Microeconomía I Prof. Enrique Kawamura
Problemas prácticos III: Equilibrio en mercados competitivos (análisis parcial)

1. Se lee en El Economista el 17/9/99, del artículo "Sector agrícola, mejora el clima" por Ricardo de la Fuente:

   Por el lado de la oferta, las fuertes inversiones en capacidad productiva y aumento de la productividad global, con el agregado de avances tecnológicos (ej.: cultivos transgénicos que brindan mayores rendimientos) fruto de las inversiones en investigación y desarrollo, cntriubyeron con creces a la decliación de precios...

   El autor de este artículo habla de las perspectivas de mejora en los precios de los commodities agrícolas. Podemos entonces entender algunas cuestiones con un esquema más formal. Además este mismo esquema nos permitirá discutir algunos aspectos puntuales. Suponga que el demandante típico de bienes agrícolas tiene una función de utilidad:

   $$u = \frac{1}{2}\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2$$

   Aquí x_1 mide el consumo de bienes agropecuarios medido en kilogramos y x_2 es la cantidad de pesos gastados en los otros bienes. El agente individual recibe un ingreso exógeno m. Hay un sólo tipo de consumidor. El precio del bien 1 es p_1, mientras que el precio del 2 es 1. Por otro lado, el productor agrícola debe producir con factores que llamaremos L (trabajo) y K (capital). Suponga que en el largo plazo la tecnología es:

   $$y = AL^{1/2}K^{1/2}$$

   donde $0 < \alpha < 1$. Sea w el precio de L y r el precio de K. Aquí y está medido en toneladas (miles de kilogramos). Se calcula que existen cinco mil millones de personas (supuestas idénticas aquí) que consumen bienes agrícolas. También suponga un total de productores aproximadamente igual a 2 millones (también todos idénticos para simplificar).

   (a) Obtenga las funciones de demanda no compensadas para el consumdor típico. Chequee las condiciones de segundo orden.

   (b) Obtenga la función de costo mínimo para cada productor en el largo plazo. Chequee las condiciones de segundo orden.

   (c) Demuestre que si el agricultor maximiza beneficios (usando la función de costo mínimo) entonces el precio mundial de los bienes agropecuarios debe ser igual al costo marginal para cualquier $y > 0$ y menor a infinito. (Esto implica entonces que para cualquier cantidad y el beneficio máximo debería ser cero).

   (d) Dada las cantidades de demandantes, obtenga la demanda mundial por bienes agropecuarios (exprese las cantidades en miles de millones de kilogramos). ¿Cuál es el precio de equilibrio mundial? ¿Cuál es la cantidad total de toneladas transadas en el mundo? (Exprese esto en función de A, w, r, m)

(e) Cuánto produce cada productor individual? Para ello divida simplemente el total de producción demandada por la cantidad total de productores.

(f) Obtenga la derivada del precio de equilibrio con respecto a A. ¿Es su resultado consistente con lo que afirma el artículo, acerca de que la baja en el precio mundial se debió a aumentos en la eficiencia tecnológica?

(g) Dados nuestros supuestos, ¿cómo afecta un aumento en m sobre el precio de equilibrio? Demuestre su respuesta.

2. Este problema integra la teoría de decisión de portafolio bajo riesgo y el análisis de equilibrio de competencia perfecta en mercados de activos con riesgo. Tomemos un mercado que dura dos períodos, $t = 0, 1$. Existen N consumidores que en $t = 0$ reciben una dotación de $w = 4$ mil dólares, que deben distribuir entre una inversión libre de riesgo, cuya tasa neta pagada en $t = 1$ es cero, y otra inversión que consiste en prestarle a emprendedores. Sea α la proporción de la dotación w invertida en préstamos a emprendedores. Existen N de estos emprendedores, quienes poseen una tecnología que necesita una inversión inicial de mil dólares en $t = 0$ (y los emprendedores tienen 0 dólares de dotación en los dos períodos). Una vez realizada la inversión, la tecnología puede ser exitosa (en cuyo caso los emprendedores obtienen un ingreso suficiente para poder repagar el préstamo con los intereses) o puede fracasar (en cuyo caso los emprendedores no pagan nada y los inversores obtienen 0 de parte de los emprendedores). La probabilidad de cada contingencia es $\frac{1}{2}$. Se supone que las tecnologías se encuentran perfectamente correlacionadas entre sí (o todos son exitosos, o ninguno). Sea r la tasa neta del préstamo que recibe el emprendedor y que se pacta en $t = 0$. Las preferencias de los consumidores - inversores puede expresarse como

$$u\left(c_S, c_F\right) = \frac{1}{2}\sqrt{c_S} + \frac{1}{2}\sqrt{c_F}$$

donde c_S es lo que se lleva el consumidor si la tecnología de los emprendedores es exitosa y c_F lo que se lleva si las tecnologías fracasan.

