

Microeconomía I. Exámenes parciales viejos.

Enrique Kawamura

May 28, 2009

Primavera 1999 (Universidad de San Andrés)

1. Leyendo cualquier diario especializado en economía y finanzas (El Economista, Ambito Financiero, El Cronista, BAE) uno se encuentra con recomendaciones como esta: (El Economista, 17/9/99, página 20)

”PORTAFOLIOS: Sobre el 100% de la cartera de inversión, se recomienda invertir 25% en títulos públicos dolarizados..., 25% en tasa en dólares en un banco estadounidense, 18% en tasa en pesos a largo plazo en sólido banco local, 17% en acciones..., 10% en tasa en euros en un sólido banco europeo y 5% en un fondo de acciones y bonos brasileños.”

Esta no es otra cosa que una recomendación de cartera de inversiones financieras, dado el riesgo existente y los rendimientos de los activos. El siguiente problema trata de dar una versión sencilla de cómo recomendar una cartera a un inversor cuyo coeficiente de aversión al riesgo relativo es constante y conocido.

Existen dos períodos, 0 y 1. Suponga un inversor que tiene hoy (día 0) exactamente 1 millón de dólares. Debe decidir entre colocar un porcentaje α en una inversión con riesgo (una acción de una compañía textil) y el resto $(1 - \alpha)$ en una caja de ahorro que le dará una tasa de interés neta de 0 en el período 1. Si el inversor invirtió α en la acción, el retorno de esa acción en el período 1 dependerá de si la empresa es adquirida por George Soros. Si éste la compra el retorno es $R\alpha$ millones. Si no la compra es sólo $r\alpha$ millones, donde $R > 1 > r$. Suponga que George Soros comprará la empresa con probabilidad π . El inversor recibe el total de los retornos de todas sus inversiones en el periodo 1 y los consume totalmente. Sea c_1 el consumo si Soros compra la empresa textil y c_2 el consumo si Soros no la compra. Entonces, para un α dado, es verdad que $c_1 = \alpha R + (1 - \alpha)$ y $c_2 = \alpha r + (1 - \alpha)$. Su misión como agente de negocios de este inversor es recomendar el α tal que el inversor alcance la mayor utilidad esperada

$$U = \pi u(c_1) + (1 - \pi) u(c_2)$$

en el periodo 1 dado que tiene un millón de pesos en 0.

- (a) (10 puntos) Suponga que sabe que $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$. Recuerde que el coeficiente de aversión al riesgo relativo es (u''/u') c . Demuestre que σ es el coeficiente de aversión al riesgo relativo.
- (b) (20 puntos) Obtenga el α que maximiza U usando la función u en (2.a). Esta alpha debiera quedar en función de $(R, r, \pi, \alpha, \sigma)$. Muestre que las condiciones de segundo orden se cumplen. (Truco: en algún momento aparecera multiplicando la expresión

$$\left(\frac{\pi(R-1)}{(1-\pi)(1-r)} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Para ahorrarse algo de los cálculos llame a esto ϕ , y luego proceda.)

- (c) (10 puntos) Suponga que $R = 4$, $r = 0$, $\pi = 1/2$. Escriba el α óptimo obtenido en 2.c con estos valores. Muestre que si $\sigma = 0.5$, entonces el α óptimo es 15/19, mientras que si es $\sigma = 1$, el α óptimo es 3/7.
- (d) (10 puntos) Suponga los mismos valores para R , r y π . Suponga que σ tiende a infinito (correspondiente a un agente infinitamente averso al riesgo). Demuestre que el α óptimo tiende a 0. Esto implica que si un agente es infinitamente averso al riesgo (o lo que es lo mismo, tiene 0 tolerancia al riesgo) entonces lo recomendable es poner todo el millón de pesos en la caja de ahorro. Suponga que σ tiende a 0 (correspondiente a un agente que es neutral al riesgo). Muestre que el α óptimo tiende a 1. (En este último caso deberría quedar una indeterminación, infinito / infinito. Para remediarlo, divida el numerador y el denominador por la expresión $4^{1/\sigma}$). Esto implica que para un agente neutral al riesgo lo razonable es poner todo el millón de pesos en la inversión riesgosa.

Otoño 2000 (Universidad de San Andrés)

1. (40 puntos) El siguiente fue tomado del trabajo de tesis de Licenciatura en Administración de Empresas en a Universidad de San Andrés, del Lic. Peter Whitney, defendido hace poco más de un mes:

Los (clientes) flux son aquellos clientes que eligieron un punto de venta porque es el más cercano, o simplemente porque es el local de más fácil acceso(...) Los clientes trafic son aquellos que se desplazan a un punto de venta por razones específicas(...) La mayoría de los clientes trafic son clientes flux de otra zona. Por ejemplo, si las compras a realizar son pequeñas, de bajo monto o para salir de un apuro raramente se justifica el desplazamiento. (Whitney, 2000)

El objeto de este problema es el análisis de estos tipos de clientes a través de la teoría del consumidor estudiado en clase. La idea es intentar modelar a un cliente que es flux en su zona de influencia y trafic para otros bienes. Esto contribuye a determinar más exhaustivamente el comportamiento de la demanda de distintos tipos de supermercados.

Supongamos que a un consumidor sólo le importa dos bienes, el bien 1 y el bien 2. Podemos interpretar a 1 como comestibles y a 2 como no comestibles. Tiene un ingreso nominal en pesos de m . Tiene la posibilidad entonces de comprar estos dos bienes en dos lugares diferentes, un autoservicio pequeño a la vuelta de su casa o en el hipermercado a treinta cuadras (en cuyo caso debe ir con el automóvil y perder algún tiempo). Sean p_1 y p_2 los precios de cada bien en el hipermercado y (q_1, q_2) los precios en el autoservicio. Suponemos que $q_l \geq p_l$ donde $l = 1, 2$. Esto implica que en el hipermercado los precios son más bajos que en el autoservicio. La función de utilidad si va al autoservicio es simplemente

$$U^A = x_1 x_2$$

mientras que si va al hipermercado es

$$U^H = x_1 x_2 - K$$

donde $K > 0$ es la *desutilidad* del tiempo perdido en ir al hipermercado. Nótese que la utilidad de ir al hipermercado sin contar el tiempo perdido es igual que ir al autoservicio.

- (a) (10 puntos) Si la función de utilidad es U^A (si fuera al autoservicio), obtenga las funciones de demanda de x_1 y x_2 . Denotemos x_l^A la demanda del bien l , $l = 1, 2$, si va al autoservicio.
- (b) (10 puntos) Si la función de utilidad es U^H (si fuera al hipermercado), obtenga las funciones de demanda de x_1 y x_2 . Denotemos x_l^H la demanda del bien l , $l = 1, 2$, si va al hipermercado.
- (c) (10 puntos) Supongamos $K = 1$, $q_2 = p_2 = 1$. Utilizando funciones de utilidad indirecta, ¿para qué valores de q_1 y p_1 el consumidor prefiere ir al hipermercado antes que al autoservicio (es decir, es cliente trafic en lugar de flux)? (Pista: aquí debe obtener una desigualdad en la que p_1 es menor a una expresión que sólo depende de m y q_1).
- (d) (10 puntos) Suponiendo que los precios p_1 y q_1 satisfacen la anterior restricción en todo momento, y $p_2 = q_2 = K = 1$, también en todo momento ¿logra este modelo capturar el hecho de que el mismo agente es cliente flux y trafic en distintas situaciones? Argumente en no más de cinco renglones.
2. (40 puntos). Este problema intenta capturar algunos puntos acerca de las recientes medidas para activar las denominadas pequeñas y medianas empresas (Pymes). Una de ellas trata del tema de la reconversión empresarial y la capacitación. Leemos en el Clarín Económico del Domingo 16 de abril del 2000.

Desde el Gobierno se impulsa un Programa de Crédito Fiscal para capacitación, que contempla una inversión de 24 millones de pesos para dos millones de horas de capacitación. Pero donde todos los consultores tienen echado el ojo es en el desarrollo del Programa de Reconversión Empresarial (PRE), que cuenta con 200 millones de pesos aportados por el BID, el Estado Nacional y empresarios beneficiarios para financiar procesos de reestructuración. Este monto contempla la entrega de aportes no reembolsables de hasta el 50% de la inversión en proyectos de entre 75.000 pesos y 125.000 pesos. (Clarín Económico, 16/4/00, artículo de tapa).

El objetivo en este problema es analizar los efectos de este tipo de subsidios sobre los costos y la producción, como así también proveer algún criterio para determinar si el uso de este crédito para la reconversión de firmas puede realmente alcanzar su objetivo.

Suponga el dueño de una firma que opera en mercados de competencia perfecta. Esta firma produce tornillos de acero. Además de utilizar el metal como insumo básico necesita utilizar mano de obra y horas máquina. Nuestro problema, de todos modos, estará concentrado en un análisis de corto plazo en que las horas máquina están fijas. La función de producción es

$$y = x^{1/2} L^{1/4} \bar{K}^{1/4}$$

donde $\bar{K} = 1$ es la cantidad de horas máquina usadas, x la cantidad de kilos de acero, L las horas de mano de obra contratada e y los kilos de tornillos de acero. Denotemos w_L el salario por hora en miles de pesos por hora, w_x el precio de cada kilo de acero (en miles de pesos por kilo) y r el precio de cada hora máquina de capital (también en miles de pesos por hora máquina).

- (a) (10 puntos) Obtener la función de costo mínimo (de corto plazo, es decir, con $\bar{K} = 1$). Notar que ahora en el corto plazo hay dos variables sobre las que la firma tiene poder de decisión. (Ayuda: tome la igualdad

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} + 2^{1/3} = \frac{3}{2^{2/3}}$$

- (b) (8 puntos) Sea p el precio de cada kilogramo de tornillos. Obtenga la función de oferta de corto plazo, es decir, la cantidad y^* que maximiza beneficios de corto plazo (suponga que el costo asociado al capital fijo es inevitable). Calcule el beneficio máximo cuando $w_x = w_L = 1$, $r = 1/4$ y $p = 2$.
- (c) (15 puntos) Supongamos los mismos valores para los precios de los factores y de los tornillos. Suponga ahora que a través del plan a la que el párrafo anterior se refiere puede pedir prestado unos 100 mil pesos. La tasa de interés es del 5% a pagar en un año. Con este préstamo el dueño de la fábrica obtiene una nueva tecnología representada por

$$y = 5x^{1/2} L^{1/4} \bar{K}^{1/4}$$

con $\bar{K} = 1$. En ella observamos que se sigue usando el mismo tipo de capital y el mismo monto de corto plazo. Seguimos suponiendo que el costo asociado a $\bar{K} = 1$ es inevitable. ¿Es una buena idea para el dueño de esta firma realizar esta operación? Demuestre (matemáticamente) su respuesta. (Ayuda: $5^4 = 625$ y $624/4 = 156$).

- (d) (5 puntos) Supongamos ahora que tanto en la parte 2.b y 2.c el costo asociado a $\bar{K} = 1$ es evitable (es decir, que es cero si se produce cero). ¿Sufre alguna alteración su respuesta en 2.c?
3. (20 puntos) Hasta ahora hemos estudiado problemas de consumidor con funciones de utilidad en la que el consumo de ambos bienes puede ser cero. En la práctica esto no es así, al menos en términos absolutos. En este ejercicio el consumidor que tomamos es uno que tiene un mínimo nivel de consumo. Suponemos que

$$u = (x_1 - a_1)^{1/2} (x_2 - a_2)^{1/2}$$

si $x_l \geq a_l$ para ambos $l = 1, 2$, donde $a_l > 0$ es el mínimo consumo del bien l . Si para al menos un bien $x_l < a_l$ entonces la utilidad es cero.

- (a) (10 puntos total) Obtenga las demandas de x_1 y x_2 que maximizan la utilidad suponiendo que $x_l^* \geq a_l$. Demuestre cuidadosamente cada paso que realiza (5 puntos). ¿Cuál es la desigualdad que se debe cumplir para que el óptimo $x_1^* \geq a_1$? (3 puntos). ¿Cuál es la desigualdad que se debe cumplir para que el óptimo $x_2^* \geq a_2$? (2 puntos)
- (b) (10 puntos) Suponga las mismas condiciones que en 1.a. Si se duplican m , p_1 y p_2 , ¿es verdad que x_1^* y x_2^* son idénticos que si no se duplican los precios y el ingreso? Demuestre matemáticamente su respuesta.

Soluciones

1. .

- (a) Este problema fue hecho en clase, con lo cual doy simplemente la respuesta. Las demandas debieran ser

$$\begin{aligned}x_1^A &= \frac{m}{2q_1} \\x_2^A &= \frac{m}{2q_2}\end{aligned}$$

- (b) En este caso el problema es:

$$\max \quad x_1 x_2 - K$$

sujeto a

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Las CPO son idénticas a las de la parte a. Ya que la función de utilidad U^H es simplemente una Cobb-Douglas menos una constante, las curvas de indiferencia deben ser estrictamente convexas. Esto implica entonces que las demandas debieran ser

$$\begin{aligned}x_1^H &= \frac{m}{2p_1} \\x_2^H &= \frac{m}{2p_2}\end{aligned}$$

- (c) Deben computarse las utilidades indirectas de A y H . La primera es

$$V^A = \frac{m^2}{4q_1 q_2}$$

mientras que la segunda es

$$V^H = \frac{m^2}{4p_1 p_2} - K$$

Como $q_2 = p_2 = K = 1$ entonces

$$\begin{aligned}V^A &= \frac{m^2}{4q_1} \\V^H &= \frac{m^2}{4p_1} - 1\end{aligned}$$

Entonces prefiere ir al hipermercado si y solo si $V^H \geq V^A$. Esto es

$$\frac{m^2}{4p_1} - 1 \geq \frac{m^2}{4q_1}$$

o bien

$$\frac{m^2}{4p_1} \geq \frac{m^2 + 4q_1}{4q_1}$$

equivalente a

$$\frac{m^2 q_1}{m^2 + 4q_1} \geq p_1$$

- (d) No, ya que el modelo predice que si p_1 y q_1 satisfacen la anterior restricción entonces el agente prefiere ir al hipermercado. Entonces si esta restricción siempre se mantiene, el agente **nunca** irá al autoservicio.

2. .

- (a) Debemos resolver el siguiente problema de minimización:

$$\min \quad w_x x + w_L L$$

sujeto a

$$y = x^{1/2} L^{1/4}$$

Como esta función es de la familia de Cobb-Douglas, sabemos que sus isocuantas son estrictamente convexas. Para ahorrarnos el lagrangiano, ya sabemos del gráfico que la solución se obtiene de

$$\begin{aligned}\frac{w_x}{w_L} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) x^{-1/2} L^{1/4}}{\left(\frac{1}{4}\right) x^{1/2} L^{-1/4}} \\ &= 2 \frac{L}{x}\end{aligned}$$

entonces

$$L = x \frac{w_x}{2w_L}$$

Reemplazando esto en la restricción

$$y = x^{1/2} \left(x \frac{w_x}{2w_L} \right)^{1/4}$$

y entonces

$$x^{3/4} = y \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/4}$$

y entonces

$$x^* = y^{4/3} \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/3}$$

Así también obtenemos

$$\begin{aligned}L^* &= \left(\frac{w_x}{2w_L} \right) y^{4/3} \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/3} \\ &= y^{4/3} \left(\frac{w_x}{2w_L} \right)^{2/3}\end{aligned}$$

La función de costo mínimo es

$$\begin{aligned}C^* &= w_x x^* + w_L L^* + r \\ &= w_x y^{4/3} \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/3} + w_L y^{4/3} \left(\frac{w_x}{2w_L} \right)^{2/3} + r \\ &= y^{4/3} \left[w_x (w_x)^{-1/3} w_L^{1/3} 2^{1/3} + w_L (w_L)^{-2/3} w_x^{2/3} 2^{-2/3} \right] + r \\ &= y^{4/3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[2^{1/3} + 2^{-2/3} \right] + r \\ &= y^{4/3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] + r\end{aligned}$$

donde la última igualdad hace uso de la ayuda dada en la pregunta problema.

(b) Se debe ahora maximizar

$$py - y^{4/3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] - r$$

con respecto a y . La CPO es

$$p - \frac{4}{3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] y^{1/3} = 0$$

Antes de proseguir notar que el costo marginal

$$\frac{4}{3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] y^{1/3}$$

es creciente en y (si tiene alguna duda derive esta expresión con respecto a y y puede ver que esta derivada es positiva). Esto nos permite ver que las CSO se cumplen automáticamente. También puede verse que el $CMg > CMeV$. El costo medio variable es

$$\begin{aligned} CMeV &= w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] y^{1/3} \\ &< \frac{4}{3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] y^{1/3} \\ &= CMg \end{aligned}$$

con lo cual la firma, aún llando a pérdida, produce óptimamente cuando el precei es igual al costum-arginal en su porció rciente. Entonces de la CPO tenemos

$$y^{1/3} = \frac{2^{2/3} p}{4 w_L^{1/3} w_x^{2/3}}$$

y entonces la oferta del producto es

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{4p^3}{4^3 w_L w_x^2} \\ &= \frac{p^3}{16 w_L w_x^2} \end{aligned}$$

y la función de beneficio máximo es

$$\begin{aligned} \pi^* &\equiv p \frac{p^3}{16 w_L w_x^2} - w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] \left(\frac{p^3}{16 w_L w_x^2} \right)^{4/3} - r \\ &= \frac{p^4}{16 w_L w_x^2} - w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] \left(\frac{p^4}{16^{4/3} w_L^{4/3} w_x^{8/3}} \right) - r \\ &= \frac{p^4}{16 w_L w_x^2} - \frac{p^4}{w_L w_x^2} \frac{3}{4^{1/3} 4^{8/3}} - r \\ &= \frac{p^4}{16 w_L w_x^2} - \frac{p^4}{w_L w_x^2} \frac{3}{64} - r \\ &= \left(\frac{p^4}{w_L w_x^2} \right) \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{64} \right) - r \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{p^4}{w_L w_x^2} \right) - r \end{aligned}$$

Y para $w_L = w_x = 1$, $p = 2$ y $r = 1/4$ tenemos

$$\begin{aligned} \pi^* &= \frac{1}{64} 16 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

(c) Con esta función de producción debemos rehacer toda la parte *b*. Partimos otra vez de

$$\begin{aligned} \frac{w_x}{w_L} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) x^{-1/2} L^{1/4}}{\left(\frac{1}{4}\right) x^{1/2} L^{-1/4}} \\ &= 2 \frac{L}{x} \end{aligned}$$

con lo cual llegamos a que

$$L = x \frac{w_x}{2 w_L}$$

Reemplazando esto en la restricción

$$y = 5x^{1/2} \left(x \frac{w_x}{2w_L} \right)^{1/4}$$

y entonces

$$x^{3/4} = \frac{y}{5} \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/4}$$

y entonces

$$x^* = \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/3}$$

Así también obtenemos

$$\begin{aligned} L^* &= \left(\frac{w_x}{2w_L} \right) \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} \left(\frac{w_x}{2w_L} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

La función de costo mínimo es

$$\begin{aligned} C^* &= w_x x^* + w_L L^* + r \\ &= w_x^{4/3} \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} \left(\frac{2w_L}{w_x} \right)^{1/3} + w_L^{4/3} \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} \left(\frac{w_x}{2w_L} \right)^{2/3} + r \\ &= \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} \left[w_x (w_x)^{-1/3} w_L^{1/3} 2^{1/3} + w_L (w_L)^{-2/3} w_x^{2/3} 2^{-2/3} \right] + r \\ &= \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[2^{1/3} + 2^{-2/3} \right] + r \\ &= \left(\frac{y}{5} \right)^{4/3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] + r \end{aligned}$$

con lo cual en la maximización de beneficios ahora debemos llegar a

$$p - \frac{4}{3} w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] \left(\frac{1}{5} \right)^{4/3} y^{1/3} = 0$$

con lo cual

$$y^{1/3} = \frac{5^{4/3} 2^{2/3} p}{4 w_L^{1/3} w_x^{2/3}}$$

y

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{5^4 p^3}{16 w_L w_x^2} \\ &= \frac{625 p^3}{16 w_L w_x^2} \end{aligned}$$

y obtenemos así el beneficio máximo en este caso

$$\begin{aligned} \pi^{**} &= p \frac{625 p^3}{16 w_L w_x^2} - w_L^{1/3} w_x^{2/3} \left[\frac{3}{2^{2/3}} \right] \left(\frac{625 p^3}{(5)(16) w_L w_x^2} \right)^{4/3} - r \\ &= \frac{625 p^4}{16 w_L w_x^2} - \frac{(3)(5^4) p^4}{(64) w_L w_x} - r \\ &= \frac{625 p^4}{w_L w_x^2} \left(\frac{1}{64} \right) - r \end{aligned}$$

Y si aplicamos los valores de w_L , w_x , p y r tenemos

$$\begin{aligned}\pi^{**} &= 625 \frac{16}{64} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{625}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{624}{4} = 156\end{aligned}$$

Si la firma quisiera adoptar esta nueva tecnología debería tomatr prestado hoy 100 y maña (en el futuro) debería repagar $100 + 100 \cdot 0.05 = 105$. Como las ganancias son iguales a 156 entonces el valor (futuro) de invertir en esta nueva tecnología es positiva, igual a 56 mil pesos. El valor presente es $56/1.05 > 0$. Claramente, si no invierte en la nueva tecnología seguirá obteniendo beneficios creos. Esto implica que es conveniente invertir en la nueva tecnología.

- (d) La respuesta no depende de si el costo fijo es evitable. En el caso de que no produzca nada con cualquiera de las dos funciones de producción el beneficio es cero. Entonces si pide el préstamo y produce cero tiene un beneficio negativo. Si produce optimamente con la primera de las funciones su beneficio máximo también es cero. Si produce con la segunda sus beneficios (netos de la deuda) son positivos. Entonces producir donde el precio es igual al costo marginal en ambos casos es preferible a producir cero. Entonces sigue siendo cierto que es conveniente invertir en la nueva tecnología.

