Microeconomía I Prof. Enrique Kawamura
Problemas Prácticos VI: Externalidades y bienes públicos (con solución)

1. Este ejercicio ilustra algebraicamente el problema de los agentes fumadores visto gráficamente en clase. Supongamos dos consumidores A y B cuyas preferencias dependen, por un lado, de maíz, y por otro, de nicotina inhalada. Denotamos con el subíndice 2 al maíz y con el 1 a la nicotina. Sean las preferencias de cada agente dadas por

$$u^A = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2^A$$

y

$$u^B = -\alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2^B$$

respectivamente. Aquí x_1 muestra la cantidad común de nicotina aspirada por ambos agentes, mientras que x_2^i es la cantidad de maíz consumida por i. Sea $\alpha \in (0,1)$. Cada uno nace con 1000 kilos de maíz ($\omega_2^i = 1000$). El máximo de nicotina aspirada (equivalente a un paquete de cigarrillos) disponible en la economía es igual a 100 litros.

   (a) Supongamos en primer lugar que A es el dueño original del paquete de cigarrillos. Sabemos que el agente B está dispuesto a comprarle una cierta cantidad de nicotina (cigarrillos) a un precio p para luego destruirlos. Exprese la restricción presupuestaria del consumidor B en función de p, x_1 y x_2^B.

   (b) Obtenga las condiciones de primer orden del consumidor B. Obtenga entonces la cantidad x_1 como ffunción de p y del parámetro α que resuelve el problema de maximización. Obtenga la cantidad de nicotina que le comprará a A al precio p.

   (c) Dado que A le vende parte de su dotación de nicotina (cigarrillos) a B al precio p, exprese la restricción presupuestaria del consumidor A en función de p, x_1 y x_2^A.

   (d) Obtenga las condiciones de primer orden del problema del consumidor A y despeje de las mismas el consumo óptimo de nicotina como función de p y el parámetro α.

   (e) Escriba la condición de equilibrio en esta economía. De la misma resuelva por el precio p^* de equilibrio.

   (f) Obtenga la cantidad consumida de nicotina en equilibrio. ¿Qué supuestos deberíamos realizar sobre el parámetro α para que esta cantidad sea compatible con la cantidad total de nicotina que hay en la economía?

   (g) Repita ahora los pasos del problema pero suponiendo que originalmente es el consumidor B quien posee el paquete de cigarrillos.

2. Este problema presenta una ilustración simplificada de los argumentos presentados por Uzawa (1965) y el Premio Nobel de Economía Robert Lucas (1988) quienes demuestran, en el caso de un bien que presenta externalidades positivas, la ineficiencia del equilibiro

competitivo, que implica una cantidad de bienes menor al Pareto-eficiente. Supongamos una economía que dura dos períodos, $t = 0, 1$. Existen N agentes consumidores idénticos que viven esos dos períodos. Cada agente nace en el período 0 con una dotación de tiempo igual a 1, que puede ser destinado a dos usos: trabajo (en su propia fábrica) o educación. La educación permite acumular lo que denominamos *capital humano* del período 0 al 1. Sea l_0 el tiempo dedicado al trabajo en $t = 0$. Cada consumidor nace con un *stock* de capital humano $h_0 = 1$. Esto implica que la cantidad de capital humano disponible en $t = 1$ será h_0 más el total de tiempo de educación invertido en $t = 0$ (el capital humano ya utilizado no se deprecia). Cada consumidor posee una tecnología que le permite producir el único bien de consumo en cada período t con una función de producción $y_t = A\left[(h_t)^{\theta}\bar{h}_t^{\delta}\right](1 - l_t)$, con θ y δ positivos y tales que $\theta + \delta < 1$, y $A > 1$. Aquí $\bar{h}_t$ denota la cantidad de capital humano promedio de toda la economía al comienzo del período t, esto es, el total de capital humano dividido N. Cada consumidor tiene preferencias sobre consumo presente y futuro igual a $U(c_0, c_1) = c_0 + c_1$.

(a) Plantee el problema de un planificador que maximice la suma de las utilidades sujeto a restricciones de factibilidad.

(b) Obtenga el valor de h_1^* Pareto - eficiente a partir de la solución del problema del planificador.

