salarios w^N y w^C en funcion de p.

(d) (10 puntos) Compute el cociente w^{*C} / w^{*N} (es decir, el *ratio* de salarios en el equilibrio). Obtenga una condición suficiente de la forma $p^{\theta} > (1+\tau)^{\rho}$, donde θ y ρ son números positivos, para que el cociente mencionado sea estrictamente mayor que uno. ¿Qué interpretación le puede dar al hecho de que $\frac{w^C}{w^N} > 1$? (No leeré más que un renglón de interpretación)

(e) (10 puntos) Reemplazando las expresiones obtenidas en el punto anterior en las cantidades de L_i^N y L_i^C con $i = 1, 2$ que minimizan el costo (que deberia haber obtenido en 8b) obtenga L_i^N y L_i^C en función de p, $1+\tau$ y las cantidades y_1 e y_2.

(f) (10 puntos) Escriba la condición de demanda de factores igual a oferta de factores en cada mercado de trabajo. **Sin resolver explícitamente**, en no más de tres renglones explique verbalmente cómo resolver este sistema de ecuaciones para encontrar (y_1, y_2) en función de p y $(1+\tau)$ (como si se lo tuviera que explicar a alumnos de Micro I).

(g) (10 puntos) Supongamos que ya obtuvo $y_1(p, 1+\tau)$ e $y_2(p, 1+\tau)$ del punto anterior. Escriba una desigualdad (en términos de estas cantidades $y_1(p, 1+\tau)$ e $y_2(p, 1+\tau)$ del punto anterior, y en términos de la demanda agregada de cada bien a partir de lo obtenido en el punto a) que signifique una condición suficiente para que el país sea importador neto del bien 1 y exportador neto del país 2.

(h) (10 puntos) Dado su respuesta en el punto 4, derive el cociente w^{*C} / w^{*N} con respecto a $1+\tau$. ¿Qué signo tiene esta derivada? Supongamos que la desigualdad del punto g es verdad, con lo cual τ es de hecho un arancel a las importaciones. Interprete económicamente en no mas de un renglon (no leere mas que un renglon para esta interpretacion) el signo de la derivada que acaba de obtener.

9. Este problema es una aplicación del esquema de equilibrio competitivo general a una economía con producción y dos períodos. Supongamos los períodos $t = 0, 1$. Existen N consumidores idénticos. Cada uno de ellos nace en $t = 0$ con una dotación de $k_0 > 0$ unidades de capital productivo. En cada período t cada consumidor tiene una dotación total de trabajo igual a 1. Las preferencias de cada consumidor están dadas por la función de utilidad $U(c_0, c_1) = u(c_0) + \beta u(c_1)$, con $u(c_t) = \ln c_t$, y donde c_t denota el consumo del agente en el período t. Existe una única firma que produce un único bien de consumo en cada período. El precio nominal de ese bien en el período t es igual a 1. Esta firma produce y_t unidades del bien en t ($t = 0, 1$) con la función de producción $y_t = K_t^{\theta} L_t^{1-\theta}$, donde $\theta \in (0,1)$. Existe en cada período tres mercados: el de trabajo, el de capital y el del bien de consumo. En el mercado laboral los consumidores ofrecen trabajo a cambio de un salario w_t, mientras que la firma demanda rabajo pagando el salario w_t. Los consumidores también ofrecen capital

en cada período a cambio de un precio r_t, que es el que paga la empresa. Finalmente la firma ofrece lo producido a los consumidores al precio igual a 1. Por otro lado, todo el capital ofrecido por cada consumidor en $t = 0$, una vez usado por a firma, se pierde. Sin embargo, parte del ingreso total que recibe el consumidor en $t = 0$ puede ser destinado a *inversión*, denotado como x_0. En otras palabras, el ingreso en 0 sólo puede ser destinado al consumo en 0 (c_0) o a la inversión, x_0, siendo éste el total de capital físico que el consumidor tiene disponible al inicio de $t = 1$ para ser ofrecido a la firma (a cambio del precio r_1).

(a) Escriba las restricciones presupuestarias del consumidor, una para cada período.

(b) Despejando c_0 y c_1 en función de x_0 y de las otras variables, plantee el problema del consumidor que debe cumplirse en equilibrio.

(c) Escriba las condiciones de primer orden del problema del consumidor. De allí despeje x_0 en función de (w_0, r_0), (w_1, r_1).

(d) Escriba el problema de maximización de beneficios de la firma. Obtenga las condiciones de primer orden de este problema.

(e) ¿A qué deben ser iguales L_t y K_t en equilibrio? Justifique su respuesta.

(f) Reemplace su respuesta anterior en las condiciones de primer orden. En concreto, despeje w_0 y r_0 como función de k_0 y los otros parámetros, y despeje w_1 y r_1 en función de k_1 y los otros parámetros.

(g) Tenga en cuenta que $x_0 = k_1$ según lo dicho en las premisas de este ejercicio. Utilizando entonces esto y su respuesta de $3.f$ y $3.c$, obtenga la cantidad k_1 de equilibrio como función de k_0 y los parámetros.

(h) Para analizar si esta asignación de equilibrio es Pareto eficiente, tomemos el caso de un planificador que maximiza la función de utilidad de cualquier consumidor multiplicado por N (esto es, la suma de las utilidades de los N agentes) sujeto a las restricciones de factibilidad: esto es, que el total del consumo en 0 más la inversión en capital en 0 debe ser igual al producto total en 0, y que el total del consumo en 1 sea igual al producto total alcanzado en 1, además de que el total del factor trabajo y capital utilizado siempre es igual al total disponible en la economía. Plantee formalmente el problema del planificador.

(i) Una vez más, despejando c_0 y c_1 en función de $x_0 = k_1$, resuelva el problema del planificador y muestre si la relación entre k_1 y k_0 obtenida en esta solución es la misma que en el equilibrio competitivo. Explique alguna intuición para este resultado.