3. .

- (a) Debemos resolver

$$\max (x_1 - a_1)^{1/2} (x_2 - a_2)^{1/2}$$

sujeto a la restricción presupuestaria. Las CPO son

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} (x_1 - a_1)^{-1/2} (x_2 - a_2)^{1/2} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{1}{2} (x_1 - a_1)^{1/2} (x_2 - a_2)^{-1/2} - \lambda p_2 = 0\end{aligned}$$

junto con la restricción presupuestaria. Las CSO son

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} (x_1 - a_1)^{-3/2} (x_2 - a_2)^{1/2} & \frac{1}{4} (x_1 - a_1)^{-1/2} (x_2 - a_2)^{-1/2} & -p_1 \\ \frac{1}{4} (x_1 - a_1)^{-1/2} (x_2 - a_2)^{-1/2} & -\frac{1}{4} (x_1 - a_1)^{1/2} (x_2 - a_2)^{-3/2} & -p_2 \\ & -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

y su determinante es

$$\begin{aligned}&\frac{2}{4} (x_1 - a_1)^{-1/2} (x_2 - a_2)^{-1/2} p_1 p_2 + \frac{1}{4} (x_1 - a_1)^{1/2} (x_2 - a_2)^{-3/2} p_1^2 \\ &+ \frac{1}{4} (x_1 - a_1)^{-3/2} (x_2 - a_2)^{1/2} p_2^2\end{aligned}$$

y siendo que las cantidades que buscamos deben ser tal que $x_i^* > a_i$ entonces este determinante es positivo.

De las CPO entonces

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1}$$

lo cual implica que

$$p_2 x_2 = p_1 x_1 + p_2 a_2 - p_1 a_1$$

y reemplazando esto en la restricción presupuestaria

$$p_1 x_1 + p_1 x_1 + p_2 a_2 - p_1 a_1 = m$$

entonces

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{m + p_1 a_1 - p_2 a_2}{2p_1} \\ &= \frac{m}{2p_1} + \frac{a_1}{2} - \frac{p_2}{2p_1} a_2\end{aligned}$$

y la demanda del bien 2 es

$$\begin{aligned}x_2^* &= \left(\frac{m + p_1 a_1 - p_2 a_2}{2p_2} \right) + a_2 - \frac{p_1}{p_2} a_1 \\ &= \frac{m}{2p_2} + \frac{p_1 a_1}{2p_2} - \frac{a_2}{2} + a_2 - \frac{p_1}{p_2} a_1 \\ &= \frac{m}{2p_2} + \frac{a_2}{2} - \frac{p_1}{2p_2} a_1\end{aligned}$$

Entonces la condición que se nos pide es, en el caso del bien 1:

$$\frac{m}{2p_1} + \frac{a_1}{2} - \frac{p_2}{2p_1} a_2 > a_1$$

o bien

$$\frac{m}{p_1} > a_1 + \frac{p_2}{p_1} a_2$$

y así

$$m > p_1 a_1 + p_2 a_2$$

y de la otra restricción (paa el bien 2)

$$\frac{m}{2p_2} + \frac{a_2}{2} - \frac{p_1}{2p_2} a_1 > a_2$$

que, haciendo los mismos cálculos, se llega a la misma desigualdad

$$m > p_1 a_1 + p_2 a_2$$

Esto implica que el ingreso debe ser superior al gasto que se hace para comprar el mínimo de cada bien.

(b) Sí es verdad. Esto es así ya que

$$\begin{aligned}&\frac{2m}{2(2p_1)} + \frac{a_1}{2} - \frac{2p_2}{2(2p_1)} a_2 \\ &= \frac{m}{2p_1} + \frac{a_1}{2} - \frac{p_2}{2p_1} a_2\end{aligned}$$

y lo mismo con la demanda del bien 2

$$\begin{aligned}&\frac{2m}{2(2p_2)} + \frac{a_2}{2} - \frac{2p_1}{2(2p_2)} a_1 \\ &= \frac{m}{2p_2} + \frac{a_2}{2} - \frac{p_1}{2p_2} a_1\end{aligned}$$

Semestre Otoño 2000 (Universidad de San Andrés)

Sábado 29 de abril de 2000

1. (40 puntos) El siguiente artículo publicado en el diario Ambito Financiero expone la estrategia del Gobierno para el sector de carnes

Según el jefe del Departamento de Exportación de Carnes, Nicolás Lotrecchiano, el objetivo del departamento es el de buscar mercados alternativos diferenciados y marcar la diferencia a través de la calidad. También deben ofrecer lotes homogéneos con el fin de lograr una calidad constante y sustentable. Dentro del mercado interno ACABeef mantiene una presencia sostenida con cortes que poseen identificación de marca.

La calidad se convierte en protagonista del campo de la carne natural y de la carne orgánica. La carne natural es la que proviene de animales alimentados a pasto, sin el agregado de aceleradores de crecimiento y exentos de todo factor de stress. (Ambito Financiero 25/4/00).

El siguiente modelo intenta reflejar la conducta del consumidor de carne. Sea x_1 la cantidad de kilos de carne de mala calidad y x_2 los kilos de la de buena calidad. Sea p_l el precio en pesos por kilo de la carne tipo l . Por último m denota el ingreso en pesos. Suponga que $p_1 < p_2$. Esto refleja el hecho de que la carne argentina (de buena calidad) es más cara que la de otros países (más barata pero de peor calidad).

- (a) (10 puntos) Dé un ejemplo de función de utilidad tal que, con la condición $p_1 < p_2$ el consumidor siempre elige la carne de mala calidad. Este es el caso de los consumidores a los que no le importa la calidad. El único modo de venderles carne a éstos es reduciendo el precio.
- (b) (10 puntos) Es claro entonces que el Estado y los productores apuntan a consumidores que sí busquen calidad. Supongamos que las preferencias de un segundo grupo de consumidores son representadas por la siguiente función:

$$u = x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$$

¿Cuáles son las expresiones de las demandas óptimas (no compensadas)? Demuestre su respuesta.

- (c) (10 puntos) Definamos la proporción del ingreso gastada en la carne de buena calidad como la siguiente expresión.

$$\alpha_2 \equiv \frac{p_2 x_2^*}{m}$$

Obtenga la expresión explícita y obtenga la derivada de α_2 con respecto a p_2 , es decir,

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_2}$$

¿Qué signo posee esta última derivada?

- (d) (10 puntos) En base al resultado anterior, ¿cuál es el **porcentaje de cambio** en la proporción del ingreso gastado en la carne de buena calidad por **cada unidad porcentual de aumento** en su precio? (Tenga especial consideración de las letras en negrita)

2. (40 puntos) Los siguientes párrafos se extrajeron de la revista Mercado, en su edición on-line del 25/4/00.

Un grupo de profesionales de la comunicación de Córdoba estamos trabajando para darle forma a un proyecto que hasta ayer era un improbable futuro y hoy está a un paso de ser pasado. Estamos hablando de la Primera Agencia virtual de la Argentina.

No se trata de una prolongación en la Red de la tradicional agencia de publicidad. Se trata de un concepto diferente, desarrollado específicamente a partir de las características que Internet tiene como medio de comunicación y organización.

Hablamos, por otro lado, de cientos (o tal vez miles) de pequeñas y medianas empresas, a las que el mercado les exige, cada vez más, eficiencia en los costos y mejor desarrollo de sus comunicaciones para ser competitivas en un mundo global. Unos necesitan a los otros. Ahora, gracias a Internet, pueden encontrarse. (Revista Mercado-Edición On-Line, 25/4/00)

Este problema intenta explicar el rol del publicista en la producción y ventas, especialmente en el caso de una pequeña y mediana empresa. En este ejercicio la tecnología no sólo representa las posibilidades de producción sino también las de ventas. Tomemos el caso de una firma con una tecnología representada por la siguiente característica. Si no contrata a un publicista, su función de producción (y ventas) es

$$y^N = \alpha x_1^{1/5} x_2^{2/5}$$

donde $0 < \alpha < 1$. Aquí x_1 y x_2 son dos insumos variables. Sus precios son w_1 y w_2 respectivamente. Si contrata al publicista la función de producción / ventas es

$$y^P = x_1^{1/5} x_2^{2/5}$$

El costo de contratar al publicista es $r > 0$.

- (a) (10 puntos) Suponga que no contrata al publicista. Obtenga la función de costo mínimo en función de y^N , w_1 , w_2 .
- (b) (10 puntos) Suponga que sí contrata al publicista. Obtenga la función de costo mínimo en función de y^P , w_1 , w_2 y r .
- (c) (10 puntos) En ambos casos el precio de venta del producto es p . Obtenga la función de oferta de la firma si no contrata al publicista y obtenga luego la de la empresa si contrata al publicista.
- (d) (10 puntos) ¿Bajo qué circunstancias la empresa contratará al publicista? Suponga que si está indiferente entre contratar al publicista y no contratarlo elige finalmente contratar al publicista. Demuestre matemáticamente su respuesta. Con esta respuesta puede interpretarse entonces que el precio r del publicista tradicional hace que no sea óptimo para la firma contratar sus servicios, pero sí lo es en el caso del servicio de la agencia virtual.
3. (20 puntos) Un agente consume tres bienes. La cantidad consumida el bien $l = 1, 2, 3$ es x_l . Su ingreso es $m > 0$. Las demandas del agente por los bienes 1 y 2 son las siguientes.

$$\begin{aligned}x_1 &= 100 - 5\frac{p_1}{p_3} + \beta\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{m}{p_3} \\x_2 &= \alpha + \beta\frac{p_1}{p_3} + \gamma\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{m}{p_3}\end{aligned}$$

donde α , β , γ y δ son constantes positivas.

- (a) (10 puntos total). ¿Bajo qué supuesto sobre preferencias del agente se puede suponer que gasta todo su ingreso? (5 puntos). Dado este supuesto, compute la demanda del bien 3 (5 puntos).
- (b) (10 puntos) ¿Es verdad que si todos los precios y el ingreso se duplican la demanda del bien 3 queda igual? Demuestre su respuesta.

Solución Parcial del Sábado 29 de abril de 2000

1. (a) La función $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ tiene la propiedad requerida.
- (b) El problema se reduce a maximizar $x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$ sujeto a la restricción $p_1x_1 + p_2x_2 = m$. El Lagrangiano es $x_1^{1/2} + x_2^{1/2} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$. Las CPO son

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1^{-1/2} &= \lambda p_1 \\ \frac{1}{2}x_2^{-1/2} &= \lambda p_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 &= m\end{aligned}$$

De las dos primeras condiciones obtenemos

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2$$

con lo cual $x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$. Reemplazando en la restricción presupuestaria entonces

$$p_1x_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1 = m$$

o bien

$$x_1p_1\left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right] = m$$

con lo cual

$$x_1 = \frac{m}{p_1\left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right]}$$

y entonces

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \frac{m}{p_1 \left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right]} \\ &= \frac{mp_1}{p_2^2 \left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right]} \end{aligned}$$

Nos queda ver las CSO. La Matriz Hessiana es

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}x_1^{-3/2} & 0 & -p_1 \\ 0 & -\frac{1}{4}x_2^{-3/2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

y su determinante es

$$p_1^2 \left(\frac{1}{4}x_2^{-3/2}\right) + p_2^2 \left(\frac{1}{4}x_1^{-3/2}\right) > 0$$

con lo cual las funciones de demanda marshalliana son

$$\begin{aligned} x_1^m &= \frac{m}{p_1 \left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right]} \\ x_2^m &= \frac{mp_1}{p_2^2 \left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right]} \end{aligned}$$

(c) Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= p_2 \left(\frac{p_1}{p_2^2 \left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right]} \right) \\ &= \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right]} \\ &= \frac{p_1}{p_2 + p_1} \end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_2} = \frac{-p_1}{(p_1 + p_2)^2} < 0$$

(d) Pregunta entonces la elasticidad

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_2} p_2}{\alpha_2} \\ &= \frac{-p_1}{(p_1 + p_2)^2} \frac{p_2}{\left(\frac{p_1}{p_2 + p_1}\right)} \\ &= \frac{-p_2}{(p_2 + p_1)} \end{aligned}$$

2. (40 puntos)

(a) Directamente minimizamos $w_1x_1 + w_2x_2$ sujeto a $y^N = \alpha x_1^{1/5} x_2^{2/5}$. El Lagrangiano es $w_1x_1 + w_2x_2 + \mu \left(y^N - \alpha x_1^{1/5} x_2^{2/5}\right)$. Las CPO son

$$\begin{aligned} w_1 &= \mu \alpha \frac{1}{5} x_1^{-4/5} x_2^{2/5} \\ w_2 &= \mu \alpha \frac{2}{5} x_1^{1/5} x_2^{-3/5} \end{aligned}$$

y la restricción. De las dos primeras CPO obtenemos que

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{2x_1}$$

con lo cual $x_2 = 2x_1 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)$. Reemplazando esto en la restricción se obtiene que

$$\begin{aligned} y^N &= \alpha x_1^{1/5} \left(2x_1 \left(\frac{w_1}{w_2} \right) \right)^{2/5} \\ &= \alpha \left(2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right) \right)^{2/5} x_1^{3/5} \end{aligned}$$

con lo cual

$$x_1 = \left(\frac{y^N}{\alpha} \right)^{5/3} \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3}$$

y entonces

$$x_2 = \left(\frac{y^N}{\alpha} \right)^{5/3} \left(2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right) \right)^{1/3}$$

Dado que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas sabemos que sus isocuantas son estrictamente convexas, con lo cual las CSO se cumplirán automáticamente. Entonces la función de costo mínimo si no se contrata al publicista es

$$\begin{aligned} c^N &= \left(\frac{y^N}{\alpha} \right)^{5/3} [w_1^{1/3} w_2^{2/3}] \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} + 2^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{y^N}{\alpha} \right)^{5/3} [w_1^{1/3} w_2^{2/3}] \left(\frac{3}{2^{2/3}} \right) \end{aligned}$$

- (b) No tenemos que resolver todo de vuelta. Dado que la única diferencia es el factor *publicidad*, pero cuyo monto en este caso es fijo e igual a 1, entonces sabemos que las CPO son las mismas (con la diferencia de que en lugar de α tenemos directamente 1) con lo cual la función de costo mínimo en este caso es

$$c^P = (y^N)^{5/3} [w_1^{1/3} w_2^{2/3}] \left(\frac{3}{2^{2/3}} \right) + r$$

- (c) Si no se contrata al publicista se iguala

$$p = \frac{5}{3} (y^N)^{2/3} \alpha^{-5/3} [w_1^{1/3} w_2^{2/3}] \left(\frac{3}{2^{2/3}} \right)$$

Despejando y^N tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (y^N)^{2/3} &= \frac{3}{5} p \alpha^{5/3} \left(\frac{2^{2/3}}{3 [w_1^{1/3} w_2^{2/3}]} \right) \\ &= \frac{2^{2/3}}{5} \frac{\alpha^{5/3}}{[w_1^{1/3} w_2^{2/3}]} p \end{aligned}$$

Entonces

$$y^N = \frac{2}{5^{3/2}} \frac{\alpha^{5/2}}{w_1^{1/2} w_2} p^{3/2}$$

Si contrata entonces se obtiene que $\alpha = 1$ y entonces la función de oferta es

$$y^P = \frac{2}{5^{3/2}} \frac{1}{w_1^{1/2} w_2} p^{3/2}$$

En el primer caso el beneficio máximo es

$$\begin{aligned}
\pi^N &= p \frac{2}{5^{3/2}} \frac{\alpha^{5/2}}{w_1^{1/2} w_2} p^{3/2} - \left(\frac{2}{5^{3/2}} \frac{\alpha^{5/2}}{w_1^{1/2} w_2} p^{3/2} \right)^{5/3} [w_1^{1/3} w_2^{2/3}] \left(\frac{3}{2^{2/3}} \right) \\
&= \frac{2}{5^{3/2}} \frac{\alpha^{5/2} p^{5/2}}{w_1^{1/2} w_2} - \left(\frac{2^{5/3}}{5^{5/2}} \right) \frac{\alpha^{5/2} p^{5/2}}{w_1^{5/6} w_2^{5/3}} [w_1^{1/3} w_2^{2/3}] \left(\frac{3}{2^{2/3}} \right) \\
&= \frac{2}{5^{3/2}} \frac{\alpha^{5/2} p^{5/2}}{w_1^{1/2} w_2} - \left(\frac{6}{5^{5/2}} \right) \frac{\alpha^{5/2} p^{5/2}}{w_1^{1/2} w_2} \\
&= \left(\frac{\alpha^{5/2} p^{5/2}}{w_1^{1/2} w_2} \right) \left(\frac{2}{5^{3/2}} - \frac{6}{5^{5/2}} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha^{5/2} p^{5/2}}{5^{3/2} w_1^{1/2} w_2} \right) \left(2 - \frac{6}{5} \right) > 0
\end{aligned}$$

En el segundo caso el beneficio máximo es entonces

$$\pi^P = \left(\frac{p^{5/2}}{5^{3/2} w_1^{1/2} w_2} \right) \left(2 - \frac{6}{5} \right) - r$$

donde la diferencia es que $\alpha = 1$ con publicista pero se agrega el costo r de contratarlo.

(d) Se contrata al publicista si $\pi^P \geq \pi^N$ o bien

$$\left(\frac{p^{5/2}}{5^{3/2} w_1^{1/2} w_2} \right) \left(2 - \frac{6}{5} \right) - r \geq \left(\frac{\alpha^{5/2} p^{5/2}}{5^{3/2} w_1^{1/2} w_2} \right) \left(2 - \frac{6}{5} \right)$$

o bien

$$\left(\frac{p^{5/2}}{5^{3/2} w_1^{1/2} w_2} \right) \left(2 - \frac{6}{5} \right) (1 - \alpha^{5/2}) \geq r$$

Nótese que cuanto mayor es p , o bien cuanto menores sean w_1 o w_2 (ceteris paribus) entonces es más probable que esta desigualdad sea cierta pues en esos casos el lado izquierdo crecen con p y decrecen con los w_i .

3. .

(a) Bajo el supuesto de preferencias monótonas, o al menos de preferencias sin punto de saciedad (tipo complementos perfectos). En este caso entonces sabemos que

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = m$$

entonces

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{m}{p_3} - \frac{p_1}{p_3} x_1 - \frac{p_2}{p_3} x_2 \\
&= \frac{m}{p_3} - \frac{p_1}{p_3} \left(100 - 5 \frac{p_1}{p_3} + \beta \frac{p_2}{p_3} + \delta \frac{m}{p_3} \right) - \frac{p_2}{p_3} \left(\alpha + \beta \frac{p_1}{p_3} - \gamma \frac{p_2}{p_3} + \delta \frac{m}{p_3} \right)
\end{aligned}$$

(b) Sí: si se duplican m , p_1 , p_2 y p_3 tenemos que

$$x_3 = \frac{2m}{2p_3} - \frac{2p_1}{2p_3} \left(100 - 5 \frac{2p_1}{2p_3} + \beta \frac{2p_2}{2p_3} + \delta \frac{2m}{2p_3} \right) - \frac{2p_2}{2p_3} \left(\alpha + \beta \frac{2p_1}{2p_3} - \gamma \frac{2p_2}{2p_3} + \delta \frac{2m}{2p_3} \right)$$

con lo cual los 2 se cancelan y obtenemos nuevamene

$$\frac{m}{p_3} - \frac{p_1}{p_3} \left(100 - 5 \frac{p_1}{p_3} + \beta \frac{p_2}{p_3} + \delta \frac{m}{p_3} \right) - \frac{p_2}{p_3} \left(\alpha + \beta \frac{p_1}{p_3} - \gamma \frac{p_2}{p_3} + \delta \frac{m}{p_3} \right)$$

Semestre Otoño 2001. (Universidad de San Andrés) - 26 de abril, 2001

1. (Total. 20 puntos) Ana necesita vitaminas A y B. Su bienestar está dado por la siguiente función:

$$u(a, b) = e^{ab^3} + 2001$$

donde a son los mg. de vitamina A que consume y b son los mg. de vitaminas B que consume.

En el mercado hay dos frutas; las manzanas (x_1) y las peras (x_2). Cada manzana contiene 3 mg. de vitamina A, y cada pera tiene 4 mg. de vitamina B.

- (a) (5 puntos) Encuentre las demandas marshallianas por manzanas y peras de Ana. Grafique.
- (b) (5 puntos) Calcule la elasticidad-precio de la demanda marshalliana por manzanas. Interprete en no más de dos renglones (no leeré más de dos renglones).
- (c) (5 puntos) Aparece un nuevo bien en el mercado: las uvas (x_3). Cada uva contiene 5 mg. de vitamina B. Encuentre las demandas marshallianas por manzanas, peras y uvas de Ana.
- (d) (5 puntos) Ana tiene un ingreso de \$10368. Los precios de los bienes son: $(p_1, p_2, p_3) = (6, 8, 9)$. El gobierno está estudiando implementar una de las siguientes propuestas:
- Política I. Imponer a Ana un impuesto de \$2 a cada unidad consumida de manzanas (x_1) (suponga que todo el impuesto incidirá sobre Ana porque las ofertas son perfectamente elásticas).
- Política II. Imponer un impuesto de suma fija (cobrarle una vez una suma determinada de dinero) que genere la misma recaudación que la política I.
- ¿Qué política prefiere Ana? Demostrar analíticamente.
2. (Total. 20 puntos) La empresa NESQIK vende chocolatadas (y). Para elaborarlas, es necesario contar con chocolate (x_1) y leche (x_2). La función de producción es:

$$y = (\min \{3x_1, x_2\})^\alpha$$

donde $0 < \alpha < 1$ y los insumos están expresados en litros.