(a) Escriba c_S y c_F en función de α, w, r

(b) Obtenga el monto α que maximiza la utilidad esperada del inversor como función de r. ¿Es función de w?

(c) ¿Cuál es la condición de equilibrio de fondos prestables en $t = 0$? (Ayuda: en $t = 0$ el total de lo que los inversores desean prestar debe igualar a lo que los emprendedores desean tomar prestado para poder realizar la inversión en la tecnología)

(d) Obtenga la tasa r^* de equilibrio a partir de la ecuación en c.

3. Suponga ahora el mismo ejercicio que el anterior excepto que ahora las preferencias de los inversores son

$$u\left(c_S, c_F\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(c_S\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\left(c_F\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

donde $\sigma > 0$ denota el coeficiente de aversión al riesgo relativo.

(a) Obtenga el monto α que maximiza la utilidad esperada del inversor como función de r y σ.

(b) Escriba la condición de equilibrio de fondos prestables en $t = 0$. Nótese que ahora queda el parámetro σ en la misma.

(c) Utilizando el teorema de la función implícita y utilizando también su respuesta en 5.c, demuestre que $\frac{\partial r^*}{\partial \sigma} > 0$. Interprete el resultado.

4. Este problema es una ilustración de un teorema clásico de imposición óptima (mencionado en clase). Supongamos $I \geq 2$ consumidores, cada uno de los cuales recibe un ingreso nominal m^i. Las preferencias del consumidor i están representadas por una función de utilidad que depende de las cantidades consumidas de los bienes 1, 2 y 3. Sean estas cantidades respectivamente x_1^i, x_2^i y x_3^i. Esta función de utilidad tiene la forma $u^i\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right) = -\frac{1}{2}\beta\left(x_1^i\right)^2 + \alpha x_1^i - \frac{1}{2}\gamma\left(x_2^i\right)^2 + \delta x_2^i + x_3^i$, donde α, β, γ y δ son parámetros positivos, y se supone que α y δ son suficientemente grandes. El vector de precios que enfrentan los consumidores es $(p_1, p_2, 1)$. En los mercados de los bienes 1 y 2 encontramos nua gran cantidad de firmas pequeñas que producen el bien respectivo con una tecnología que sólo depende del trabajo. Esta tecnología está representada por la función de producción $y_j = AL_j$, donde $j = 1$, 2, y donde y_j representa la cantidad de bien j producida por cualquier firma de la industria j y L_j denota la cantidad de trabajo utilizada por la firma que produce j. Aquí $A > 0$. Sea w el precio del trabajo (por unidad de L).

   (a) Obtenga las demandas individuales por los bienes 1 y 2.

   (b) Suponga de aquí hasta el final del ejercicio que $\alpha = 20$, $\beta = 10I$, $\gamma = I$, $\delta = 5$. Obtenga las demandas de mercado de los bienes 1 y 2.

   (c) Suponga que $w = 4A$ hasta el final del ejercicio. Obtenga las funciones de oferta de las industrias 1 y 2. Muestre que son idénticas.

   (d) Obtenga el precio y la cantidad de equilibrio en cada industria, suponiendo inexistencia de distorsiones. Calcule la elasticidad-precio de la demanda en el equilibrio en cada mercado. ¿En cuál la demanda es menos elástica? Calcule también el excedente de todos los consumidores en cada mercado (1 y 2).

   (e) Suponga ahora la existencia de un gobierno que necesita recaudar un monto total de impuestos igual a T. Para este objetivo, grava el consumo de los bienes 1 y 2 mediante una *tasa*: por cada unidad consumida del bien j ($j = 1, 2$) el gobierno se lleva un monto de t_j pesos. Para un valor de t_j dado, calcule la pérdida de excedente de los consumidores (**no** la pérdida de peso muerto) en cada mercado.

   (f) El gobierno decide entonces el valor del vector (t_1, t_2) que minimiza la suma de las pérdidas totales de excedentes de los consumidores sujeto a que la recaudación sea igual a T. Obtenga las condiciones de primer orden que caracterizan la solución a este problema.

   (g) Demuestre que la tasa óptima en 1 es mayor que la de 2, esto es, $t_1^* > t_2^*$. Relacione esto con la medición de las elasticidades-precio de las demandas obtenidas en la parte (d).