(c) Supongamos ahora que cada consumidor elige l_0 y los consumos óptimamente, tomando $\bar{h}_1$ como dado. En equilibrio debe ocurrir que el valor h_1 que cada consumidor elige (de acuerdo a la elección individual óptima de l_0) debe igualar a $\bar{h}_1$. Obtenga el valor de esta variable en equilibrio. Muestre si este valor es menor o mayor que h_1^*.

3. Este problema ilustra la ineficiencia de la provisión privada de un bien público cuando aquella se realiza mediante una firma monopólica. Consideremos dos empresas. La empresa 1 produce azúcar y la empresa 2 produce té. Sean y_1 e y_2 las cantidades producidas de azúcar y té respectivamente por la empresa respectiva. La empresa j $(j = 1, 2)$ produce y_j unidades con la función de costo mínimo $c_j(y_j, z) = \frac{1}{2}y_j^2(z)^{-1/2}$, donde z es la cantidad de infraestructura vial-portuaria destinada a la compra de insumos. La idea es que cuanto mayor sea esta infraestructura, menores serán los costos de producir azúcar y té. Los mercados de té y azúcar son competitivos, y los precios están dados internacionalmente: (p_1, p_2). Producir z unidades de infraestructura requiere de costos iguales a $z + A$, donde A constituyen los costos fijos asociados a la producción de infraestructura. Suponemos que $A < \frac{1}{32}(p_1^2 + p_2^2)$.

(a) Dado un z, plantee el problema de maximización de beneficios de cada firma.

(b) Obtenga la función de oferta de $y_j^*(p_j, z)$. Reemplace esta función de oferta en los beneficios y obtenga los beneficios maximizados de la firma j como función de (p_j, z). Denotemos a estos beneficios como $\pi_j(p_j, z)$.

(c) Supongamos en primer lugar la existencia de un *planificador* que tiene como objetivo maximizar la suma de los beneficios máximos de 1 y 2 (como funciones de p_j y z), netos de los costos de producción de z. Escriba formalmente este problema.

(d) Obtenga la solución del problema anterior, z^*, como función de p_1^2 y p_2^2. Obtenga los beneficios máximos totales netos de los costos de producir z^* unidades del bien público (infraestructura).

(e) Suponga ahora que el bien z lo ofrece un monopolista. Este carga un precio q_j a cada firma j que demanda infraestructura. Escriba el problema que enfrenta ahora la firma j (que maximiza los beneficios netos del pago que realiza al monopolista por la infraestructura). Obtenga la demanda inversa por z de la firma j.

(f) La demanda agregada, como lo vimos en clase, del bien z es la suma *vertical* de las dos demandas. Esta es la demanda de mercado que enfrenta el monopolista. Compute esta demanda. Luego utilice esta demanda para escribir los beneficios del monopolista como función de z y las otras variables.

(g) Suponiendo que el monopolista elige el z^{eq} que maximiza sus beneficios, compute este valor. ¿Es mayor o menor que z^*?

(h) Obtenga los beneficios conjuntos que obtienen 1 y 2 en este equilibrio. ¿Son mayores o menores que en la solución del planificador?

Tutorial 15: Respuestas

1. .

(a) Restricción:

$$p\,(100 - x_1) + x_2^B = 1000$$

(nótese que $(100 - x_1)$ es la cantidad de nicotina que le compra a A al precio p pues x_1 es lo que A termina consumiendo de nicotina).

(b) El problema del consumidor puede escribirse como

$$\max \quad -\alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2^B$$

sujeto a

$$p\,(100 - x_1) + x_2^B = 1000$$

Las CPO son

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{x_2^B} &= \lambda^B \\ \frac{\alpha}{x_1} &= \lambda^B p \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\alpha}{x_1} = \left(\frac{1-\alpha}{x_2^B}\right) p \Longrightarrow x_2^B = \frac{1-\alpha}{\alpha} p x_1$$

Reemplazando en la restricción

$$p\,(100 - x_1) + \frac{1-\alpha}{\alpha} p x_1 = 1000$$

Entonces

$$100p - 1000 = \left(-\frac{1}{\alpha} + 2\right) p x_1$$

y entonces

$$x_1 = \frac{(100p - 1000)}{\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) p}$$

y así

$$100 - x_1 = 100 - \frac{(100p - 1000)}{\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) p} = 100 \left[\frac{p\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + 10}{\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) p}\right]$$

(c) Restricción de A :

$$x_2^A = 1000 + p\,(100 - x_1)$$

(d) El problema del consumidor A se puede escribir como

$$\max \quad \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln\left[1000 + p\,(100 - x_1)\right]$$