- (a) (5 puntos) Encuentre la función de costos.
- (b) (5 puntos) Encuentre la función de oferta.
- (c) (10 puntos) El vector de precios en la economía es $(p, w_1, w_2) = (10, 9, 7)$ y $\alpha = \frac{1}{2}$. El gobierno quiere imponer un impuesto de \$ t por cada litro comprado de leche (x_2). Dado que la oferta de leche es perfectamente elástica, todo el impuesto incidirá sobre los demandantes de leche. ¿Qué valor de t elegirá el gobierno si quiere maximizar la recaudación?
3. (Total: 30 puntos) El sector agropecuario claramente no pasa por su mejor momento. A propósito de esta realidad se lee en el artículo de Ernesto Amborsetti, publicado por el diario Ambito Financiero del 19 de abril último:

Para impulsar la confianza, la inversión, el consumo y mejorar la recaudación, deben reducirse las elevadas tasas efectivas de interés que rigen en el mercado de capitales; se debe eliminar el Impuesto a los Intereses, que actualmente se encuentra con una alícuota de 10% y que en el 30 de junio bajará a 8%, según las últimas modificaciones realizadas en el artículo 5 de la Ley 25.063. Es fundamental.

Este artículo se refiere a la *necesidad* de reducir impuestos para el agro a fin de que la confianza se vea revitalizada. Este problema intenta estudiar esta cuestión más formalmente. Supongamos un consumidor cuyos ingresos provienen de su actividad agropecuaria. Este consumidor vive en dos períodos, $t = 0$ y $t = 1$ (hoy y mañana, respectivamente). De todos modos sus preferencias sólo depende del consumo de dos bienes, llamados 1 y 2, consumidos en $t = 0$, y no depende de ningún consumo mañana. Tales preferencias están representadas por la función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = 8e^{10(x_1x_2)^2+5}$$

Este consumidor recibe 0 en $t = 0$ de ingresos y recibe un cierto M de ingresos (netos) en $t = 1$. Para poder consumir ambos bienes 1 y 2, debe pedir prestado al banco hoy un cierto monto tal que pueda ser devuelto con intereses mañana. Esta devolución obviamente sólo puede afrontarlo con el monto M antes mencionado. La tasa (neta) de interés es r . Además el gobierno le cobrará en $t = 1$ una proporción $\theta \in (0, 1)$ sobre los intereses pagados al banco.

- (a) (4 puntos) Deduzca la restricción presupuestaria que enfrenta el consumidor-productor en $t = 0$.
 - (b) (6 puntos) Obtenga las funciones de demanda marshallianas para los bienes 1 y 2. (Ayuda: puede evitar toda cuenta pero debe siempre justificar consistentemente la razón de su respuesta). Obtenga luego la función de utilidad indirecta del consumidor. ¿Es ésta creciente, decreciente o constante con respecto a M ? (Segunda ayuda: aquí también puede evitar cuentas)
 - (c) (3 puntos) Veamos ahora qué es M . Este consumidor nace en $t = 0$ sin dotación de bienes ni capital. Sólo posee una tecnología de producción $f(z)$, donde z es la cantidad de recursos prestados del banco en $t = 0$, y $f(z)$ representa la cantidad de soja producida entonces en $t = 1$. Supongamos que la soja no es ni el bien 1 ni el bien 2 mencionados antes. El precio de la soja en $t = 1$ se representa por q . El valor de M entonces debe ser igual al total de ingresos por ventas de la soja en $t = 1$ menos la devolución de la deuda contraída del banco que incluye los intereses. Sin embargo, como el Gobierno cobra el impuesto θ (mencionado arriba) sobre los intereses, entonces el productor - consumidor también debe deducir estos impuestos del total recibido por las ventas. Escriba la expresión matemática de M en función de q , θ , r y z .
 - (d) (5 puntos) Dada su respuesta en (3.b), con respecto a la relación entre la utilidad indirecta y M , ¿cuál debiera ser entonces el objetivo del consumidor-productor con respecto a M ? (No escriba más de dos renglones).
 - (e) (7 puntos) De acuerdo a 3.d, plantee entonces el problema del productor consistente con el objetivo expuesto en 3.d, donde el productor sólo puede elegir z . Plantee entonces las condiciones que caracterizan a la solución del problema planteado.
 - (f) (2 puntos) Suponga que $f(z) = 2z^{1/2}$. Obtenga entonces la expresión explícita de z (en función de (q, r, θ)) que resuelve el problema planteado en 3.e. Reemplace esta solución en la expresión de M .
 - (g) (3 puntos) Supongamos que $q = 1$. Comparemos dos situaciones. En la situación A , la tasa $r = 0.20$ y $\theta = 0.10$ (estos valores se condicen con valores promedio de mercado y con la alícuota actual). En la situación B la alícuota se reduce a $\theta = 0.08$ pero debido a que esto hace aumentar el riesgo país la tasa aumenta a $r = 0.40$. ¿En cuál situación el valor de M es superior?
4. (30 puntos) Este problema intenta dar una respuesta más formal a la pregunta de por qué una posibilidad de default implica una sobretasa, tal como se habla en la actualidad con respecto a la ya insistente cuestión del riesgo país. Supongamos un consumidor que vive dos períodos, $t = 0$ y $t = 1$. Sus preferencias dependen del consumo en $t = 0$ (consumo presente) y del consumo en $t = 1$ (consumo futuro). Sea c_0 el consumo presente y c_1 el consumo futuro. Las preferencias están representadas por la función de utilidad

$$u(c_0, c_1) = \ln c_0 + \beta \ln c_1$$

donde $0 < \beta < 1$. El consumidor recibe $\omega > 0$ en $t = 0$ y cero en $t = 1$. Tanto el consumo presente como el futuro (como así también la dotación) se expresan en unidades monetarias (pesos).

- (a) (5 puntos) Suponga primero que el consumidor tiene acceso a un banco que promete una tasa neta de interés por cada peso invertido de r . Sin embargo, en los hechos todos sabemos que el banco sólo paga una proporción $\eta \in (0, 1)$ del total de lo que este banco debería devolver a sus ahorristas. Escriba entonces la restricción presupuestaria intertemporal en valor presente y la misma restricción en valor futuro.
- (b) (10 puntos) Resuelva el problema del consumidor, dando como respuesta el consumo óptimo presente y también el del futuro en función de $(\beta, 1 + r, \eta, \omega)$, así como también escriba la función de ahorro óptima como función de las mismas variables. Escriba la función de utilidad indirecta.

- (c) (5 puntos) Suponga ahora que el consumidor, en lugar de invertir en el banco mencionado arriba, ahorra y deposita recursos en un banco que paga una tasa neta de interés i y devuelve la totalidad de lo que debe a sus ahorristas. Sin hacer ninguna cuenta, ni ninguna derivada, obtenga las funciones de consumo presente, consumo futuro y ahorro óptimo como funciones de $(\beta, 1 + i, \omega)$. Obtenga entonces la función de utilidad indirecta.
- (d) (10 puntos) Supongamos ahora que el consumidor tiene la alternativa de poner sus ahorros en el primer banco o en el segundo banco. En rigor las tasas son tales que este consumidor está *indiferente* entre colocar sus ahorros en uno o en otro banco. ¿Cuál es la igualdad que deben satisfacer las variables r , i y η para que esto ocurra? ¿Es entonces $r > i$? Demuestre matemáticamente su respuesta.

Soluciones del Parcial del 26 de abril de 2001

1. (Total. 20 puntos)

- (a) (5 puntos) Si utilizamos la transformación

$$f(u) = \ln(u - 2001)$$

entonces $f(u(a, b)) = ab^3$. Usaremos entonces esta transformación. Por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} a &= 3x_1 \\ b &= 4x_2 \end{aligned}$$

con lo cual la función queda ahora

$$U(x_1, x_2) = 4^3 3x_1 x_2^3$$

con lo cual nos queda una función tipo Cobb-Douglas con $\alpha = 1$, $\beta = 3$. Las funciones de demanda marshallianas son entonces

$$\begin{aligned} x_1^m &= \frac{m}{4p_1} \\ x_2^m &= \frac{3m}{4p_2} \end{aligned}$$

- (b) (5 puntos) Elasticidad precio:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_1^m}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1^m} \\ &= -\frac{m}{4p_1^2} \frac{p_1}{\left(\frac{m}{4p_1}\right)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Entonces, la demanda decrece un uno por ciento por cada unidad porcentual de aumento en p_1 . (La demanda decrece en el mismo porcentual en que crece el precio, para cambios en precio pequeños).

- (c) (5 puntos) Ahora tenemos que

$$b = 4x_2 + 5x_3$$

con lo cual la función de utilidad queda ahora

$$U = 3x_1 (4x_2 + 5x_3)^3$$

Notar que x_2 y x_3 son perfectos sustitutos. Esto es así pues la TMS entre x_2 y x_3 es simplemente

$$\frac{dx_3}{dx_2} = \frac{U_2}{U_3} = -\frac{4}{5}$$

que es constante. Notese también que la demanda por el bien 1 es la misma que antes. Esto es así pues si consideramos a la expresión $(4x_2 + 5x_3)$ como un bien *compuesto* entonces regresamos a una función Cobb-Douglas. Esto implica entonces que

$$x_1^m = \frac{m}{4p_1}$$

Con respecto a los otros dos bienes tendremos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_3} < \frac{4}{5} &\Rightarrow x_2^m = \frac{3m}{4p_2}; \quad x_3^m = 0 \\ \frac{p_2}{p_3} > \frac{4}{5} &\Rightarrow x_2^m = 0; \quad x_3^m = \frac{3m}{4p_3} \\ \frac{p_2}{p_3} = \frac{4}{5} &\Rightarrow (x_2^m, x_3^m) \in \left\{ (x_2, x_3) : p_2x_2 + p_3x_3 = \frac{3m}{4} \right. \\ &\quad \left. 0 \leq x_2 \leq \frac{3m}{4p_2} \right\} \end{aligned}$$

(d) (5 puntos) En la política I tenemos que la cantidad demandada es

$$\begin{aligned} x_1^m &= \frac{10368}{4(6+2)} \\ &= \frac{10368}{32} = 324 \end{aligned}$$

el total de recaudación es

$$324 * 2 = 648$$

Dado que $p_2/p_3 = 8/9 > 4/5$ entonces $x_2^m = 0$; $x_3^m = \frac{3*10368}{4*9} = 864$. Entonces la utilidad para Ana en esta política es

$$V^I = e^{3*125*(324)*(864)^3} + 2001$$

Con la política II tenemos que el ingreso neto de impuestos es $10368 - 648 = 9720$. Las nuevas demandas son

$$\begin{aligned} x_1^m &= 405 \\ x_3^m &= 810 \end{aligned}$$

y la utilidad indirecta es

$$V^{II} = e^{3*125*(405)*(810)^3} + 2001$$

Se demuestra que

$$(324) * (864)^3 < 405 * (810)^3$$

con lo cual Ana está mejor con la política II que con la I .

2. (Total. 20 puntos)

(a) (5 puntos) Despejamos de la función de producción

$$y^{\frac{1}{\alpha}} = \min \{3x_1, x_2\}$$

Sabemos que en el costo mínimo $3x_1 = x_2$ con lo cual

$$\begin{aligned} x_1^{\min} &= \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{3} \\ x_2^{\min} &= y^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

donde el supraíndice min denota las demandas por insumos que minimizan los costos. La función de costo mínimo es entonces

$$c(y, w_1, w_2) = y^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{w_1}{3} + w_2 \right)$$

(b) Sabemos que el costo marginal es

$$c_y = \frac{1}{\alpha} y^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} \left(\frac{w_1}{3} + w_2 \right)$$

y también que el costo medio es

$$Cme = y^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} \left(\frac{w_1}{3} + w_2 \right) = \alpha c_y$$

y como $\alpha < 1$ entonces para un mismo y tenemos que $Cme < c_y$. Además sabemos también que como $\alpha < 1$ entonces $\frac{1}{\alpha} > 1$ con lo cual el costo marginal es creciente en y . Entonces para obtener la oferta basta con igualar

$$p = \frac{1}{\alpha} y^{(\frac{1}{\alpha}-1)} \left(\frac{w_1}{3} + w_2 \right)$$

y entonces despejamos y

$$y^{(\frac{1}{\alpha}-1)} = \frac{\alpha p}{\left(\frac{w_1}{3} + w_2 \right)}$$

y entonces

$$y^s = \frac{(\alpha p)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{w_1}{3} + w_2 \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

(c) (10 puntos) La demanda por el insumo leche que minimiza los costos es simplemente

$$\begin{aligned} x_2^{\min} &= y^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{(\alpha p)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{w_1}{3} + w_2 \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \end{aligned}$$

Reemplazando por los valores de α , p y w_2 :

$$\begin{aligned} x_2^{\min} &= \frac{(5)^2}{(3 + w_2)^2} \\ &= \frac{25}{(3 + w_2)^2} \end{aligned}$$

El valor de w_2 es en realidad $7 + t$, pues debe incluir el impuesto mencionado. Entonces

$$\begin{aligned} x_2^{\min} &= \frac{25}{(3 + 7 + t)^2} \\ &= \frac{25}{(10 + t)^2} \end{aligned}$$

La recaudación en función de t es

$$R = tx_2^{\min} = \frac{25t}{(10 + t)^2}$$

Para maximizar derivamos R con respecto a t e igualamos a cero

$$\frac{25(10 + t)^2 - 50t(10 + t)}{(10 + t)^4} = 0$$

(Las CSO se cumplen, no hace falta chequearlos). Entonces nos quedamos con

$$25(10 + t) = 50t$$

o bien

$$10 + t = 2t$$

y entonces

$$t^{opt} = 10$$

3. (Total: 30 puntos).

(a) Sea D el total de deuda para consumo en $t = 0$. Este valor de D es lo que determina la restricción

$$D = p_1x_1 + p_2x_2$$

Sin embargo, ¿qué es D ? D debe ser tal que el total de lo que devuelva al banco más los impuestos debe ser igual al ingreso que percibo en $t = 1$, igual a M . Es decir

$$\begin{aligned} M &= D + Dr + Dr\theta \\ &= D(1 + r(1 + \theta)) \end{aligned}$$

con lo cual la restricción queda

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \frac{M}{(1 + r(1 + \theta))}$$

(b) La función de utilidad puede transformarse de la siguiente manera

$$f(u) = \left\{ \frac{[\ln(\frac{u}{8})] - 5}{10} \right\}^{1/2}$$

con lo cual nos queda $f(u(x_1, x_2)) = x_1x_2$. Como f' es positivo, entonces utilizamos esta transformación, que no es ni más ni menos que una función Cobb Douglas con $\alpha = \beta = 1$. Entonces las demandas marshallianas son

$$\begin{aligned} x_1^m &= \frac{\frac{M}{(1+r(1+\theta))}}{2p_1} = \frac{M}{2p_1(1+r(1+\theta))} \\ x_2^m &= \frac{M}{2p_2(1+r(1+\theta))} \end{aligned}$$

Y la función de utilidad indirecta es

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, M, (1 + r(1 + \theta))) \\ = 8e^{10\left(\frac{M^4}{16p_1^2p_2^2(1+r(1+\theta))^4}\right)+5} \end{aligned}$$

Vemos que el exponente de la función e es positivo y que es creciente en M , con lo cual V es creciente en M . Esto implica que el consumidor prefiere siempre más M .

(c) La expresión es

$$\begin{aligned} M &= qf(z) - z(1 + r) - zr\theta \\ &= qf(z) - z(1 + r(1 + \theta)) \end{aligned}$$

donde el primer término es el ingreso por ventas, el segundo término representa el monto que debe pagar al banco por la deuda contraída para la inversión y el último es el impuesto que debe pagar al Estado.

(d) El objetivo es simplemente maximizar M con respecto a z , pues cuanto mayor sea M mejor está el consumidor - productor.

(e) Condición de primer orden

$$qf'(z) = (1 + r(1 + \theta))$$

Condición de segundo orden

$$qf''(z) < 0$$

(f) De la Condición de primer orden obtenemos en este caso

$$qz^{-1/2} = 1 + r(1 + \theta)$$

con lo cual

$$z^{1/2} = \frac{q}{1 + r(1 + \theta)}$$

y

$$z = \frac{q^2}{(1 + r(1 + \theta))^2}$$

Reemplazando en M

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{2q^2}{(1+r(1+\theta))} - \frac{q^2}{(1+r(1+\theta))} \\ &= \frac{q^2}{(1+r(1+\theta))} \end{aligned}$$

Notese que la CSO se cumple automáticamente pues para todo $z > 0$

$$f''(z) = -\frac{1}{2}z^{-3/2} < 0$$

(g) La primer situación corresponde a

$$M^1 = \frac{1}{1+0.2(1.1)}$$

mientras que en la segunda

$$M^2 = \frac{1}{1+0.4(1.08)}$$

Tenemos que $0.2 * 1.1 = 0.22$ mientras que $0.4 * 1.08 = 0.432$. Con lo cual tenemos que

$$M^1 = \frac{1}{1.22} > \frac{1}{1.432} = M^2$$

con lo cual el valor de M es superior en la situación antes de bajar el impuesto.

4. (30 puntos).

(a) En el caso del banco mencionado, en $t = 0$ tenemos que $c_0 = \omega - s$, mientras que $t = 1$ tenemos que $c_1 = s(1+r)\eta$, pues el banco sólo paga el porcentaje η de todo lo que debería entregar al ahorrista, que es $s(1+r)$. La restricción intertemporal en valor futuro se deduce entonces

$$c_1 = (\omega - c_0)(1+r)\eta$$

o bien

$$\eta(1+r)c_0 + c_1 = \eta(1+r)\omega$$

y en valor presente

$$c_0 + \frac{c_1}{\eta(1+r)} = \omega$$

(b) Si aplicamos antilogaritmo natural a la función original de utilidad obtenemos una nueva función $U = c_0 c_1^\beta$, con lo cual arribamos a una función tipo Cobb Douglas. Entonces podemos directamente obtener las funciones de consumo presente y futuro de la fórmula general (con $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{\eta(1+r)}$). Entonces

$$\begin{aligned} c_0^* &= \frac{\omega}{1+\beta} \\ c_1^* &= \frac{\omega\beta\eta(1+r)}{1+\beta} \end{aligned}$$

y entonces la función de ahorro óptima es

$$s^* = \omega - \frac{\omega}{1+\beta} = \frac{\omega\beta}{1+\beta}$$

Y la función de utilidad indirecta, usando la función original $u = \ln c_0 + \beta \ln c_1$ es igual a

$$\begin{aligned} V &= \ln\left(\frac{\omega}{1+\beta}\right) + \beta \ln\left(\frac{\omega\beta\eta(1+r)}{1+\beta}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\omega}{1+\beta}\right) + \beta \ln\left(\frac{\omega\beta}{1+\beta}\right) + \beta \ln(\eta(1+r)) \end{aligned}$$

- (c) La única diferencia entre el caso b y el caso c es que la tasa prometida ya no es r sino i y además este banco cumple exactamente con lo que promete, con lo cual $\eta = 1$. Entonces las funciones son simplemente

$$\begin{aligned}\widehat{c}_0 &= \frac{\omega}{1+\beta} \\ \widehat{c}_1 &= \frac{\omega\beta(1+i)}{1+\beta} \\ \widehat{s} &= \frac{\omega\beta}{1+\beta} \\ \widehat{V} &= \ln\left(\frac{\omega}{1+\beta}\right) + \beta \ln\left(\frac{\omega\beta}{1+\beta}\right) + \beta \ln(1+i)\end{aligned}$$

- (d) Lo que debe ocurrir en este caso es $V = \widehat{V}$. Entonces

$$\ln\left(\frac{\omega}{1+\beta}\right) + \beta \ln\left(\frac{\omega\beta}{1+\beta}\right) + \beta \ln(\eta(1+r)) = \ln\left(\frac{\omega}{1+\beta}\right) + \beta \ln\left(\frac{\omega\beta}{1+\beta}\right) + \beta \ln(1+i)$$

o bien

$$\ln(\eta(1+r)) = \ln(1+i)$$

y entonces

$$\eta(1+r) = (1+i)$$

Esta es la igualdad que debemos observar. Entonces esto implica que

$$1+r = \frac{1+i}{\eta}$$

Como $\eta < 1$ entonces $\frac{1}{\eta} > 1$, y de la igualdad obtenemos que $1+r > 1+i$, con lo cual es verdad que $r > i$.

Primavera 2001 (Universidad de San Andrés)

Este ejercicio es una ilustración sobre el motivo de por qué existen los bancos. (Es en rigor una versión simplificada del modelo de Diamond y Dybvig, publicado en 1983 en el Journal of Political Economy). Supongamos una economía que dura tres períodos, denominados $t = 0, 1, 2$. Existen N consumidores, donde N es un número muy grande. Cada uno de estos recibe en 0 una dotación de *dólares* igual a $\omega > 0$ (cada consumidor recibe el mismo ω). Estos dólares pueden ser guardados en el colchón en cualquier período para el futuro, con lo cual, por cada dólar guardado en t ($t = 0, 1$) se obtiene exactamente un dólar en el período subsiguiente. En $t = 0$ también existe la posibilidad de invertir en un activo de largo plazo (aunque esta posibilidad de inversión sólo existe en $t = 0$, no existe esta posibilidad en $t = 1$). La idea es que por cada dólar invertido en $t = 0$ en este activo, entonces en $t = 2$ obtiene $R > 1$ dólares. Si se deseara liquidar este activo en $t = 1$ entonces por cada dólar invertido en 0 se obtienen r dólares en $t = 1$, donde $0 < r < 1$. Todas las decisiones de inversión se realizan en el período 0 y no puede invertir por encima de ω dólares (no puede pedir prestado en 0 a nadie). Al comienzo del período 1 una proporción λ de los consumidores se convierten en lo que llamamos *impacientes* y el resto en los llamados *pacientes*. Suponemos $0 < \lambda < 1$. A su vez cada consumidor tiene la probabilidad λ de convertirse en impaciente y la probabilidad $1 - \lambda$ de convertirse en paciente. Cada consumidor impaciente tiene preferencias exclusivamente por *dólares* consumidos en $t = 1$. Sea $u(c_1)$ la función de utilidad de cualquier impaciente. Cada consumidor paciente tiene preferencias exclusivamente por *dólares* consumidos en $t = 2$. Sea $u(c_2)$ la función de utilidad de cualquier paciente. Entonces, la utilidad esperada para cualquier consumidor en el período 0 es $\lambda u(c_1) + (1 - \lambda) u(c_2)$. Sea $u(c) = \ln c$.

- (10 puntos) Supongamos que cada consumidor debe decidir cuánto de ω invertir en el activo y cuánto guardar en el colchón. Sea k la cantidad de dólares invertidos en el activo y b los guardados en el colchón. Escriba la restricción presupuestaria del consumidor en 0, escriba c_1 en función de k , b y r , y escriba c_2 en función de k , b y R .

2. (10 puntos) Escriba el problema del consumidor que elige óptimamente b y k .
3. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden del problema y despeje k de aquí en función de r, R, λ y ω .
4. (10 puntos) ¿Podemos afirmar que las elecciones del punto 3 son óptimas? ¿Por qué? (Demuestre)
5. (10 puntos) Obtenga también el monto óptimo de b en función de r, R, λ y ω , como así también los consumos c_1 y c_2 que surgen de estas inversiones óptimas. Escriba entonces el valor de la utilidad esperada con estos valores de c_1, c_2 (con lo cual la utilidad esperada debe quedar en función de r, R, λ, ω).
6. (10 puntos) Supongamos el siguiente arreglo. Existe una institución que opera en favor de los N consumidores, llamando *banco*. Este banco ofrece un contrato a cada consumidor. A través de éste, cada agente deposita enteramente ω dólares en el banco en $t = 0$. Este le promete a cada consumidor impaciente c_1^* dólares en $t = 1$ y, si es paciente y espera hasta el período 2, el banco promete c_2^* dólares. Este banco toma la totalidad de los depósitos en 0 e invierte k dólares en el activo de largo plazo y el resto los guarda en la caja de seguridad. Estos dólares se reservan *exclusivamente y únicamente* para el pago a todos los consumidores impacientes que van al banco en $t = 1$ para obtener (cada uno) los c_1^* dólares prometidos. Sabemos (por los supuestos) que hay un total de $N\pi$ consumidores impacientes en $t = 1$, con lo cual $N\pi c_1^*$ es el total de dólares que el banco debe pagar en $t = 1$. Por su parte, lo invertido en el activo se destina *exclusivamente y únicamente* al pago de los consumidores pacientes que esperan hasta el período 2 para ir a retirar cada uno los c_2^* dólares prometidos a cada consumidor paciente. Dado que hay un total de $N(1 - \pi)$ consumidores pacientes desde el periodo 1, entonces $N(1 - \pi)c_2^*$ es el total de dólares que debe pagar el banco a los consumidores impacientes. Escriba la restricción presupuestaria del banco en los períodos 0, 1 y 2.
7. (10 puntos) El objetivo del banco es maximizar la *suma* de las utilidades esperadas de todos los N consumidores al período 0. Escriba el problema de maximización del banco, invidualizando las variables que el banco elige.
8. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden.
9. (10 puntos) Suponiendo que las condiciones de segundo orden se cumplen, obtenga c_1^*, c_2^* en función de λ, R y ω . Obtenga también las elecciones óptimas de b y k .
10. (10 puntos) Reemplace los valores óptimos de c_1^*, c_2^* en la utilidad esperada de un consumidor cualquiera. ¿Bajo qué condiciones es esta utilidad esperada mayor que en el punto 5?

Semestre de Otoño 2004. (Universidad de San Andrés)

1. (60 puntos) Jorge se considera una persona trabajadora. Él posee un total de L horas mensuales que puede destinar a trabajar (l) o al ocio (o). Obtiene utilidad tanto del ocio como del consumo ($c = wl$), donde w es el salario (constante) que recibe. Sus preferencias son representables por la siguiente función de utilidad:

$$u(c, o) = c^\alpha o^\beta$$

- (a) (10 puntos) Plantee el problema de maximización de utilidad de Jorge y obtenga la cantidad de horas que trabajará por mes $l^*(w, L)$ y el consumo que hará cada mes $c^*(w, L)$.
- (b) (5 puntos) Indique cómo se alteran las horas trabajadas y el consumo cuando se modifica el salario. ¿Qué opina acerca de la concepción que posee Jorge de sí?
- (c) (10 puntos) Martín posee unas preferencias similares a las de Jorge, excepto que también posee la posibilidad de comprar una casa (h). La variable h puede tomar sólo dos valores: $h = 1$ si Martín compra la casa y $h = 0$ si no la compra. Martín valora la casa en v_i . En consecuencia, su consumo es: $c = wl - ph$, donde p es el precio de la casa. Afortunadamente, se conocen los parámetros de la función de utilidad de Martín:

$$u(c, o) = c^{\frac{1}{2}} o^{\frac{1}{2}} + v_i h$$

Plantee el problema de maximización de utilidad de Martín.

- (d) (10 puntos) Obtenga la cantidad de horas $l^*(h)$ que trabajará por mes. Muestre que si compra la casa, trabajará: $l^*(1) = \frac{1}{2}(L + \frac{p}{w})$ horas y que si no lo hace, trabajará: $l^*(0) = \frac{L}{2}$ horas.
- (e) (10 puntos) Suponga a partir de ahora que $L = 1$ y que $w = 1$. Suponga que $p < 1$. Muestre que Martín comprará la casa siempre que:
- $$v_i > \frac{p}{2}$$
- (f) (5 puntos) Calcule la función de utilidad indirecta. Indique de qué variables depende.
- (g) (10 puntos) Suponga ahora que Martín ya trabajó $l^*(0) = \frac{1}{2}$. Dado esto, ¿para qué precios le conviene comprar una casa?
2. (40 puntos) En el semanario *El Economista* del día 16 de abril de 2004, en su página 5 aparece un artículo titulado “La productividad también importa”. En el mismo puede leerse en uno de sus párrafos:

Si se toma en cuenta la evolución de la productividad laboral, se tiene que pese al tremendo ajuste del empleo que hizo la economía hasta 2002, el valor agregado por puesto de trabajo en 2003 se ubicaba todavía casi en el 4% por debajo de los niveles de 1997. Esto es para el promedio de la economía.

Nótese que el autor del artículo compara la productividad *media* del trabajo entre un año pre-devaluación (nominal) con la que se verifica en un año posterior a la devaluación. El ejercicio muestra cómo es posible que la reducción de la productividad media podría deberse a un cambio en los precios relativos. Supongamos una firma que produce maíz. La firma utiliza dos factores o insumos, llamados 1 y 2. Interpretamos a 1 como el trabajo y a 2 como otros factores. Sean x_1 y x_2 las cantidades de insumos utilizados por la firma. La firma utiliza una tecnología representada por la siguiente función de producción:

$$y = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

donde y es la cantidad de maíz producida por la empresa. Supongamos que el análisis lo realizamos en un corto plazo donde $x_2 = \bar{x}_2 = 1$. Todos los precios (los de los insumos y el del maíz) son tomados como dados por la firma. Sean los precios de los insumos w_1 y w_2 (en pesos) respectivamente. Sea el precio del maíz igual a p , que se supone igual a ep^* , donde p^* es el precio internacional (en dólares) y e es el tipo nominal de cambio (pesos por dólar).

- (a) (5 puntos) Obtenga el valor de x_1 que minimiza el costo de producir y toneladas de maíz. Obtenga el costo mínimo de producir estas y unidades como función de y , w_1 y w_2 .
- (b) (5 puntos) Plantee el problema de producción óptima (que maximiza beneficios extraordinarios). Obtenga las condiciones de primero y segundo orden que corresponden a la solución de dicho problema. Chequee también la condición de $p \geq CM_eV$.
- (c) (5 puntos) De la CPO de la parte (2) despeje y en función de p y w_1 (ésta es la función de oferta de la firma)
- (d) (5 puntos) Utilice su respuesta en (1) y en (3) para obtener el valor de x_1 consistente con la producción óptima y que será función de w_1 y p . Muestre matemáticamente que si p aumenta x_1 lo hará también.
- (e) (5 puntos) Obtenga y/x_1 como función de w_1 y p a partir de sus respuestas en (3) y (4).
- (f) (5 puntos) Demuestre que el cociente y/x_1 obtenido en el punto anterior *decrece* con p , ceteris paribus.
- (g) (10 puntos) Supongamos que e aumenta un infinitésimo y que w_1 y p^* no cambian. De acuerdo a la respuesta en f, y/x_1 decrece, aunque x_1 e y aumenten. Para entender la intuición de este resultado, a partir de la función de producción (y de ninguna otra cosa) muestre qué relación existe (si creciente o decreciente) entre x_1 y el cociente y/x_1 que surge de la función de producción de corto plazo. Explique entonces en no más de veinte palabras (no leeré más que veinte) por qué un aumento en e , y por ende en p , ceteris paribus, disminuye y/x_1 .

Soluciones

1. (a) Jorge debe resolver:

$$\begin{aligned} \max_{c,o} u(c,o) &= c^\alpha o^\beta \\ \text{s.a.} \quad l + o &= L \\ c &= wl \end{aligned}$$

La forma más sencilla de reescribir este problema es:

$$\max_l u(l) = (wl)^\alpha (L-l)^\beta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(l)}{\partial l} &= \alpha (wl)^{\alpha-1} (L-l)^\beta w + \beta (wl)^\alpha (L-l)^{\beta-1} (-1) = 0 \\ \implies \alpha (wl)^{\alpha-1} (L-l)^\beta w &= \beta (wl)^\alpha (L-l)^{\beta-1} \\ \implies \alpha (wl)^{-1} w &= \beta (L-l)^{-1} \implies \alpha w (L-l) = \beta wl \implies \alpha L - \alpha l = \beta l \implies \alpha L = (\alpha + \beta) l \implies \end{aligned}$$

$$l^*(L) = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} L$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} c^*(w, L) &= w * l^*(L) \\ c^*(w, L) &= w \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} L \end{aligned}$$

(b) Dado que la cantidad trabajada no depende del salario:

$$\frac{\partial l^*(L)}{\partial w} = 0$$

No obstante, el consumo sí se altera. Jorge trabaja lo mismo pero el valor de cada hora trabajada es mayor. En consecuencia:

$$\frac{\partial c^*(w, L)}{\partial w} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} L$$

(c) Ahora el problema a resolver puede escribirse:

$$\max_l (wl - ph)^{\frac{1}{2}} * (L-l)^{\frac{1}{2}} + v_i h$$

Resolviendo como en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial l} &= (wl - ph)^{\frac{1}{2}} * \frac{1}{2} (L-l)^{-\frac{1}{2}} * (-1) + \frac{1}{2} w (wl - ph)^{-\frac{1}{2}} (L-l)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l} &= -\frac{1}{2} (wl - ph)^{\frac{1}{2}} \frac{(L-l)^{\frac{1}{2}}}{(L-l)} + \frac{1}{2} w \frac{(wl - ph)^{\frac{1}{2}}}{(wl - ph)} (L-l)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ \implies -\frac{1}{(L-l)} + w \frac{1}{(wl - ph)} &= 0 \implies \frac{1}{(L-l)} = w \frac{1}{(wl - ph)} \implies wl - ph = w(L-l) \implies l - \frac{p}{w} h = L - l \\ \implies 2l &= \frac{p}{w} h + L \implies \end{aligned}$$

$$l(h) = \frac{1}{2} \left(L + \frac{p}{w} h \right)$$

En consecuencia:

$$l^*(1) = \frac{1}{2} \left(L + \frac{p}{w} \right), \quad l^*(0) = \frac{L}{2}$$

(d) Si $w = 1$ y $L = 1 \Rightarrow l^*(1) = \frac{1}{2} + \frac{p}{2}$ y $l^*(0) = \frac{1}{2}$. Sabemos que Martín comprará si:

$$u(h = 1, l^*(1)) > u(h = 0, l^*(0))$$

$$\begin{aligned} \text{En consecuencia, obtenemos primero el valor de: } u(h = 1, l^*(1)) &= (wl^*(1) - p)^{\frac{1}{2}} * (L - l^*(1))^{\frac{1}{2}} + v_i \\ \implies u(h = 1, l^*(1)) &= (l^*(1) - p)^{\frac{1}{2}} * (1 - l^*(1))^{\frac{1}{2}} + v_i \implies u(h = 1, l^*(1)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2} - p \right)^{\frac{1}{2}} * \\ (1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2} \right))^{\frac{1}{2}} + v_i &\implies u(h = 1, l^*(1)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2} \right)^{\frac{1}{2}} * \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + v_i \implies \end{aligned}$$

$$u(h = 1, l^*(1)) = \frac{1}{2} - \frac{p}{2} + v_i$$

Y luego el valor de:

$$u(h = 0, l^*(0)) = (wl^*(0))^{\frac{1}{2}} * (L - l^*(0))^{\frac{1}{2}} \implies$$

$$u(h=0, l^*(0)) = (l^*(0))^{\frac{1}{2}} * (1 - l^*(0))^{\frac{1}{2}} \implies u(h=0, l^*(0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} * \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \implies$$

$$u(h=0, l^*(0)) = \frac{1}{2}$$

Finalmente, comparamos:

$$u(h=1, l^*(1)) > u(h=0, l^*(0))$$

$$\frac{1}{2} - \frac{p}{2} + v_i > \frac{1}{2}$$

$$v_i > \frac{p}{2}$$

Si $v_i > \tilde{v} = \frac{p}{2} \implies$ el individuo compra

(e) Para valores de L y w no necesariamente iguales a 1 la utilidad máxima de $h = 1$ es

$$u(h=1, l^*(1)) = \frac{1}{2} (wL - p)^{\frac{1}{2}} \left(L - \frac{p}{w}\right)^{1/2} + v_i$$

y cuando $h = 0$ es

$$u(h=0, l^*(0)) = \frac{L}{2} (w)^{\frac{1}{2}}$$

La utilidad indirecta en este caso es simplemente

$$V(w, p, L) = \max \left\{ \frac{L}{2} (w)^{\frac{1}{2}} ; \frac{1}{2} (wL - p)^{\frac{1}{2}} \left(L - \frac{p}{w}\right)^{1/2} + v_i \right\}$$

En el caso de $w = L = 1$, simplemente deben tenerse en cuenta los dos casos posibles:

$$v(\cdot) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{p}{2} + v_i & \text{si } v_i > \frac{p}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } v_i \leq \frac{p}{2} \end{cases}$$

Lo relevante aquí es que indiquen que NO depende de l . Con precisión, es $v(p, v_i)$

(f)

$$u = (wl^*(0) - ph)^{\frac{1}{2}} * (L - l^*(0))^{\frac{1}{2}} + v_i h$$

$$u = (l^*(0) - ph)^{\frac{1}{2}} * (1 - l^*(0))^{\frac{1}{2}} + v_i h$$

$$u = \left(\frac{1}{2} - ph\right)^{\frac{1}{2}} * \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + v_i h$$

$$u = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - ph\right)^{\frac{1}{2}} + v_i h$$

Evaluamos la expresión si no compra: $u(0|l^*(0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, y luego si compra: $u(1|l^*(0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - p\right)^{\frac{1}{2}} + v_i$. Observaremos que él comprará siempre que se cumpla:

$$u(1|l^*(0)) \geq u(0|l^*(0)) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - p\right)^{\frac{1}{2}} + v_i \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$v_i \geq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - p\right)^{\frac{1}{2}}$$

equivalente a:

$$v_i \geq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p}{2}}$$

2. .

- (a) Dado que en el corto plazo $x_2 = 1$ entonces la función de producción en el corto plazo es $y = x_1^{1/2}$. Despejando x_1 obtenemos $x_1 = y^2$. La función de costo mínimo entonces es simplemente

$$c(y, w_1, w_2) = w_1 y^2 + w_2$$

- (b) La firma produce un monto y que maximice $py - w_1 y^2 - w_2$. La condición de primer orden es simplemente que $p - 2w_1 y = 0$. La derivada segunda de la función a maximizar con respecto a y es simplemente $-2w_1 < 0$, con lo cual se cumple la condición de segundo orden. Nótese que el costo marginal es $2w_1 y$. El costo medio total es $w_1 y^2$ con lo cual $CMeV = w_1 y$. Pero entonces $CMg = 2w_1 y > w_1 y = CMeV$, esto siendo cierto para todo $y > 0$. Dado que en el óptimo $p = CMg$ entonces se verifica que $p > CMeV$.

- (c) De la condición de primer orden $p - 2w_1 y = 0$ despejamos y obteniendo $y^* \left(\frac{p}{w_1} \right) = \frac{p}{2w_1}$, siendo ésta la función de oferta de la firma.

- (d) De la respuesta en 1 sabemos que $x_1 = y^2$ pero entonces reemplazamos aquí por la respuesta en 3 : $x_1^* \left(\frac{p}{w_1} \right) = \left(y^* \left(\frac{p}{w_1} \right) \right)^2 = \frac{p^2}{4w_1^2}$. Claramente $\frac{\partial x_1^*}{\partial p} = \frac{2p}{4w_1^2} = \frac{p}{2w_1^2} > 0$.

- (e) Calculamos

$$\frac{y^*}{x_1^*} = \frac{\frac{p}{2w_1}}{\frac{p^2}{4w_1^2}} = \frac{2w_1^2}{p} = 2w_1^2 p^{-1}$$

- (f) Vemos directamente que $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{y^*}{x_1^*} \right) = -\frac{2w_1^2}{p^2} < 0$.

- (g) La idea es que si en el corto plazo la tecnología es tal que $y = x_1^{1/2}$ entonces $\frac{y}{x_1} = \frac{x_1^{1/2}}{x_1} = \frac{1}{x_1^{1/2}} = x_1^{-1/2}$.

Esto significa que la productividad media de $x_1 \left(\frac{y}{x_1} \right)$ es decreciente con respecto a x_1 . Pero por la respuesta en (d) sabemos que si p aumenta entonces lo hace x_1 . En consecuencia, si p aumenta debe aumentar el uso del insumo 1 pero entonces su productividad media debe ser menor.

Semestre de Otoño 2005. (Universidad de San Andrés)

Uno de los problemas actuales con los que se enfrenta el Gobierno es el de los tenedores de bonos en default que no aceptaron los nuevos bonos en el canje. Este ejercicio pretende mostrar bajo qué condiciones podemos entender semejante decisión por medio de una aplicación de la extensión del modelo neoclásico de decisión del consumidor a un contexto riesgoso. Suponga el caso de un consumidor que en el presente ($t = 0$) es dueño de un stock de deuda del Estado argentino igual a B dólares. En este mismo presente, este consumidor tiene dos opciones: aceptar el canje o no aceptar. Si acepta, el consumidor recibe un stock $\bar{B} \leq B$ de bonos que promete pagar por unidad $R > 1$ dólares en el futuro ($t = 1$). Sin embargo, el consumidor percibe que esto ocurrirá con probabilidad $\pi \in (0, 1)$. Con la probabilidad remanente el nuevo bono pagará sólo r dólares por unidad, donde $r \in (0, 1)$. Si no acepta el canje, el consumidor directamente inicia acciones legales al Estado argentino. Percibe que con probabilidad $\lambda \in (0, 1)$ ganará el juicio y cobrará los B dólares a los que inicialmente este acreedor tenía derecho, y con probabilidad remanente no gana el juicio y cobra 0. Este agente tiene preferencias sobre planes de consumo contingentes en $t = 1$, y las mismas pueden representarse bajo la forma de una función de utilidad esperada. Sea (c_R, c_r) el plan de consumo contingente si acepta el canje (donde c_R es el consumo si el nuevo bono paga R y c_r es lo propio cuando paga sólo r) y sea (c_G, c_P) el que se deriva de no aceptar el canje (en el primer caso se trata del consumo si gana el juicio, en el segundo si lo pierde). La función de utilidad dado el consumo c_i en cualquier contingencia i es $\sqrt{c_i}$. Este agente acepta el canje si y solo si la utilidad esperada de aceptar el canje es al menos tan grande como la de no aceptarlo.