La CPO es

$$\frac{\alpha}{x_1} = \frac{(1-\alpha)}{1000 + p\,(100 - x_1)}p$$

o bien

$$\alpha\left[1000 + p\,(100 - x_1)\right] = (1-\alpha)\,px_1$$

DEspejando x_1 :

$$x_1 = \alpha\frac{(1000 + 100p)}{p}$$

(e) Evidentemente en equilibrio ambas expresiones de x_1 deben igualarse. Entonces

$$\alpha\frac{(1000 + 100p)}{p} = \frac{(100p - 1000)}{\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)p}$$

Entonces

$$\alpha\,(1000 + 100p) = \frac{1}{2 - \frac{1}{\alpha}}\,(100p - 1000)$$

o

$$(2\alpha - 1)\,(1000 + 100p) = (100p - 1000)$$

Entonces

$$2\alpha 100p = (2 - 2\alpha)\,1000$$

o sea

$$p^* = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)10$$

(f) La cantidad de cigarrillos consumida es

$$\begin{aligned} x_1^* &= \alpha\frac{(1000 + 100p^*)}{p^*} = \alpha\frac{1000 + 1000\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)}{10\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} = 100\alpha\left(\frac{\frac{1}{\alpha} - 1 + 1}{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) \\ &= 100\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

Aquí debería suponer que $\alpha < 1 - \alpha$. De lo contrario $100\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) > 100$, lo cual es imposible que ocurra en equilibrio.

(g) Supongamos ahora que el que tiene el paquete de cigarrillos es B, con lo cual si A quiere fumar tendrá que comprárselos a B. El problema para A ahora es

$$\max \quad \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2^A$$

sujeto a

$$qx_1 + x_2^A = 1000$$

donde q es el precio que A paga a B por cada litro de nicotina que intenta obtener. De aquí sale que

$$x_1 = \frac{\alpha}{q}1000$$

Del lado del consumidor B :

$$\max \quad -\alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2^B$$

sujeto a

$$x_2^B = 1000 + qx_1$$

La CPO es

$$\frac{\alpha}{x_1} = \frac{1-\alpha}{1000+qx_1}q$$

Entonces

$$x_2^B = qx_1\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Reemplazando en la restriccion presupuestaria:

$$qx_1\frac{1-\alpha}{\alpha} = 1000 + qx_1$$

De aqui se llega a que

$$qx_1\left(\frac{1}{\alpha}-2\right) = 1000$$

o

$$x_1 = \frac{1000}{q\left(\frac{1}{\alpha}-2\right)}$$

Entonces en equilibrio

$$\frac{1000}{q\left(\frac{1}{\alpha}-2\right)} = \frac{\alpha}{q}1000$$

o bien

$$1 = q\,(1-2\alpha)$$

Entonces

$$q = \frac{1}{1-2\alpha}$$

If $\alpha < 1/2$ entonces es positivo. Entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha}{q}1000 \\ &= \alpha\,(1-2\alpha)\,1000 \end{aligned}$$

que es claramente distinto al caso anterior.

2. .

(a) El problema del planificador es (dado que todos los consumidores son idénticos):

$$\max_{c_0,c_1 l_0,l_1} \quad c_0 + c_1$$

sujeto a

$$\begin{aligned} c_0 &= (h_0)^{\theta}\,\bar{h}_0^{\delta}\,[1-l_0]\,; \qquad c_1 = A h_1^{\theta}\bar{h}_1^{\delta}\,[1-l_1]\,; \\ h_1 &= h_0 + l_0; \quad h_0 = \bar{h}_0 = 1; \quad \bar{h}_1 = h_1 \end{aligned}$$

y dado que $l_1 = 0$ pues no hay incentivos a acumular ningún capital humano para después de $t = 1$, el problema puede ser reescrito como

$$\max_{l_0} \quad (1-l_0) + A\,[1+l_0]^{\theta+\delta}$$

(b) La CPO es

$$1 = A\,(\theta+\delta)\,[1+l_0]^{\theta+\delta-1} \Longrightarrow [1+l_0]^{1-\theta-\delta} = A\,(\theta+\delta)$$

y entonces

$$1 + l_0^* = h_1^* = [A\,(\theta+\delta)]^{\frac{1}{1-\theta-\delta}}$$

(c) El problema del consumidor en equilibrio puede ser escrito como:

$$\max \quad (1-l_0) + A\,(1+l_0)^{\theta}\,\bar{h}_1^{\delta}$$

y la CPO es

$$1 = A\theta\,(1+l_0)^{\theta-1}\,\bar{h}_1^{\delta}$$

o bien

$$(1+l_0)^{1-\theta} = (h_1^{eq})^{1-\theta} = A\theta\bar{h}_1^{\delta}$$

Pero en equilibrio $\bar{h}_1 = h_1^{eq}$. Ergo:

$$(h_1^{eq})^{1-\theta-\delta} = A\theta \Longrightarrow h_1^{eq} = (A\theta)^{\frac{1}{1-\theta-\delta}}$$

Dado que $A\theta < A\,(\theta+\delta)$ entonces $(A\theta)^{\frac{1}{1-\theta-\delta}} < [A\,(\theta+\delta)]^{\frac{1}{1-\theta-\delta}}$, y entonces $h_1^{eq} < h_1^*$.

3. .

(a) La firma j elige y_j que maximiza

$$p_j y_j - \frac{1}{2} y_j^2 z^{-1/2}$$

(b) La CPO es

$$p_j = y_j z^{-1/2}$$

y entonces la función de oferta es

$$y^*(p_j, z) = p_j z^{1/2}$$

Reemplazando en los beneficios:

$$\begin{aligned}
\pi_j(p_j, z) &= p_j \left(p_j z^{1/2}\right) - \frac{1}{2}\left(p_j z^{1/2}\right)^2 z^{-1/2} \\
&= p_j^2 z^{1/2} - \frac{1}{2} p_j^2 z^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} p_j^2 z^{1/2}
\end{aligned}$$

(c) Problema del planificador

$$\max_z \quad \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) z^{1/2} - z - A$$

(d) CPO del problema del planificador:

$$\frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2\right) z^{-1/2} = 1 \Longrightarrow z^*(p_1, p_2) = \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2$$

Beneficios conjuntos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^{\frac{2}{2}} - \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A \\
= & \frac{1}{8}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A \\
= & \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A
\end{aligned}$$

el cual es positivo pues $A < \frac{1}{32}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 < \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2$.

(e) La firma j elige z tal que maximiza $\pi_j(p_j, z) - q_j z$, esto es

$$\max_z \frac{1}{2} p_j^2 z^{1/2} - q_j z$$

La CPO es

$$\frac{1}{4} p_j^2 z^{-1/2} = q_j$$

Esta es la demanda inversa de z por parte de j.

(f) La demanda agregada surge de sumar $q_1 + q_2$ a partir de las dos demandas inversas anteriores. (Recuerden que en el caso de bienes públicos sumamos *precios* o valuaciones marginales, no cantidades). Entonces la demanda agregada es

$$q_1 + q_2 = \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2\right) z^{-1/2}$$

Y el problema del monopolista puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \max_z \quad \left[\frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2\right) z^{-1/2}\right] z - z - A \\ = & \max_z \quad \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2\right) z^{1/2} - z - A \end{aligned}$$

(g) CPO del monopolista:

$$\frac{1}{8}\left(p_1^2 + p_2^2\right) z^{-1/2} = 1$$

con lo cual

$$z^{eq}\left(p_1, p_2\right) = \frac{1}{64}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2$$

Nótese que $\frac{1}{64} < \frac{1}{16}$ con lo cual $\frac{1}{64}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 < \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2$ con lo cual $z^{eq}\left(p_1, p_2\right) < z^*\left(p_1, p_2\right)$ para todo $\left(p_1, p_2\right)$.

(h) Los beneficios conjuntos de 1 y 2 netos del costo en este equilibrio son

$$\begin{aligned} & \pi_1\left(p_1, z^{eq}\right) + \pi_2\left(p_2, z^{eq}\right) - z^{eq} - A \\ = & \frac{1}{2}p_1^2\frac{1}{8}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}p_2^2\frac{1}{8}\left(p_1^2 + p_2^2\right) - \frac{1}{64}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A \\ = & \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - \frac{1}{64}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A \\ = & \frac{3}{64}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A \end{aligned}$$

Pero $\frac{3}{64} < \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$, con lo cual $\frac{3}{64}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A < \frac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - A$, y entonces los beneficios conjuntos son menores en el equilibrio monopólico que en la asignación Pareto-eficiente.