1. (5 puntos) Supongamos que inicialmente el agente no tiene más opciones que las mencionadas en el párrafo anterior. ¿A qué debe ser igual c_R , c_r , c_G y c_P respectivamente?
2. (10 puntos) Escriba cuidadosamente la utilidad esperada de aceptar el canje (5 puntos) y la de no aceptarla (5 puntos)

3. (15 puntos) Demuestre que el consumidor decide no aceptar el canje si y solo si λ es estrictamente mayor que una expresión que depende de otros parámetros del ejercicio. Denominemos a esta expresión λ^* .
4. (10 puntos) ¿Bajo qué condición $\lambda^* \in (0, 1)$?
5. (10 puntos) Supongamos a partir de este punto y hasta el final del ejercicio que, de aceptar el canje, existen en $t = 0$ dos activos financieros. El consumidor puede comprar o vender en corto todas las unidades que quiera, siempre y cuando respete la restricción presupuestaria de $t = 0$. Un activo financiero promete pagar 1 dólar por unidad si el bono nuevo paga R , 0 si paga r . El otro activo financiero promete pagar 1 dólar por unidad si el bono nuevo paga r , 0 si paga R . (A este tipo de activos se los denomina comunmente *activos de Arrow*, por Kenneth Arrow, premio nobel de Economía). Sean los precios respectivos q_R y q_r . Sean las cantidades respectivas θ_R y θ_r . Dado que este consumidor no tiene recursos en $t = 0$, la restricción que deben cumplir estas cuatro variables en $t = 0$ es $q_R\theta_R + q_r\theta_r = 0$ Comente (interprete) esta restricción en no más de tres renglones.
6. (10 puntos) De acuerdo a lo descrito en el punto 5 puede escribirse ahora $c_R = \bar{B}R + \theta_R$ y $c_r = \bar{B}r + \theta_r$. Supongamos la situación en el que el consumidor haya aceptado el canje, suponiendo disponibles estos activos de Arrow. Obtenga los valores de θ_R y θ_r que maximizan la utilidad esperada si acepta el canje.
7. (10 puntos) Supongamos que $q_R = \pi$, $q_r = 1 - \pi$. Reemplazando estos valores en las soluciones en , demuestre que $c_R^* = c_r^*$. En no más de dos renglones, relacione este resultado con lo que vimos en clase acerca de la prima actuarialmente justa.
8. (5 puntos) Reemplace el resultado anterior en la utilidad esperada respectiva para obtener la utilidad esperada (indirecta) de aceptar el canje.
9. (10 puntos) Rehaga el punto 3, en este caso, esto es, demuestre que el consumidor decide no aceptar el canje si y solo si λ es estrictamente mayor que otra expresión que depende de otros parámetros del ejercicio. Denominemos a esta nueva expresión λ^{**} .
10. (15 puntos) ¿Es verdad que si el agente no aceptase el canje de bonos cuando no existen los activos de Arrow tampoco lo haría si esos activos estuviesen disponibles? Demuestre su respuesta (no leeré más de cinco renglones al respecto).

Soluciones

$$1. c_R = \bar{B}R \quad c_r = \bar{B}r \quad c_G = B \quad c_P = 0$$

$$2. U_A^e = \pi u(c_R) + (1 - \pi)u(c_r) = \pi\sqrt{\bar{B}R} + (1 - \pi)\sqrt{\bar{B}r} = \sqrt{\bar{B}} [\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}]$$

$$U_N^e = \lambda u(c_G) + (1 - \lambda)u(c_P) = \lambda\sqrt{B} + (1 - \lambda)\sqrt{0} = \lambda\sqrt{B}$$

3. Según el enunciado, el inversor no acepta si y sólo si $U_A^e < U_N^e$. Esto equivale a

$$\sqrt{\bar{B}} [\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}] < \lambda\sqrt{B}$$

Es decir, $\lambda > \lambda^*$, donde definimos

$$\lambda^* \equiv \sqrt{\frac{\bar{B}}{B}} [\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}]$$

$$4. \lambda^* \in (0, 1) \iff \sqrt{\frac{\bar{B}}{B}} [\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}] \in (0, 1) \iff 0 < \sqrt{\frac{\bar{B}}{B}} [\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}] < 1.$$

Dado que $\sqrt{\frac{\bar{B}}{B}} [\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}] > 0$ se satisface siempre, esta condición es equivalente a

$$[\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}] < \sqrt{\frac{B}{\bar{B}}}$$

Es decir, el valor esperado de la raíz cuadrada del retorno bruto de los nuevos bonos debe estar acotado superiormente por la raíz de $\frac{B}{\bar{B}}$.

5. La restricción de presupuesto en $t = 0$ es $q_R\theta_R + q_r\theta_r = 0$. La interpretación es que, para poder comprar un activo, el inversor sólo lo puede hacer vendiendo (en corto) el otro activos, debido a que no posee recursos propios en ese período inicial.
6. La utilidad de aceptar el nuevo bono es ahora

$$U_A^e = \pi\sqrt{\bar{B}R + \theta_R} + (1 - \pi)\sqrt{\bar{B}r + \theta_r}$$

El problema del individuo es

$$\max_{\theta_R, \theta_r} U_A^e \quad \text{s.a.} \quad q_R\theta_R + q_r\theta_r = 0$$

El lagrangeano es

$$L \equiv \pi\sqrt{\bar{B}R + \theta_R} + (1 - \pi)\sqrt{\bar{B}r + \theta_r} - \mu(q_R\theta_R + q_r\theta_r)$$

Las CPO son

$$\text{con respecto a } \theta_R : \frac{\pi}{2\sqrt{\bar{B}R + \theta_R}} - \mu q_R = 0$$

$$\text{con respecto a } \theta_r : \frac{1 - \pi}{2\sqrt{\bar{B}r + \theta_r}} - \mu q_r = 0$$

Nótese que la función $\pi\sqrt{c_R} + (1 - \pi)\sqrt{c_r}$ es estrictamente cóncava en (c_R, c_r) , con lo cual las curvas de indiferencia son estrictamente convexas. Esto asegura que lo que despejemos de las CPO será precisamente el vector (θ_R^*, θ_r^*) que efectivamente maximiza la utilidad esperada. Podemos entonces combinar las condiciones de primer orden para obtener

$$\frac{\pi}{q_R\sqrt{\bar{B}R + \theta_R}} = \frac{1 - \pi}{q_r\sqrt{\bar{B}r + \theta_r}}$$

Despejando, tenemos

$$\frac{\bar{B}R + \theta_R}{\bar{B}r + \theta_r} = \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{q_r}{q_R} \right)^2$$

La restricción presupuestaria del período 0 implica que $\theta_r = -\frac{q_R\theta_R}{q_r}$, así que

$$\frac{\bar{B}R + \theta_R}{\bar{B}r - \frac{q_R\theta_R}{q_r}} = \frac{q_r(\bar{B}R + \theta_R)}{q_r\bar{B}r - q_R\theta_R} = \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{q_r}{q_R} \right)^2$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} \bar{B}R + \theta_R &= \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{1}{q_R} \right)^2 q_r(q_r\bar{B}r - q_R\theta_R) \\ \bar{B}R + \theta_R &= \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{1}{q_R} \right)^2 \bar{B}r - \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \right)^2 \frac{q_r}{q_R}\theta_R \\ \theta_R + \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \right)^2 \frac{q_r}{q_R}\theta_R &= \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{q_r}{q_R} \right)^2 \bar{B}r - \bar{B}R \\ \left[1 + \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \right)^2 \frac{q_r}{q_R} \right] \theta_R &= \bar{B} \left[\left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{q_r}{q_R} \right)^2 r - R \right] \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} \theta_R &= \frac{\bar{B} \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{q_r}{q_R} \right)^2 r - R}{1 + \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \right)^2 \frac{q_r}{q_R}} \\ \theta_r &= -\bar{B} \frac{q_R}{q_r} \frac{\left(\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{q_r}{q_R} \right)^2 r - R}{1 + \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \right)^2 \frac{q_r}{q_R}} \end{aligned}$$

7. Si $q_R = \pi$ y $q_r = 1 - \pi$, tenemos $\frac{\pi}{1-\pi} \frac{q_r}{q_R} = 1$, con lo que las soluciones se reducen a:

$$\begin{aligned}\theta_R &= \bar{B} \left(\frac{r - R}{1 + \frac{\pi}{1-\pi}} \right) = \bar{B}(1 - \pi)(r - R) \\ \theta_r &= -\bar{B} \frac{q_R}{q_r} \left(\frac{r - R}{1 + \frac{\pi}{1-\pi}} \right) = -\bar{B} \frac{q_R}{q_r} (1 - \pi)(r - R) = -\bar{B}\pi(r - R)\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}c_R^* &= \bar{B}R + \theta_R^* = \bar{B}R + \bar{B}(1 - \pi)(r - R) = \bar{B}[\pi R + (1 - \pi)r] \\ c_r^* &= \bar{B}r + \theta_r^* = \bar{B}r - \bar{B}\pi(r - R) = \bar{B}[(1 - \pi)r + \pi R]\end{aligned}$$

Obviamente, $c_R^* = c_r^*$. Este resultado no debe sorprender; al igualar el valor de un activo de Arrow coincide con la probabilidad de la contingencia en la que paga 1, con lo cual estos dos contratos funcionan en conjunto como un seguro actuarialmente justo.

8. Ahora tenemos

$$U_A^e = \pi u(c_R^*) + (1 - \pi)u(c_r^*) = [\pi + (1 - \pi)]u(c_R^*) = u(c_R^*) = \sqrt{c_R^*} = \sqrt{\bar{B}[\pi R + (1 - \pi)r]}$$

9. El inversor no acepta si y sólo si $U_A^e < U_N^e$. Pero ahora, esto equivale a

$$\sqrt{\bar{B}[\pi R + (1 - \pi)r]} < \lambda\sqrt{\bar{B}}$$

Es decir, el inversor no acepta si y sólo si $\lambda > \lambda^{**}$, donde definimos

$$\lambda^{**} \equiv \sqrt{\bar{B}/B[\pi R + (1 - \pi)r]}$$

10. La respuesta es **no necesariamente**. Es posible que el inversor no acepte cuando los activos Arrow no están disponibles, pero sí acepte cuando aceptando obtenga la posibilidad de asegurarse usando los activos Arrow. Formalmente, basta probar que $\lambda > \lambda^* \not\Rightarrow \lambda > \lambda^{**}$. Para esto, basta probar que existe alguna configuración de parámetros para la cual $\lambda^* < \lambda^{**}$. Es decir,

$$\sqrt{\bar{B}/B[\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r}]} < \sqrt{\bar{B}/B[\pi R + (1 - \pi)r]}$$

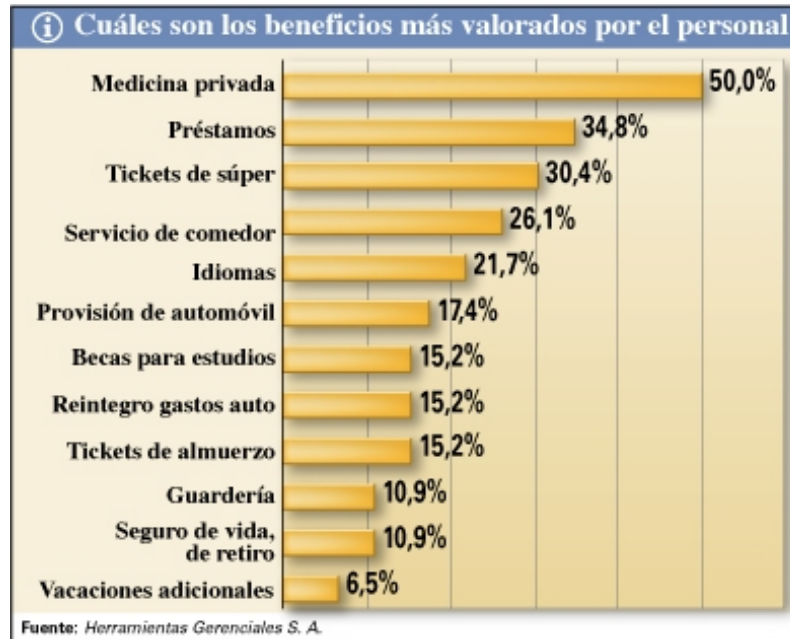
Esto equivale a

$$\pi\sqrt{R} + (1 - \pi)\sqrt{r} < \sqrt{\pi R + (1 - \pi)r}$$

Es decir: equivale a probar que la función raíz cuadrada es estrictamente cóncava. Esto es siempre cierto, por lo cuál, siempre tendremos $\lambda^* < \lambda^{**}$. Luego, si la probabilidad que le asigna a ganar el juicio, λ pertenece al intervalo $(\lambda^*, \lambda^{**}) \neq \emptyset$, el inversor no acepta el canje cuando los activos Arrow no están disponibles, pero sí lo hace si los activos Arrow están disponibles toda vez que haya aceptado el canje.

Primer Cuatrimestre de 2005. (UBA)

En un informe reciente publicado, entre otros medios, por Citeconomica.com, aparece los beneficios que las empresas ofrecen a los empleados. La valoración de estos beneficios por parte de los empleados aparece en el siguiente cuadro:



Este ejercicio pretende ilustrar de qué depende la evidencia mostrada en esta figura de que la medicina privada es el beneficio con mayor valoración entre los empleados. Para ello utilizamos una extensión de la teoría del consumidor-trabajador cuando éste enfrenta un futuro con riesgo. Suponga un trabajador al que se le promete pagar en el período siguiente un salario de w dólares, que se supone cierto. Este trabajador recibe también en el período siguiente un total de tiempo disponible para trabajar igual a 1. El consumidor no recibe otros ingresos. Existen dos posibles contingencias en el próximo período. En la primera contingencia existe una enfermedad en su familia que le obliga (de no tener seguro médico) a pagar K dólares. En la otra contingencia no existe tal accidente. La probabilidad de que ocurra el mencionado accidente es igual a η . Las preferencias en cada contingencia (“Accidente” y “No-Accidente”, que simplemente abreviaremos usando sus iniciales, A y NA) están dadas por la siguiente función de utilidad (donde $c(s)$ denota consumo en $s = A$ y $s = NA$ y $l(s)$ el consumo de ocio en $s = A$ y $s = NA$):

$$u(c(s), l(s)) = \frac{c(s)^{1-\sigma} + l(s)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

con $\sigma > 0$ y $\sigma \neq 1$, para $s = A$ y $s = NA$. Suponga que este consumidor no recibe beneficio alguno todavía. El precio de $c(s)$ es igual a 1.

- (10 puntos) Escriba la restricción presupuestaria para $s = NA$ del consumidor. Obtenga la cantidad de ocio y consumo óptimos en esta contingencia.
- (10 puntos) Escriba la restricción presupuestaria para $s = A$ del consumidor. Obtenga la cantidad de ocio y consumo óptimos en esta contingencia.
- (10 puntos) Escriba la utilidad esperada *hoy* del consumidor trabajador como función de w , η , K y σ .
- (15 puntos) Suponga ahora que la firma *hoy* le ofrece al consumidor dos posibles beneficios:
 - (I): salario igual a w de mañana (el mismo que teníamos hasta ahora) y cubrirle todos los gastos del accidente, en el evento en que se produzca
 - (II): no ofrecerle cubrirle el accidente, y pagarle un salario igual a $w + \eta K$ en lugar de w

Reescriba las restricciones presupuestarias para $s = A$ en cada una de las dos opciones I y II

- (15 puntos) Obtenga ahora la cantidad de ocio y consumo óptimos en $s = A$ para cada opción.
- (15 puntos) Obtenga la utilidad esperada que el trabajador percibe en el presente para cada opción. Llamemos U_I la utilidad esperada si elige la opción I y U_{II} la que obtiene si elige la opción II .

7. (5 puntos) ¿Qué desigualdad debe cumplirse para U_I y U_{II} para que el trabajador elija la opción I ? (Suponga que si el trabajador está indiferente entre I y II entonces elige I).
8. (10 puntos) Reemplace las expresiones obtenidas en 6 en la desigualdad 7.
9. (10 puntos) Evalúe si la desigualdad del punto 8 se cumple para los siguientes valores de las variables:

w	K	η	σ
3	2	0.3	2

Cuatrimestre II 2005 - UBA

En un artículo publicado en *InfoBae*, el 13 de Octubre de 2005, denominado “Modelo brasileño: exportación récord y tipo de cambio bajo”, el autor Rubén Ramallo se refiere a la presunta paradoja de un incremento importante de exportaciones con un tipo de cambio real *bajo*. A este respecto, Ramallo afirma que:

“A partir de abril de este año la decisión de la autoridad monetaria fue la no intervención en el mercado de divisas. Como consecuencia de esta situación, en los últimos doce meses el real se revaluó 19,3%, ya que pasó de 2,85 a 2,30 reales por dólar. No obstante, esta decisión, que podía afectar la competitividad externa de los productos brasileños, se vio compensada en gran medida con la muy variada gama de incentivos fiscales de orden nacional y estadual que se brindan a la industria local, así como también los subsidios a la exportación que otorga el BNDES. El derrumbe del dólar encendió luces de alarma en los sectores exportadores, ya que en algunos momentos se llegó a poner en duda la continuidad del ciclo ascendente de las exportaciones, pese a que en los primeros nueve meses del 2005 los envíos al exterior crecieron 23% con respecto a igual período del año anterior, según datos publicados por la SECEX (Secretaría de Comercio Exterior de Brasil) con una importante participación de productos manufacturados y semimanufacturados, en los cuales se observan claras ganancias de competitividad, producto del muy importante proceso de inversión externa directa.”

Este problema intenta analizar esta presunta paradoja, y mostrará que este incremento de exportaciones no es necesariamente paradójico si se tiene en cuenta los *incentivos* fiscales a los que se refiere el artículo. Supongamos un mercado (por ejemplo, de soja) con dos grupos de agentes. Por un lado encontramos a I consumidores, denotados con el supraíndice $i = 1, \dots, I$. Por el otro encontramos J productores, denotados con el supraíndice $j = 1, \dots, J$. Cada consumidor i recibe m^i reales (moneda brasileña) de ingreso nominal. Posee preferencias definidas sobre cantidades consumidas de soja, denotadas como y^i , y otros bienes, denotados como z^i . El precio en reales de la soja es p y el precio de z es igual a 1 real. Las preferencias de i pueden representarse a través de una función de utilidad

$$u^i(y^i, z^i) = \ln y^i + z^i$$

Por otra parte, cada productor j posee una tecnología para producir y^j kilos de soja, representable por la función de producción:

$$y^j = AL_j^{1/4} K_j^{1/2}$$

donde L_j es la cantidad de trabajo utilizado por j y K_j la de capital. $A > 0$ representa la productividad total conjunto de trabajo y capital y se la supone idéntica para todo j . Sea w el precio del trabajo y r el del capital. Se supone que cada firma obtiene un subsidio tal que por unidad de capital utilizado cada firma sólo paga una proporción $\lambda \in (0, 1)$ del precio r , quedando el resto a cargo del Gobierno. Por otra parte, el precio de la soja p es igual al precio internacional de la soja en dólares, p^* , multiplicado por el tipo de cambio ε .

1. (10 puntos) Plantee el problema de minimización de costos de cada firma j .
2. (5 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden del problema de minimización de costos de cada firma. Argumente sin demostrar matemáticamente que se cumple la condición de segundo orden.
3. (10 puntos) Plantee y resuelva el problema de la oferta (óptima) de soja de cada firma, obteniendo las condiciones de primero y de segundo orden, obteniendo la función de oferta de cada firma y luego la oferta agregada de soja.
4. (10 puntos) Plantee el problema de cada consumidor i .

5. (5 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden del problema del consumidor. Argumente sin necesidad de demostrarlo matemáticamente que se cumple la condición de segundo orden
6. (10 puntos) Obtenga la demanda marshalliana por soja para cada consumidor. Haga lo propio para la demanda agregada de soja
7. (5 puntos) Definimos como función de exceso de oferta de soja como la diferencia entre la oferta agregada menos la de demanda agregada de soja. Compute la función de exceso de oferta de soja en este caso concreto.
8. (15 puntos) ¿Para qué rango de valores de p este exceso de oferta es estrictamente positivo? (en cuyo caso se supone que tal exceso de oferta se exporta)
9. (10 puntos) Suponga que ε y p^* son tales que εp^* se encuentra en el rango descrito en el punto 8. ¿En cuánto aumenta o disminuye (deberá decir cuál de las dos es correcta) las exportaciones ante una disminución pequeña en ε ?
10. (5 puntos) ¿En cuánto aumenta o disminuye (deberá decir cuál de las dos es correcta) las exportaciones ante una disminución pequeña en λ ?
11. (15 puntos) Suponga que el gobierno permite que ε se reduzca, pero al mismo tiempo reduce λ en una magnitud tal que las exportaciones de soja aumentan α kilos por cada unidad de reducción de ε (esto es, se supone que $\frac{dX}{d\varepsilon} = \alpha$, donde X son las exportaciones y d denota la derivada *total* con respecto a ε). Obtenga el valor de $\frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon}$ que haga que esto se cumpla.

Solución

1. (10 puntos) El problema de minimización de costos de la firma es:

$$\min_{L_j, K_j} wL_j + \bar{r}K_j \quad \text{sujeto a } y^j = AL_j^{1/4}K_j^{1/2}$$

donde $\bar{r} = r\lambda$.

2. (5 puntos) Las condiciones de primer orden son (aquí μ denota el multiplicador de Lagrange):

$$\begin{aligned} w - \frac{\mu A}{4} L_j^{-3/4} K_j^{1/2} &= 0 \\ \bar{r} - \frac{\mu A}{2} L_j^{1/4} K_j^{-1/2} &= 0 \\ y^j - AL_j^{1/4} K_j^{1/2} &= 0 \end{aligned}$$

La condición de segundo orden se cumple pues la tecnología de producción (Cobb-Douglas) de este ejercicio implica isocuantas estrictamente convexas, lo cual es equivalente a demostrar que la condición de segundo orden de este problema de mínimo costo se cumple.

3. (10 puntos) Utilizando las condiciones de primer orden de la parte 2 despejamos L_j y K_j que minimizan el costo y luego obtenemos la función de costo mínimo:

$$\begin{aligned} \frac{w}{\bar{r}} &= \frac{K_j}{2L_j} \implies K_j = \frac{2w}{\bar{r}} L_j \implies y^j = AL_j^{1/4} \left(\frac{2w}{\bar{r}} L_j \right)^{1/2} \\ \implies L_j^{\min C} &= \left(\frac{y^j}{A} \right)^{4/3} \left(\frac{\bar{r}}{2w} \right)^{2/3}, \quad K_j^{\min C} = \left(\frac{y^j}{A} \right)^{4/3} \left(\frac{2w}{\bar{r}} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

La función de costo mínimo es

$$\begin{aligned} C^{\min} &= \left(\frac{y^j}{A} \right)^{4/3} w^{1/3} \bar{r}^{2/3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} + 2^{1/3} \right) \\ &= \left(\frac{y^j}{A} \right)^{4/3} w^{1/3} \bar{r}^{2/3} \frac{3}{2^{2/3}} \end{aligned}$$

con lo cual el problema de la firma es:

$$\max_{y^j} \quad py^j - \left(\frac{y^j}{A}\right)^{4/3} w^{1/3} \bar{r}^{2/3} \frac{3}{2^{2/3}}$$

La condición de primer orden es

$$p - \frac{4}{3} \frac{(y^j)^{1/3}}{A^{4/3}} w^{1/3} \bar{r}^{2/3} \frac{3}{2^{2/3}} = 0$$

Y la condición de segundo orden es simplemente

$$-\frac{2^{4/3}}{3} \frac{(y^j)^{-2/3}}{A^{4/3}} w^{1/3} \bar{r}^{2/3} < 0$$

De la condición de primer orden despejamos y^j (la función de oferta de cada firma individual) en función de p , w , \bar{r} y A :

$$y^j = \frac{p^3 A^4}{16w\bar{r}^2}$$

Y la oferta agregada es simplemente:

$$y^S = \frac{Jp^3 A^4}{16w\bar{r}^2}$$

4. (10 puntos) El problema de cada consumidor i es

$$\max_{y^i, z^i} \quad \ln y^i + z^i \quad \text{sujeito a } py^i + z^i = m^i$$

5. (5 puntos) Las condiciones de primer orden del problema del consumidor son:

$$\frac{1}{y^i} = p, \quad z^i = m^i - py^i$$

La condición de segundo orden se cumple pues las preferencias supuestas en este ejercicio son cuasilineales (donde la función de utilidad es estrictamente cóncava con respecto al bien que no entra linealmente en las preferencias, el bien y). En clase hemos mostrado que tales preferencias inducen curvas de indiferencia estrictamente convexas, lo cual es equivalente al cumplimiento de las condiciones de segundo orden del problema del consumidor.

6. (10 puntos) La demanda marshalliana por soja para cada consumidor se obtiene simplemente de la condición $\frac{1}{y^i} = p$, lo cual implica que

$$y^{*i} = \frac{1}{p} \quad \text{para todo } i$$

Y entonces la demanda agregada por soja es

$$y^d = \frac{I}{p}$$

7. (5 puntos) La función de exceso de oferta de soja en este caso concreto se denota como X y es igual a

$$X = \frac{Jp^3 A^4}{16w\bar{r}^2} - \frac{I}{p}$$

8. (15 puntos) Este exceso de oferta es estrictamente positivo si y sólo si

$$\frac{Jp^3 A^4}{16w\bar{r}^2} - \frac{I}{p} > 0$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{Jp^3 A^4}{16w\bar{r}^2} > \frac{I}{p} &\Leftrightarrow p^4 > \frac{16Iw\bar{r}^2}{JA^4} \\ &\Leftrightarrow p > \frac{2(Iw)^{1/4} \bar{r}^{1/2}}{J^{1/4} A} \end{aligned}$$

El rango de precios p para el cual se exporta soja es $p \in \left(\frac{2(Iw)^{1/4} \bar{r}^{1/2}}{J^{1/4} A}, \infty\right)$.

9. (10 puntos) Podemos escribir X del siguiente modo:

$$X = \frac{J(\varepsilon p^*)^3 A^4}{16w\bar{r}^2} - \frac{I}{\varepsilon p^*}$$

Entonces

$$\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} = \frac{3J(p^*)^3 A^4 \varepsilon^2}{16w\bar{r}^2} + \frac{I}{\varepsilon^2 p^*} > 0$$

Ceteris paribus, X disminuye con una disminución de ε en una relación dada por la expresión que obtuvimos aquí.

10. (5 puntos) Podemos escribir X del siguiente modo:

$$X = \frac{J(\varepsilon p^*)^3 A^4}{16w(r\lambda)^2} - \frac{I}{\varepsilon p^*}$$

Entonces

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = -\frac{J(\varepsilon p^*)^3 A^4}{8w\lambda^2 r^3} < 0$$

con lo cual una reducción en el precio efectivo del capital pagado por cada firma (una reducción en λ , o un aumento del subsidio) aumenta las exportaciones en la relación dada por la expresión de arriba.

11. (15 puntos) Lo que esta última parte del ejercicio supone que $\frac{dX}{d\varepsilon} = -\alpha$, con $\alpha > 0$. Ahora bien, si λ es una función implícita de ε entonces $\frac{dX}{d\varepsilon} = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon}$. En consecuencia debemos tener que

$$\frac{3J(p^*)^3 A^4 \varepsilon^2}{16w\bar{r}^2} + \frac{I}{\varepsilon^2 p^*} - \frac{J(\varepsilon p^*)^3 A^4}{8w\lambda^2 r^3} \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} = -\alpha$$

con lo cual

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} = \frac{\frac{3J(p^*)^3 A^4 \varepsilon^2}{16w\bar{r}^2} + \frac{I}{\varepsilon^2 p^*} + \alpha}{\frac{J(\varepsilon p^*)^3 A^4}{8w\lambda^2 r^3}}$$

Nótese que $\frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} > 0$, lo cual es intuitivo: si la política monetaria de Brasli implica reducir el tipo nominal de cambio ε y al mismo tiempo se registra un incremento de las exportaciones, siendo que éstas son crecientes en ε , debe ocurrir que los subsidios a la compra de servicios de capital por parte de las firmas debe estar aumentando también (reduciéndose λ).

Semestre de Otoño 2006. UdeSA.

En el diario *Ámbito Financiero*, del día 26 de abril de 2006, puede leerse un artículo al pie de la página 3 titulado **“Inversores buscan tasa variable”**. En la misma dice:

Bancos, empresas y público ofrecieron nada menos que \$1225 millones, de los que la entidad monetaria (habla del Banco Central) aceptó \$765 millones, lo que le permitió absorber \$660 millones (de base monetaria). Más del 90% de la oferta fue para las Nobac de tasa variable que se convirtieron en uno de los papeles más atractivos del mercado por los rendimientos que están dando.

Este problema intenta racionalizar la posible causa de por qué existe este *atractivo* por instrumentos que pagan un retorno *variable* a través del análisis de un consumidor que desea manejar el riesgo que enfrentan sus ingresos futuros. Supongamos un consumidor que vive dos períodos, $t = 0, 1$. En el primer período recibe una dotación de ω_0 pesos que puede destinar a la compra / venta (en corto) de dos títulos valores: un bono de tasa fija cuyo precio en $t = 0$ es igual a q y otro título que llamaremos bono de tasa variable cuyo precio en $t = 0$ es p . Denotamos a b a la cantidad de bonos de tasa fija transados en $t = 0$ por este agente y z a la de los bonos a tasa variable. En $t = 1$ existen dos contingencias posibles, que llamaremos simplemente α y β . Este agente posee preferencias cuyas propiedades permiten su representación bajo la forma de función de utilidad esperada (la cual aparece más abajo de forma explícita) lo cual implica que este agente piensa que la probabilidad de que suceda α es igual a un número $\pi \in (0, 1)$. En cualquier contingencia, cada unidad del bono a tasa fija paga \$1

independientemente de la contingencia (en este sentido decimos que este bono es a tasa fija). En la contingencia β el bono a tasa variable paga \$1 por unidad de este bono, mientras que en la contingencia α paga 0 (en este sentido decimos que este bono es a tasa variable). En cada contingencia $s \in \{\alpha, \beta\}$ el consumidor recibe también una dotación de H horas de tiempo (independiente de s) que dedica, parte al consumo de ocio (denotado como $l(s)$ para cada contingencia $s \in \{\alpha, \beta\}$), parte al trabajo, cuyo salario sí depende de la contingencia s , donde el salario es $w(s)$, suponiendo que $w(\alpha) > w(\beta)$. Sea $c(s)$ el consumo de pesos que el agente realiza en $t = 1$, contingencia $s \in \{\alpha, \beta\}$. Las preferencias de este consumidor puede representarse de la siguiente manera:

$$\pi [\ln c(\alpha) + \ln l(\alpha)] + (1 - \pi) [\ln c(\beta) + \ln l(\beta)]$$

1. (5 puntos) Escriba para cada contingencia α y β la restricción presupuestaria que enfrenta el consumidor dados b y z .
2. (10 puntos) Para cada contingencia α y β plantee el problema de elección óptima de $l(\alpha)$ y $l(\beta)$ respectivamente, tomando como datos b y z a esta altura del ejercicio. Obtenga las condiciones de primer orden, argumente muy brevemente que se cumplen las condiciones de segundo orden en este caso, y luego obtenga el consumo óptimo de ocio en cada contingencia como función de H , b , z , y respectivamente $w(\alpha)$ o $w(\beta)$ según corresponda.
3. (10 puntos) Obtenga la oferta óptima de trabajo en cada contingencia como función de H , b , z , y respectivamente $w(\alpha)$ o $w(\beta)$ según corresponda. Reemplace las respuestas en 2 y 3 en la función de utilidad esperada y obtenga entonces una utilidad esperada como función de b , z , H , $w(\alpha)$ y $w(\beta)$ (además de π).
4. (5 puntos) Escriba la restricción presupuestaria en $t = 0$ (que involucra a b , z , p , q y ω_0).
5. (15 puntos) Plantee el problema de la elección óptima de z y b (dados p , q , ω_0 , H , $w(\alpha)$ y $w(\beta)$). Reemplazando la restricción presupuestaria obtenida en 4 en la utilidad esperada (sugerencia: despeje b en función de las otras variables) obtenga una condición de primer orden y argumente en dos líneas que se cumple la condición de segundo orden en este caso.
6. (10 puntos) De la condición de primer orden obtenga la demanda óptima por el bono a tasa variable como función de π , p , q , H , ω_0 , $w(\alpha)$ y $w(\beta)$.
7. (10 puntos) Suponga que $\frac{p}{q} = (1 - \pi)$. Interprete en como máximo dos renglones en qué medida esta igualdad tiene alguna intuición (pista: tenga en cuenta que p es el precio del bono a tasa variable, y que ésta paga una cantidad de pesos contingente a s como se explica más arriba). Muestre que en este caso la demanda óptima por el bono a tasa variable depende de H y de $(w(\alpha), w(\beta))$.
8. (15 puntos) Muestre que dado el supuesto sobre la relación entre $w(\alpha)$ y $w(\beta)$ entonces el agente demanda una cantidad positiva del bono a tasa variable. Demuestre que esta cantidad es creciente en la diferencia entre $w(\alpha)$ y $w(\beta)$. ¿Qué intuición puede dar sobre este último resultado?
9. (10 puntos) Dada su respuesta en 9, explique en tres renglones como máximo qué posible factor podría explicar el atractivo de este tipo de bonos en el mercado argentino, según lo describe el artículo mencionado en la introducción a este problema.
10. (10 puntos) Siga suponiendo que $\frac{p}{q} = (1 - \pi)$. Reemplace su respuesta en 7 en la restricción del punto 4 para obtener la demanda óptima por el bono de tasa fija. ¿Qué condición debe cumplirse para que esta cantidad sea también positiva?

Cuatrimestre I 2006 - UBA

En un reportaje publicado en *Ambito Financiero*, el 26 de abril de 2006, (pág. 9) el entrevistado (E. Kawamura), entre otros temas, habló sobre el tema de la inversión. De acuerdo al texto de la entrevista, dice:

“El problema para aumentar la inversión en el sector privado está ligado a la cuestión de la negociación de precios, pero sobre todo, mirando al mediano plazo, a cambios discrecionales en la legislación laboral, impositiva y de quiebras.”

Un ex-alumno de la UBA del entrevistado, al leer esto, dijo: “Mirálo vos a Kawamura, hablando de ‘cambios discrecionales’. Parece un político hablando, tan vago y ambigüo. ¡Y a nosotros nos hinchaba tanto para que fuésemos super precisos con el lenguaje. ¡Es un chanta!” Este problema, en realidad, viene a intentar redimir este hueco terminológico de este párrafo, especificando un ejercicio que refleje de modo formal lo que significa estos *cambios discrecionales*. Suponga una economía que dura dos períodos, $t = 0, 1$. En esta economía existe un mercado con J firmas (indizados con $j = 1, 2, \dots, J$) que producen maíz en $t = 1$, cada una de las cuales posee una tecnología dada por la función de producción

$$y^j = F^j(L^j, K^j) = (K^j)^{1/2} (L^j)^{1/2}$$

donde L^j es la cantidad de horas de trabajo contratado en $t = 1$ por la firma j y K^j es la cantidad de inversión en capital realizada en $t = 0$ por el dueño de la firma j y tulizada en $t = 1$ para producir maíz (luego de utilizarse se supone que este capital no tiene ninguna otra utilización y es descartado por la firma). El precio del trabajo en $t = 1$ por hora de trabajo pagado por cada firma se supone igual a un cierto \tilde{w} (luego se precisará a qué es igual este salario). El precio del maíz en $t = 1$ es igual a p . Dado K^j , el propietario de la firma j elige L^j tal que maximiza los beneficios (extraordinarios) de la firma. El dueño de cada firma j recibe una dotación en $t = 0$ igual a $\omega > 0$, destinando una parte de ella a la inversión en la propia firma y el resto lo guarda hasta el período 1, tal que por cada unidad guardada en $t = 0$ obtiene 1 unidad en $t = 1$.

En el mismo mercado existen I consumidores de maíz, que sólo viven en $t = 1$. En este período cada consumidor $i = 1, 2, \dots, I$ recibe un ingreso nominal m^i y elige canastas de bienes (y^i, z^i) , donde y^i es el consumo de maíz y z^i el de otros bienes, donde $p_z = 1$. Sus preferencias (las del consumidor i) están representadas por la función de utilidad:

$$u^i(y^i, z^i) = 2\sqrt{y^i} + z^i$$

1. (5 puntos) Plantee el problema de maximización de beneficios de cada firma j en $t = 1$, dado K^j , p y \tilde{w} .
2. (10 puntos) Obtenga la condición de primer orden del problema de maximización de beneficios de cada firma. Argumente sin demostrar matemáticamente que se cumple la condición de segundo orden.
3. (10 puntos) Suponga que para cada j , K^j es la misma para cada firma (esto lo comprobaremos despues). Llame a este capital simplemente K . Despeje de la CPO anterior la cantidad y^j que constituye la oferta óptima de la firma (como función de K^j , p y \tilde{w}) y luego obtenga la oferta agregada del mercado en $t = 1$ como función de p , \tilde{w} , K y J .
4. (5 puntos) Plantee el problema de cada consumidor i .
5. (5 puntos) Obtenga la o las condiciones de primer orden del problema del consumidor. Argumente sin necesidad de demostrarlo matemáticamente que se cumple la condición de segundo orden
6. (5 puntos) Obtenga la demanda marshalliana por maíz para cada consumidor. Haga lo propio para la demanda agregada de maíz.
7. (10 puntos) Obtenga el precio p^* que equilibra el mercado de maíz, dadas las otras variables. En particular, muestre que p^* depende de \tilde{w} , K , I y J .
8. (10 puntos) De su respuesta en 3 obtenga los beneficios maximizados de la firma j como función de K , p y \tilde{w} . Luego reemplace en p por la expresión p^* obtenida en 7, para dejarla en función de \tilde{w} , K , I y J . Denotemos a esta función como $\Pi(\tilde{w}, K, I, J)$.
9. (10 puntos) Supongamos (hasta el final del ejercicio) que \tilde{w} está afectado por decisiones de política tributaria de $t = 1$, decisiones que se consideran aleatorias desde el punto de vista de $t = 0$. En particular, con probabilidad π el Estado otorga un subsidio a las firmas que contratan trabajo y con probabilidad $1 - \pi$ el Estado cobra impuestos a la utilización del trabajo por parte de las firmas. Desde el punto de vista de $t = 0$ entonces \tilde{w} es tal que

$$\tilde{w} = \begin{cases} \theta w, & \text{con probabilidad } \pi \\ \frac{1}{\theta} w, & \text{con probabilidad } 1 - \pi \end{cases}$$

donde w es el precio del trabajo si no hubiese ni subsidios ni impuestos y $\theta \in (0, 1)$. Llamemos G al estado de la naturaleza tal que el Estado otorga un subsidio y B a aquél tal que el Estado cobra impuestos. El

dueño de cada firma consume en $t = 1$ el resultado de sus decisiones de inversión de $t = 0$, esto es, la suma de los beneficios (máximos) más lo que guardó de $t = 0$ a $t = 1$. Llamemos c_G al consumo del dueño de la firma en G y a c_B el consumo del dueño de la firma en B . Escriba c_G y c_B en función de w, θ, K, I, J .

10. (10 puntos) El dueño de cada firma es neutral al riesgo, en el sentido de que sus preferencias se representan por una función de utilidad esperada $U(c_B, c_G) = \pi c_G + (1 - \pi) c_B$. Reemplazando su respuesta en 9 escriba el problema de maximización de utilidad esperada del dueño de cada firma, especificando correctamente las variables de decisión de este agente (recuerde que los precios son tomados como exógenos por este agente)
11. (5 puntos) Escriba la condición de primer orden del problema anterior. Despeje entonces la o las variables de decisión que elige y obtenga la inversión óptima K^* como función de w, θ, I, J .
12. (5 puntos) Suponga ahora que no hay intervención estatal, de modo tal que $\theta = \frac{1}{\theta} = 1$. Obtenga en este caso entonces la inversión óptima en este caso (como función de w, I y J). Llamemos a esta solución K^{**}
13. (10 puntos) Demuestre que si computamos $\frac{K^*}{K^{**}}$ existe un *máximo* valor de π , llamado π^* , tal que para todo $\pi \leq \pi^*$ entonces $\frac{K^*}{K^{**}} \leq 1$.

Solución

1. Dado que K^j se encuentra dado, el problema es

$$\max_{L^j} p (K^j)^{1/2} (L^j)^{1/2} - \tilde{w} L^j$$

2. La condición de primer orden es

$$\frac{p}{2} (K^j)^{1/2} (L^j)^{-1/2} - \tilde{w} = 0$$

Nótese que la productividad marginal del trabajo es estrictamente decreciente en L^j (su exponente es $-\frac{1}{2} < 0$), con lo cual la función de beneficios es estrictamente cóncava en L^j y se cumple entonces la CSO.

3. Primero despejamos $(L^j)^{1/2}$ de la CPO:

$$(L^j)^{1/2} = \frac{p}{2\tilde{w}} (K^j)^{1/2}$$

con lo cual la oferta óptima de j es

$$y^{j*}(p, \tilde{w}, K^j) = \frac{p}{2\tilde{w}} (K^j)^{1/2} (K^j)^{1/2} = \frac{pK^j}{2\tilde{w}} = \frac{pK}{2\tilde{w}}$$

dado que $K^j = K$ para todo j . La oferta agregada entonces es simplemente

$$Y^{S*} = \frac{JpK}{2\tilde{w}}$$

4. El problema se plantea de la siguiente manera:

$$\max_{y^i, z^i} 2\sqrt{y^i} + z^i \quad \text{sujeto a } py^i + z^i = m^i$$

5. Reemplazando la restricción en la función de utilidad el problema queda expresado así:

$$\max_{z^i} 2\sqrt{y^i} + m^i - pz^i$$

La CPO es

$$\frac{1}{\sqrt{y^i}} - p = 0$$

Claramente las preferencias de cada consumidor i corresponden a la clase de preferencias cuasilineales con lo cual las curvas de indiferencia son estrictamente convexas y entonces se cumplen las CSO.

6. De la CPO anterior despejamos y^i obteniendo

$$y^{i*} = \frac{1}{p^2}$$

con lo cual la demanda agregada es

$$Y^{D*} = \frac{I}{p^2}$$

7. En equilibrio tenemos que

$$\frac{JpK}{2\tilde{w}} = \frac{I}{p^2}$$

y despejando p de esta ecuación:

$$p^* = \left(\frac{2\tilde{w}I}{JK} \right)^{1/3}$$

8. Primeramente utilizamos las respuestas de 3 para obtener los beneficios máximos:

$$p \left(\frac{pK}{2\tilde{w}} \right) - \tilde{w} \left(\frac{p}{2\tilde{w}} \right)^2 K = \frac{p^2 K}{4\tilde{w}}$$

Reemplazando en p por p^* tenemos

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{w}, K, I, J) &= \frac{\left(\left(\frac{2\tilde{w}I}{JK} \right)^{1/3} \right)^2 K}{4\tilde{w}} = \frac{K}{4\tilde{w}} \left(\frac{2\tilde{w}I}{JK} \right)^{2/3} \\ &= \frac{K^{1/3}}{2^{2-2/3}\tilde{w}^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3} = \frac{K^{1/3}}{2^{4/3}\tilde{w}^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

9. Aquí es posible que se hayan encontrado con un problema, ya que a partir de este punto el ejercicio realia un supuesto *raro*, que es el hecho de que todos los dueños de cada firma saben que los otros dueños actúan igual que ellos, con lo cual incluyen (internalizan, como se dice en la jerga) el efecto de los otros dueños a través de p^* . Reconocemos que esto parece extraño, pero puede mostrarse que la alternativa (que es la de que el dueño de cada firma toma a p^* paramétricamente) es algebraicamente mucho más engorroso, con lo cual para esta solución seguiremos con los supuestos mencionados en el examen original. En este caso entonces tenemos que

$$c_G = \frac{K^{1/3}}{2^{4/3}(\theta w)^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3}; \quad c_B = \frac{K^{1/3}}{2^{4/3} \left(\frac{w}{\theta} \right)^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3}$$

10. Dados los supuestos anteriormente mencionados tenemos que el problema es

$$\begin{aligned} &\max_K \pi \left[\frac{K^{1/3}}{2^{4/3}(\theta w)^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3} + \omega - K \right] + (1 - \pi) \left[\frac{K^{1/3}}{2^{4/3} \left(\frac{w}{\theta} \right)^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3} + \omega - K \right] \\ &= \max_K \frac{K^{1/3}}{2^{4/3}(w)^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3} \left[\pi\theta^{-1/3} + (1 - \pi)\theta^{1/3} \right] + \omega - K \end{aligned}$$

11. La CPO es

$$\frac{K^{-2/3}}{2^{4/3}(w)^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3} \left[\pi\theta^{-1/3} + (1 - \pi)\theta^{1/3} \right] - 1 = 0$$

De aquí despejamos K :

$$\frac{1}{2^{4/3}(w)^{1/3}} \left(\frac{I}{J} \right)^{2/3} \left[\pi\theta^{-1/3} + (1 - \pi)\theta^{1/3} \right] = K^{2/3}$$

entonces

$$K^* = \frac{\left(\frac{I}{J}\right) \left[\pi\theta^{-1/3} + (1-\pi)\theta^{1/3}\right]^{3/2}}{\left[2^{4/3}(w)^{1/3}3\right]^{3/2}}$$

12. (5 puntos) Suponga ahora que no hay intervención estatal, de modo tal que $\theta = \frac{1}{\theta} = 1$. Obtenga en este caso entonces la inversión óptima en este caso (como función de w , I y J). Llamemos a esta solución K^{**} . En este caso es claro que la única diferencia es que, en lugar de $\left[\pi\theta^{-1/3} + (1-\pi)\theta^{1/3}\right]$ tenemos simplemente 1:

$$K^{**} = \frac{\left(\frac{I}{J}\right)}{\left[2^{4/3}(w)^{1/3}3\right]^{3/2}}$$

13. (10 puntos) En esta parte hubo un error de tipeo (¡¡¡mil disculpas!!!) El enunciado debería decir: Demuestre que si computamos $\frac{K^*}{K^{**}}$ existe un *máximo* valor de π , llamado π^* , tal que para todo $\pi \leq \pi^*$ entonces $\frac{K^*}{K^{**}} \leq 1$. Computamos entonces:

$$\frac{K^*}{K^{**}} = \frac{\left[\frac{\left(\frac{I}{J}\right)\left[\pi\theta^{-1/3} + (1-\pi)\theta^{1/3}\right]^{3/2}}{\left[2^{4/3}(w)^{1/3}3\right]^{3/2}}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{I}{J}\right)}{\left[2^{4/3}(w)^{1/3}3\right]^{3/2}}\right]} = \left[\pi\theta^{-1/3} + (1-\pi)\theta^{1/3}\right]^{3/2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{K^*}{K^{**}} \leq 1 &\Leftrightarrow \left[\pi\theta^{-1/3} + (1-\pi)\theta^{1/3}\right]^{3/2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \pi\theta^{-1/3} + (1-\pi)\theta^{1/3} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \pi\left[\theta^{-1/3} - \theta^{1/3}\right] \leq 1 - \theta^{1/3} \end{aligned}$$

Dado que $\theta < 1$, entonces $\left[\theta^{-1/3} - \theta^{1/3}\right] > 0$, y entonces la desigualdad anterior es equivalente a:

$$\pi \leq \frac{1 - \theta^{1/3}}{\theta^{-1/3} - \theta^{1/3}} \equiv \pi^*(\theta)$$

Cuatrimestre II 2006 - UBA

En recientes años se observó un cierto desarrollo de los mercados de futuros en Argentina, especialmente en transacciones con moneda extranjera (sobre todo en Rosario). De todos modos, desde hace mayor tiempo funcionan en la misma ciudad mercados de futuros sobre commodities de cereales (especialmente maíz y soja). Este ejercicio intenta analizar el posible rol de tales mercados para inversores que pretenden reducir su perfil de riesgo del consumo a través de la compra-venta de commodities. Considere una economía que dura dos periodos, $t = 0, 1$. Supongamos firmas productoras de un bien llamado maíz, indizados por $j = 1, \dots, J$. Toda la operación de producción se decide en $t = 0$, no en $t = 1$. Para producir maíz debe utilizar capital y semillas. Sea x^j la cantidad de semillas utilizadas por el productor j , sea \bar{K}^j el capital que posee la firma j , el cual es fijo. La firma j elige la proporción e^j de utilización del capital, con $e^j \in [0, 1]$. Se supone que el precio de las semillas de w dolares. Por otra parte, la proporción de capital que *no* utiliza la firma j es alquilada en el mercado de alquiler de capital, cuyo precio es r dolares. La tecnología está dada por

$$y^j = (e^j \bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{1/4}$$

donde y^j es el total de maíz producido por j . La firma decide cuánto producir en $t = 0$, pero de hecho vende el maíz en $t = 1$. Cada firma tiene la opción de vender y producir maíz en dos mercados, un mercado *spot* (de contado) y uno *futuro*. El precio del mercado de contado (medido en dolares) en $t = 1$ está dado por el mercado internacional puede tomar dos valores, p_H y p_L , con $p_H > p_L > 0$. En $t = 0$ no se conoce la realización del precio de contado, pero se sabe que la probabilidad de que el precio de contado en $t = 1$ sea igual a p_H es $\pi \in (0, 1)$.

El precio del maiz futuro es p_F y es determinado ya en $t = 0$ dentro de la economia. Sea y_S^j la cantidad de maiz producido y vendido en el mercado contado, y y_F^j el maiz producido y vendido para el mercado futuro. Cada empresario j elige (y_S^j, y_F^j) que maximiza sus beneficios esperados (i.e., es neutral al riesgo en los beneficios). Por otra parte, existen inversores indizados por $i = 1, 2, \dots, I$. Cada inversor i recibe una dotacion en $t = 1$ (ninguno en $t = 0$) dependiendo del valor del precio de contado: si este precio es p_H cada inversor recibe una dotacion de ω_H dolares, si es p_L , la dotacion es ω_L dolares. Este inversor decide en $t = 0$ una cantidad de maiz a comprar en el mercado de futuros en $t = 1$ al precio p_F . Dado que sus preferencias no dependen del maiz sino de los dolares que obtenga en $t = 0$ cada inversor vende el maiz (comprado en el mercado de futuros) en el mercado de contado al precio correspondiente. Sea y_d^i la cantidad de maiz que i se compromete en $t = 0$ a comprar en $t = 1$ al precio p_F (y que vende al precio de contado que corresponda). Sea c_l^i el consumo del inversor i de dolares si el precio de contado es p_l (con $l \in \{H, L\}$). Las preferencias del inversor i entonces pueden representarse por la funcion de utilidad esperada

$$U^i = \pi \ln c_H^i + (1 - \pi) \ln c_L^i$$

1. (5 puntos) Escriba el problema de minimizacion de costos de la firma j como funcion de y^j .
2. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden de minimizacion de costos de la firma j y obtenga la funcion de costo minimo como funcion de (w, r, \bar{K}^j, y^j) .
3. (10 puntos) Escriba la relacion entre y^j y (y_S^j, y_F^j) . Plantee (sin resolver) entonces el problema de maximizacion de beneficios esperados de la firma j .
4. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden de maximizacion de beneficios esperados.
5. (10 puntos) Demuestre que existe solucion al sistema de ecuaciones obtenida en el punto anterior (donde las incognitas son (y_S^j, y_F^j)) si y solo si $p_F = \pi p_H + (1 - \pi) p_L = E(p)$. Suponga que esta igualdad se cumple. Demuestre entonces que solamente puede obtener $y_S^j + y_F^j$ optimo como funcion de los precios y \bar{K}^j .
6. (10 puntos) Plantee la restriccion presupuestaria para el inversor i para cada realizacion del precio de contado.
7. (10 puntos) Reemplazando su respuesta del punto anterior en la funcion de utilidad esperada, obtenga la condicion de primer orden con respecto a y_d^i . Arguya sin demostrar que se cumple la condicion de segundo orden.
8. (10 puntos) Despeje el valor y_d^i de la condicion de primer orden que resuelve el problema del inversor i .
9. (10 puntos) Obtenga el total de maiz comprada por todos los inversores a partir de su respuesta del punto anterior.
10. (10 puntos) Plantee la condicion de equilibrio en el mercado futuro de maiz. Dada esta condicion obtenga el total de maiz que todas las firmas en conjunto venden en el mercado futuro de maiz.
11. (5 puntos) Dada su respuesta en el punto anterior, suponiendo que todas las firmas producen y venden la misma cantidad de maiz en el equilibrio del mercado futuro de maiz, obtenga la cantidad y_F^j en el equilibrio.

Solución

1. El problema de minimización de costos es

$$\min_{e^j, x^j} \quad wx^j + re^j \bar{K}^j$$

sujeto a

$$y^j = (e^j \bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{1/4}$$

2. Las condiciones de primer orden de minimización de costos de la firma j son:

$$\begin{aligned} w - \frac{\mu}{4} (e^j \bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{-3/4} &= 0 \\ r \bar{K}^j - \frac{\mu}{4} (\bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{1/4} (e^j)^{-3/4} &= 0 \\ y^j - (e^j \bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{1/4} &= 0 \end{aligned}$$

Dado que la función de producción es de tipo Cobb Douglas sabemos que las isocuantas en el plano (e^j, x^j) son estrictamente convexas (y por lo tanto la condición de segundo orden se cumple). Las demandas minimizadoras de costo las obtenemos de las CPO. De las dos primeras:

$$\frac{w}{r \bar{K}^j} = \frac{(e^j \bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{-3/4}}{(\bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{1/4} (e^j)^{-3/4}} = \frac{e^j}{x^j}$$

en consecuencia

$$e^j \bar{K}^j = \frac{w}{r} x^j$$

Y reemplazando en la tercer CPO:

$$y^j = (e^j \bar{K}^j)^{1/4} (x^j)^{1/4} = \left(\frac{w}{r} x^j\right)^{1/4} (x^j)^{1/4} = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/4} (x^j)^{1/2}$$

Y entonces

$$x^{j,H} = (y^j)^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}$$

es la demanda por semillas que minimiza el costo, mientras que la utilización de capital es

$$e^{j,H} = \frac{w x^{j,H}}{r \bar{K}^j} = \frac{w (y^j)^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}}{r \bar{K}^j} = \frac{(y^j)^2}{\bar{K}^j} \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}$$

Y entonces la función de costo mínimo es

$$C^j(y^j, w, r) = w x^{j,H} + r e^{j,H} \bar{K}^j = 2 (y^j)^2 (wr)^{1/2}$$

3. La relación entre y^j y (y_S^j, y_F^j) es simplemente

$$y^j = y_S^j + y_F^j$$

El problema de maximización de beneficios esperados de la firma j se plantea de la siguiente manera:

$$\max_{y_S^j, y_F^j} (\pi p_H + (1 - \pi) p_L) y_S^j + p_F y_F^j - 2 (y_S^j + y_F^j)^2 (wr)^{1/2}$$

4. Las condiciones de primer orden de maximización de beneficios esperados son:

$$\begin{aligned} (\pi p_H + (1 - \pi) p_L) - 4 (y_S^j + y_F^j) (wr)^{1/2} &= 0 \\ p_F - 4 (y_S^j + y_F^j) (wr)^{1/2} &= 0 \end{aligned}$$

5. Para demostrar que existe solución al sistema de ecuaciones obtenida en el punto anterior (donde las incógnitas son (y_S^j, y_F^j)) si y solo si $p_F = \pi p_H + (1 - \pi) p_L = E(p)$ observemos que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\pi p_H + (1 - \pi) p_L) &= 4 (y_S^j + y_F^j) (wr)^{1/2} \\ p_F &= 4 (y_S^j + y_F^j) (wr)^{1/2} \end{aligned}$$

es tal que los lados derechos de las dos ecuaciones son idénticas. En consecuencia, si $p_F = (\pi p_H + (1 - \pi) p_L)$ nos queda una ecuación linealmente independiente y dos incógnitas, con lo cual existe solución y no es única (sólo puede despejarse $(y_S^j + y_F^j)$). Por otra parte, si $p_F \neq (\pi p_H + (1 - \pi) p_L)$, entonces el sistema no tiene solución, ya que si un vector (y_S^{j*}, y_F^{j*}) satisface la primera de las igualdades, al ser $p_F \neq (\pi p_H + (1 - \pi) p_L)$ y al ser el lado derecho de la ecuación 2 idéntica al de la ecuación 1 entonces la segunda igualdad no puede verificarse. De paso hemos ya visto que la solución solamente corresponde a la suma $(y_S^j + y_F^j)$, el cual es igual a

$$(y_S^j + y_F^j)^* = \frac{p_F}{4(wr)^{1/2}}$$

6. La restricción presupuestaria para el inversor i para cada realización del precio de contado es la siguiente:

$$c_H^i = \omega_H + y_d^i(p_H - p_F), \quad c_L^i = \omega_L + y_d^i(p_L - p_F)$$

7. Reemplazando la respuesta del punto anterior en la función de utilidad esperada, tenemos que el problema del consumidor es

$$\max_{y_d^i} \pi \ln(\omega_H + y_d^i(p_H - p_F)) + (1 - \pi) \ln(\omega_L + y_d^i(p_L - p_F))$$

y la condición de primer orden con respecto a y_d^i es

$$\frac{\pi(p_H - p_F)}{\omega_H + y_d^i(p_H - p_F)} + \frac{(1 - \pi)(p_L - p_F)}{\omega_L + y_d^i(p_L - p_F)} = 0$$

Dado que la función objetivo es estrictamente cóncava, entonces las curvas de indiferencia en el plano (c_H^i, c_L^i) deben ser estrictamente convexas, con lo cual se cumple la condición de segundo orden.

8. De la condición de primer orden tenemos

$$\frac{\pi(p_H - p_F)}{\omega_H + y_d^i(p_H - p_F)} = \frac{(1 - \pi)(p_F - p_L)}{\omega_L + y_d^i(p_L - p_F)}$$

equivalente a

$$\pi(p_H - p_F) [\omega_L + y_d^i(p_L - p_F)] = (1 - \pi)(p_F - p_L) [\omega_H + y_d^i(p_H - p_F)]$$

De aquí despejamos el valor y_d^i

$$y_d^i = \frac{(1 - \pi)(p_F - p_L)\omega_H - \pi(p_H - p_F)\omega_L}{(p_H - p_F)(p_L - p_F)}$$

Pero sabemos que en equilibrio $p_F = (\pi p_H + (1 - \pi) p_L)$, con lo cual $p_F - p_L = \pi(p_H - p_L)$ y $p_H - p_F = (1 - \pi)(p_H - p_L)$, con lo cual

$$\begin{aligned} y_d^i &= \frac{(1 - \pi)\pi(p_H - p_L)\omega_H - \pi(1 - \pi)(p_H - p_L)\omega_L}{(1 - \pi)(p_H - p_L)\pi(p_L - p_H)} \\ &= \frac{-(1 - \pi)\pi\omega_H + \pi(1 - \pi)\omega_L}{(1 - \pi)\pi(p_H - p_L)} = \frac{\omega_L - \omega_H}{p_H - p_L} \end{aligned}$$

9. El total de maíz comprada por todos los inversores se obtiene a partir de la respuesta del punto anterior sumando a través de i :

$$Y_d = \sum_{i=1}^I y_d^i = \left(\frac{\omega_L - \omega_H}{p_H - p_L} \right) I$$

10. La condición de equilibrio en el mercado futuro de maíz es simplemente

$$Y_d = \sum_{j=1}^J y_F^j$$

En consecuencia

$$\sum_{j=1}^J y_F^j = \left(\frac{\omega_L - \omega_H}{p_H - p_L} \right) I$$

11. Dada la respuesta en el punto anterior, suponiendo que todas las firmas producen y venden la misma cantidad de maíz en el equilibrio del mercado futuro de maíz, la cantidad y_F^j en el equilibrio es

$$y_F^j = \left(\frac{\omega_L - \omega_H}{p_H - p_L} \right) \frac{I}{J}$$

Semestre Otoño 2007 - UdeSA - Parcial

En el servicio de noticias Cityeconómica, del día 17 de abril de 2007, puede leerse un artículo titulado “**En sólo un año las familias duplicaron su nivel de deuda**” (fuente original: diario Infobae). En este artículo puede leerse:

Según un informe del Centro de Economía y Finanzas para el desarrollo de la Argentina (Cefidar), las familias argentinas aumentaron su endeudamiento en 10.000 millones de pesos, entre febrero de 2006 y el mismo mes de este año. Esa suba implica un crecimiento de casi el 50% en el stock de crédito. De acuerdo con la evaluación, las familias aumentaron su endeudamiento principalmente para lo que puede catalogarse como consumo doméstico, que incluye desde la compra de electrodomésticos hasta la financiación de sus vacaciones.

Este problema intenta racionalizar una posible causa (no necesariamente la única) de la relación entre el incremento en este endeudamiento y la compra de electrodomésticos (más en general, bienes durables), a través de una aplicación de la teoría de la elección intertemporal de consumo. Suponga dos períodos, $t = 0, 1$. Existe un bien de consumo en cada período llamado *dólar* cuyo precio nominal es 1 en cada período. En el primer período también el consumidor puede comprar una unidad de un bien de consumo durable, que llamaremos electrodoméstico. Llamando c_t al consumo de dólares de $t = 0, 1$ y $k \in \{0, 1\}$ a las unidades de electrodomésticos que elige el consumidor en $t = 0$ las preferencias de este consumidor se asumen como representadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(c_0, c_1, k) = \ln c_0 + \beta \ln c_1 + u(k)$$

donde $u(0) = 0$ y $u(1) > 0$. Para nuestra mayor comodidad llamemos $a \equiv u(1)$. Este consumidor recibe una dotación de ω_0 dólares en $t = 0$ y de $\omega_1 > 0$ dólares en $t = 1$, suponiendo que $\omega_t > 0$ para $t = 0, 1$. El precio de un electrodoméstico en $t = 0$ es igual a q dólares, donde se supone que $q = \theta\omega_0$, con $\theta > 0$. Este consumidor tiene acceso a un *banco* que toma depósitos en dólares y presta en dólares, todo a una misma tasa (neta) de interés denotada como r . Denotamos como s al ahorro/préstamo (dependiendo del signo) que el consumidor realiza en el banco.

1. (10 puntos) Escriba la restricción presupuestaria intratemporal en cada período por separado en el caso en que el consumidor compra el electrodoméstico y luego las que corresponde al caso en que no lo compra.
2. (5 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden en cada uno de los dos casos anteriores y arguya sin demostrar matemáticamente que las condiciones de segundo orden se verifican en este caso.
3. (5 puntos) Obtenga el valor de s^* que maximiza la utilidad del consumidor en cada uno de los dos casos.
4. (5 puntos) ¿Es posible que se den al mismo tiempo dos condiciones sobre $(\omega_0, \omega_1, 1 + r)$ y eventualmente θ , una que afirme que el consumidor **ahorra** si no compra el electrodoméstico y otra en la que afirme que el consumidor **toma prestado** si compra el electrodoméstico? Demuestre y explique.

5. (5 puntos) Obtenga la utilidad indirecta para el caso en que el consumidor no adquiere el electrodoméstico y luego la utilidad indirecta para el caso en que sí lo adquiere.
6. (10 puntos) Escriba la desigualdad que implica que el consumidor prefiere comprar el electrodoméstico a no hacerlo.
7. (15 puntos) Suponga las condiciones que obtuvo en (4) y (6). Suponga primero que $\theta \in (0, 1)$. ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si (ω_0, ω_1) aumentan ambos en una proporción ϕ ? ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si sólo ω_0 aumenta? Demuestre matemáticamente su respuesta.
8. (10 puntos) Suponga las condiciones que obtuvo en (4) y (6). Suponga ahora que $\theta > 1$. Obtenga la condición que implica que, aún con $\theta > 1$, los consumos óptimos en $t = 0$ y en $t = 1$ son mayores a cero.
9. (10 puntos) Suponga $\theta > 1$. Si ω_0 fuese mayor (con el mismo ω_1), ¿es la condición que obtuvo en (6) más o menos probable que se verifique? ¿y la que obtuvo en (8)?
10. (15 puntos) Suponga las condiciones que obtuvo en (4), (6) y (8). Suponga que $\theta > 1$. ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si (ω_0, ω_1) aumentan ambos en una proporción ϕ ? ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si sólo ω_0 aumenta? Demuestre matemáticamente su respuesta.
11. (10 puntos) Suponga que (ω_0, ω_1) fuesen un 10% mayor. Suponga que $\theta > 1$ y las condiciones en (4), (6) y (8). ¿En qué porcentaje se incrementa el préstamo del consumidor? ¿Es este incremento *aproximadamente igual* al incremento del 50% del crédito que según el artículo se verificó en Argentina entre febrero de 2006 y febrero de 2007?

Soluciones sugeridas.

1. Las restricciones presupuestarias intratemporales en cada período en el caso en que el consumidor compra el electrodoméstico son

$$\begin{aligned} c_0 + s + \theta\omega_0 &= \omega_0 & \text{para } t = 0 \\ c_1 &= \omega_1 + s(1+r) & \text{para } t = 1 \end{aligned}$$

y las que corresponde al caso en que no lo compra son:

$$\begin{aligned} c_0 + s &= \omega_0 & \text{para } t = 0 \\ c_1 &= \omega_1 + s(1+r) & \text{para } t = 1 \end{aligned}$$

2. Si reemplazamos cada restricción presupuestaria en la función de utilidad correspondiente podemos calcular la CPO con respecto a s en el caso en que compra el electrodoméstico es

$$\frac{\beta(1+r)}{\omega_1 + s(1+r)} = \frac{1}{\omega_0(1-\theta) - s}$$

y para quien no compra el electrodoméstico:

$$\frac{\beta(1+r)}{\omega_1 + s(1+r)} = \frac{1}{\omega_0 - s}$$

Las CSO se verifican ya que la función $\ln c_0 + \beta \ln c_1$ es una transformación logarítmica (y por ende monótona) de la función Cobb-Douglas $c_0 c_1^\beta$ (además, la función es estrictamente cóncava con lo cual puede demostrarse que el determinante del hessiano orlado es estrictamente positivo, además que $u_1 > 0$, $u_2 > 0$)

3. En el caso en que compre el electrodoméstico lo obtenemos de:

$$\omega_1 + s(1+r) = \beta(1+r)[\omega_0(1-\theta) - s]$$

con lo cual (denotando a s^E el s^* cuando compra el electrodoméstico):

$$s^E = \frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}$$

Similarmente, en el caso en que no compre el electrodoméstico tenemos que

$$\omega_1 + s(1+r) = \beta(1+r)(\omega_0 - s)$$

y de aquí despejamos s , cuya solución denotamos s^{NE} :

$$s^{NE} = \frac{\beta(1+r)\omega_0 - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}$$

4. Sí es posible que se den al mismo tiempo dos condiciones sobre $(\omega_0, \omega_1, 1+r)$ y eventualmente θ , una que afirme que el consumidor **ahorra** si no compra el electrodoméstico y otra en la que afirme que el consumidor **toma prestado** si compra el electrodoméstico. La razón es sencilla: $s^E < 0$ si y sólo si

$$(1-\theta) < \frac{\omega_1}{\beta(1+r)\omega_0}$$

y $s^{NE} > 0$ si y sólo si

$$1 > \frac{\omega_1}{\beta(1+r)\omega_0}$$

En consecuencia, la condición para que $s^E < 0$ y $s^{NE} > 0$ simultáneamente es

$$(1-\theta) < \frac{\omega_1}{\beta(1+r)\omega_0} < 1$$

Esto significa que la relación entre el valor presente de la dotación futura $\left(\frac{\omega_1}{1+r}\right)$ y ω_0 (normaizado por el coeficiente β) es menor a uno, lo suficientemente pequeño para que un consumidor que sólo gasta en dólares tanto en $t=0$ como en $t=1$ decida ahorrar en $t=0$, y por otra parte el costo de comprar el electrodoméstico $\theta\omega_0$ es suficientemente grande como para que ese mismo consumidor decida tomar un préstamo en $t=0$.

5. Reemplazando en cada caso obtenemos

$$\begin{aligned} V^E &= \ln\left(\omega_0(1-\theta) - \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)\right) \\ &\quad + \beta \ln\left(\omega_1 + \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)(1+r)\right) + a \\ &= \ln\left(\frac{\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right) + \beta \ln\left(\frac{\beta\omega_0(1-\theta)(1+r) + \beta\omega_1}{(1+\beta)}\right) + a \\ &= (1+\beta) \ln\left(\frac{\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1}{(1+\beta)}\right) + \beta \ln \beta - \ln(1+\beta) + a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V^{NE} &= \ln\left(\omega_0 - \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0 - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)\right) + \beta \ln\left(\omega_1 + \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0 - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)(1+r)\right) \\ &= (1+\beta) \ln\left(\frac{\omega_0(1+r) + \omega_1}{(1+\beta)}\right) + \beta \ln \beta - \ln(1+\beta) \end{aligned}$$

6. La desigualdad que implica que el consumidor prefiere comprar el electrodoméstico a no hacerlo es

$$(1+\beta) \ln(\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1) + a \geq (1+\beta) \ln(\omega_0(1+r) + \omega_1)$$

o bien

$$\frac{a}{(1+\beta)} \geq \ln\left(\frac{\omega_0(1+r) + \omega_1}{(\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1)}\right)$$

o bien

$$\exp\left(\frac{a}{(1+\beta)}\right) \geq \frac{\omega_0(1+r) + \omega_1}{\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1}$$

7. Supongamos que (ω_0, ω_1) aumentan ambos en una misma proporción ϕ . Dado que la desigualdad en (6) se verifica el consumidor decide comprar el electrodoméstico. Dado que las desigualdades en (4) se verifican entonces sabemos que $s^E < 0$. Transcribimos s^E aquí:

$$\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}$$

si (ω_0, ω_1) aumentan en una proporción, suponemos que las dotaciones con aumento pueden escribirse como $((1+\phi)\omega_0, (1+\phi)\omega_1)$. En consecuencia el monto de s^E es ahora

$$\begin{aligned} s_\phi^E &= \frac{\beta(1+r)\omega_0(1+\phi)(1-\theta) - (1+\phi)\omega_1}{(1+r)(1+\beta)} \\ &= \left[\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)} \right] (1+\phi) \end{aligned}$$

con $\phi > 0$. Dado que $\left[\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)} \right] < 0$, la conclusión es que si (ω_0, ω_1) aumentan en una proporción ϕ el endeudamiento (el negativo de s^E) aumenta en la misma proporción. Si sólo ω_0 aumenta podemos observar que

$$\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} = \frac{\beta(1+r)(1-\theta)}{(1+r)(1+\beta)}$$

Dado que $\theta < 1$ tenemos que $\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} > 0$. Pero entonces, si ω_0 aumenta, lo hace s^E , pero entonces s^E se hace menos negativo, siendo entonces *menor* el monto de préstamo que el consumidor decide en $t = 0$ cuanto mayor sea ω_0 .

8. Para responder esta pregunta, dado que por las condiciones en (4) y (6) el consumidor toma un préstamo en $t = 0$ para comprar el electrodoméstico (ya que la desigualdad (6) afirma que le es preferido a no comprarlo) entonces obtenemos los consumos directamente:

$$\begin{aligned} c_0^E &= \omega_0(1-\theta) - s^E = \frac{\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1}{(1+\beta)(1+r)} \\ c_1^E &= \omega_1 + s^E(1+r) = \frac{\beta}{(1+\beta)} [\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1] \end{aligned}$$

Claramente entonces $c_0^E > 0$ y $c_1^E > 0$ si y sólo si

$$\frac{\omega_1}{\omega_0(1+r)} > (\theta - 1)$$

9. (10 puntos) La condición en (6) es

$$\exp\left(\frac{a}{(1+\beta)}\right) \geq \frac{\omega_0(1+r) + \omega_1}{\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1}$$

con $(1-\theta) < 0$. Claramente esto implica que si ω_0 es más grande, lo es $\frac{\omega_0(1+r) + \omega_1}{\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1}$, con lo cual para un dado a y β un valor más grande de ω_0 hace que la desigualdad sea menos probable que se cumpla (de hecho, para

$$\omega_0 \simeq \omega_0^* \equiv \frac{\omega_1}{(\theta - 1)(1+r)}$$

el denominador $\omega_0(1-\theta)(1+r) + \omega_1$ es prácticamente cero y entonces la desigualdad no podría ser cierta). En el caso de la desigualdad del punto (8):

$$\frac{\omega_1}{\omega_0(1+r)} > (\theta - 1)$$

claramente el lado izquierdo es decreciente en ω_0 con lo cual cuanto mayor sea ω_0 menor es $\frac{\omega_1}{\omega_0(1+r)}$ y menos probable es que esta desigualdad se cumpla.

10. Supongamos que las condiciones en (4), (6) y (8) son ciertas y que $\theta > 1$. En este caso el préstamo que toma el consumidor (para comprar el electrodoméstico) es nuevamente:

$$\frac{\beta(1+r)\omega_0(1+\phi)(1-\theta) - (1+\phi)\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}$$

Por los mismos argumentos que en el punto (7), si tanto ω_0 como ω_1 fuesen más grandes en una proporción ϕ entonces s^E también es mayor en una proporción ϕ . Si sólo ω_0 aumenta otra vez comprobamos que

$$\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} = \frac{\beta(1+r)(1-\theta)}{(1+r)(1+\beta)}$$

pero como ahora $\theta > 1$ entonces $\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} < 0$. Esto significa que si ω_0 es mayor, es menor entonces s^E . Pero como $s^E < 0$ entonces un menor s^E es equivalente a decir que el monto de préstamo que toma el consumidor es mayor cuanto mayor sea ω_0 .

11. En este caso tenemos que $\phi = 0.1$. Suponiendo $\theta > 1$ y las condiciones en (4), (6) y (8), el préstamo tomado por el consumidor sería simplemente

$$\left[\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)} \right] \quad (1.1)$$

Esto significa que el incremento del préstamo es del 10%. Claramente este incremento no es siquiera *aproximadamente igual* al incremento del 50% del crédito que según el artículo se verificó en Argentina entre febrero de 2006 y febrero de 2007. Esto podría interpretarse como el hecho de que no podría explicarse el incremento del monto de préstamo por un aumento del ingreso corriente y del ingreso futuro (percibido) del 10%, que es un poco superior a lo que se incrementó el producto anualmente en el último trienio.

Segundo Cuatrimestre 2007 UBA - Parcialito

En la coyuntura actual una de las preocupaciones más grandes hacia el futuro es lo que ocurrirá con el accionar de los gremios. En su edición impresa del día 28 de setiembre de 2007 el diario El Cronista Comercial publica un artículo titulado "**Gremios le ponen precio al pacto social: 30% para salarios**". El mismo título sugiere que para que no existan mayores "conflictos" el incremento salarial tendrá que tener ese piso. Este problema simplemente intenta racionalizar la existencia de un *precio* por parte de un trabajador para evitar un conflicto sindical y eventualmente originar mayores costos a través de medidas de fuerza. Suponga entonces un consumidor-trabajador que debe decidir primero si aceptar trabajar una cantidad de horas que luego decidirá por un salario w por unidad de tiempo o, en su lugar, recurrir al paro. Si este trabajador decide no recurrir al paro y trabajar, suponemos que entonces el trabajador decide la cantidad de horas trabajadas y la cantidad de horas consumidas como ocio, de una dotación total de $H > 1$ horas. Sea l el consumo de horas de ocio. Este trabajador consume además un conjunto de bienes cuyo precio normalizamos a 1. Sea c el consumo de esos bienes. Las preferencias de este trabajador (dado que decide trabajar y no recurrir al paro) se representan por la función de utilidad

$$u(c, l) = A\sqrt{l} + \sqrt{c}$$

con $A > 0$. Si decide recurrir al paro, obtiene un consumo de ocio de H horas y con probabilidad $\eta \in (0, 1)$ sus reclamos tienen un impacto tal que recibe un subsidio igual a una cantidad de bienes igual a tres veces lo que obtendría si no recurriese al paro y trabajase al salario w la cantidad de horas deseada y con probabilidad $(1 - \eta)$ obtiene un consumo de 0 bienes. Las preferencias sobre consumo de ocio y de bienes se representan del mismo modo que en el caso en que no recurre al paro.

1. (15 puntos) Plantee el problema de este consumidor si decide trabajar y no recurrir al paro
2. (15 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden correspondiente al problema anterior; ¿se cumplen las condiciones de segundo orden? Justifique su respuesta (no tiene necesariamente que demostrar que se cumplen estas últimas, pero su respuesta debe estar demostrada de alguna manera)
3. (10 puntos) De las condiciones del punto anterior obtenga el valor de l y el de c que surgen de ellas

4. (10 puntos) Escriba la utilidad "indirecta" del trabajador si decide trabajar y no recurrir al paro
5. (10 puntos) Escriba la utilidad esperada de este trabajador si decidiese recurrir al paro
6. (15 puntos) Obtenga la utilidad indirecta del trabajador antes de decidir si recurrir al paro o no
7. (10 puntos) Del punto anterior: escriba entonces la desigualdad que caracteriza al trabajador que decide trabajar y no recurrir a la medida de fuerza.
8. (15 puntos) Del punto anterior: ¿es posible predecir si el trabajador decide recurrir al paro o trabajar cuando $w \downarrow 0$? ¿y cuando w es suficientemente grande?

Soluciones sugeridas.

1. (15 puntos) El problema de este consumidor si decide trabajar y no recurrir al paro puede plantearse como

$$\max_{(l,c)} A\sqrt{l} + \sqrt{c} \text{ sujeto a } c = w(H-l)$$

con $l \leq H$.

2. (15 puntos) Luego de reemplazar la restricción de presupuesto en la función de utilidad el problema es simplemente elegir l que maximice $A\sqrt{l} + \sqrt{w(H-l)}$. La condición de primer orden correspondiente al problema anterior es:

$$\frac{A}{2\sqrt{l}} - \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{(H-l)}} = 0$$

Nótese que la función de utilidad es estrictamente cóncava, esto es, $u_{cc} < 0$ y $u_{ll} < 0$, con $u_{cc}u_{ll} - 2u_{lc} > 0$. Esto implica que el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} u_{cc} & u_{cl} & u_c \\ u_{lc} & u_{ll} & u_l \\ u_c & u_l & 0 \end{bmatrix}$$

dado que $u_{lc} = u_{cl} = 0$ es igual a $-u_c^2 u_{ll} - u_l^2 u_{cc} > 0$. Por lo tanto las preferencias son estrictamente convexas y por lo tanto se cumplen las condiciones de segundo orden.

3. (10 puntos) De las condiciones del punto anterior despejamos el valor de l que satisface la condición de primer orden:

$$A^2(H-l) = wl \Rightarrow l^M = \frac{A^2}{A^2+w}H$$

y entonces

$$c^M = w \left(H - \frac{A^2}{A^2+w}H \right) = \frac{w^2H}{A^2+w}$$

4. (10 puntos) La utilidad "indirecta" del trabajador si decide trabajar y no recurrir al paro es

$$\begin{aligned} V^T &\equiv A\sqrt{\frac{A^2}{A^2+w}H} + \sqrt{\frac{w^2H}{A^2+w}} = \left(\sqrt{\frac{H}{A^2+w}} \right) (A^2+w) \\ &= \sqrt{H}\sqrt{(A^2+w)} \end{aligned}$$

5. (10 puntos) La utilidad esperada de este trabajador si decidiese recurrir al paro es simplemente

$$\begin{aligned} V^P &= \eta \left[A\sqrt{H} + \sqrt{\frac{3w^2H}{A^2+w}} \right] + \eta A\sqrt{H} \\ &= A\sqrt{H} + \eta \sqrt{\frac{3w^2H}{A^2+w}} \end{aligned}$$

6. (15 puntos) La utilidad indirecta del trabajador antes de decidir si recurrir al paro o no es

$$V = \max \{V^T; V^P\} = \max \left\{ \sqrt{H} \sqrt{(A^2 + w)}; \sqrt{H} \left(A + \eta \sqrt{\frac{3w^2}{A^2 + w}} \right) \right\}$$

7. (10 puntos) Del punto anterior deducimos que la desigualdad que caracteriza al trabajador que decide trabajar y no recurrir a la medida de fuerza es simplemente

$$\sqrt{(A^2 + w)} \geq A + \eta \sqrt{\frac{3w^2}{A^2 + w}}$$

8. (15 puntos) Del punto anterior tomamos primero el limite de $w \downarrow 0$ a ambos lados de la desigualdad, el cual se transforma en

$$A \geq A$$

el cual en rigor se transforma en igualdad. Esto significa que cuando el salario es infinitesimal (o despreciable) el consumidor tenderá a estar indiferente entre elegir trabajar por un salario casi nulo o realizar un paro y cobrar con probabilidad η un pago casi nulo.

Luego tomamos el limite con w tendiendo a infinito: el lado derecho tiende a infinito, y lo mismo ocurre con el lado izquierdo. Ante este problema de comparar infinitos (lo cual significa una indeterminación) tomamos la fracción

$$\frac{A + \eta \sqrt{\frac{3w^2}{A^2 + w}}}{\sqrt{(A^2 + w)}}$$

Utilizando L'Hopital tenemos que

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{A + \eta \sqrt{\frac{3w^2}{A^2 + w}}}{\sqrt{(A^2 + w)}} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\eta \sqrt{3} \frac{\left[1 - \frac{w}{2(A^2 + w)}\right]}{(A^2 + w)^{1/2}}}{\frac{1}{2\sqrt{A^2 + w}}} = \lim_{w \rightarrow \infty} \eta 2\sqrt{3} \left[1 - \frac{w}{2(A^2 + w)}\right] = \eta \sqrt{3}$$

Esto significa que si $\eta > \frac{1}{\sqrt{3}}$ entonces para un w suficientemente alto $A + \eta \sqrt{\frac{3w^2}{A^2 + w}}$ es mayor que $\sqrt{(A^2 + w)}$ y por lo tanto preferirá ir al paro, mientras que si $\eta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ entonces para un w suficientemente alto $A + \eta \sqrt{\frac{3w^2}{A^2 + w}}$ es menor que $\sqrt{(A^2 + w)}$ y por lo tanto preferirá trabajar.

Segundo Cuatrimestre 2007 UBA - Parcial

Los acuerdos *marco* entre países son cada vez más comunes. En un reciente artículo publicado en la página web Mercosur ABC¹ de fecha 18/10/07 aparecía un artículo con el título de "ARGENTINA - UE: TAIANA Y LA MINISTRA DE AGRICULTURA FIRMARON UN ACUERDO PARA AMPLIAR LA COOPERACIÓN ECONÓMICA ". En el mismo se afirma que

"Este acuerdo y la visita de la Comisario demuestran el interés de nuestro país y de la UE de mantener y profundizar el trabajo conjunto" destacó el Canciller argentino, quien firmó junto a Mariann Fischer-Boël un convenio por 65 millones de euros destinados a las Pymes, formación laboral, educación y fortalecimiento de la relación bilateral la semana pasada"

y luego

"Para el impulso de las Pymes, y con un presupuesto de 22,75 millones de euros, el objetivo del Programa es promover la expansión de las pequeñas y medianas empresas existentes y la creación de otras nuevas, apoyar su competitividad, agilizar la resolución de conflictos comerciales, fortalecer el diálogo entre los sectores público y privado e integrar plenamente el concepto de desarrollo sustentable."

¹La nota completa puede leerse en el sitio <http://www.mercosurabc.com.ar/nota.asp?IdNota=1296&IdSeccion=2>

La idea entonces de este tipo de acuerdos es el de otorgar subsidios (o al menos créditos subsidiados) para Pymes en Argentina. ¿Pero qué interés puede tener un consumidor europeo en realizar semejante contribución a través del pago de sus impuestos? Para responder esta pregunta este ejercicio plantea un problema de equilibrio de mercado competitivo. Suponga un conjunto de consumidores indizados por $i = 1, 2, \dots, I$. Podemos interpretar a estos consumidores como familias que viven en Europa. Cada consumidor i recibe un ingreso nominal de m^i euros y consume dos bienes: cereales provenientes de Argentina y otros bienes. Sea x_1^i y x_2^i las cantidades respectivas de los bienes mencionados y sean sus precios nominales p_1 y p_2 . Supongamos para mayor simplicidad que $p_2 = 1$. A su vez, cada consumidor debe pagar un impuesto de suma fija igual a T euros, donde suponemos que $T \leq \min \{m^i\}_{i=1}^I$. Estos impuestos se destinan únicamente a subsidiar a productores de cereales en Argentina (véase más abajo). Las preferencias de cada consumidor i satisfacen los supuestos usuales vistos en clase y se suponen que pueden representarse a través de la función de utilidad

$$U^i(x_1^i, x_2^i) = \alpha_i \ln(x_1^i) + (1 - \alpha_i) \ln(x_2^i)$$

con $0 < \alpha_i < 1$.

En Argentina encontramos J firmas idénticas que producen cereal utilizando únicamente *capital*. Sea y_1^j la cantidad de cereal producido por la firma j , y sea k^j la cantidad de capital utilizado por la firma j . La tecnología de producción está dada por la función de producción

$$y_1^j = 2(k^j)^{1/2}$$

El precio de mercado del capital es de R euros, pero el estado argentino subsidia el uso del capital utilizando los fondos provistos por el fondo mencionado. El subsidio es igual a una proporción τ del total de pagos al capital realizado por la firma j , con $\tau \in (0, 1)$.

A su vez, el estado argentino gasta la totalidad de los fondos recibidos en estos subsidios otorgados a las J firmas productoras de cereales. Estos fondos igualan a la totalidad de los impuestos recaudados de los I consumidores europeos.

1. (5 puntos) Obtenga la demanda marshalliana de cada consumidor individual i por cereal y también por los otros bienes.
2. (5 puntos) Obtenga la demanda agregada por parte del conjunto de los I consumidores de cereales.
3. (10 puntos) Obtenga la demanda (óptima) por capital de cada firma j y luego la oferta de cereal de la firma j
4. (5 puntos) Obtenga la oferta agregada de cereal (la de las J firmas argentinas)
5. (10 puntos) Escriba la condición de equilibrio en el mercado de cereales (sin resolver todavía) para este ejercicio
6. (10 puntos) Obtenga el precio de cada unidad de cereal (en este caso, suponga que el cereal se mide por kg) en euros como función, entre otras variables, de τ y de T
7. (5 puntos) Escriba cuidadosamente la condición de balance para el programa: i.e., que la totalidad de subsidios otorgados es igual al total de los impuestos recaudados, y escríbalo reemplazando por las respuestas obtenidas en 6 y 3.

Desde aquí y hasta el final del problema suponga que

$$\alpha^i = \frac{i}{1+I}, \quad m^i = \frac{I+1}{i}$$

8. (10 puntos) De la condición del punto 7 y utilizando los nuevos supuestos despeje τ como función de T y del resto
9. (10 puntos) Obtenga el precio del cereal de equilibrio sustituyendo su respuesta de 8 en la del punto 6. Este precio de cereal de equilibrio debe quedar en función de τ . Llamemos a este precio $p^*(T)$

10. (10 puntos) Obtenga la derivada $\frac{\partial \ln p^*(T)}{\partial T}$ evaluado en $T = 0$ y prediga su signo. Interprete en no más de dos renglones
11. (10 puntos) Escriba la utilidad indirecta de cada consumidor i evaluado en el equilibrio $p^*(T)$, llamándolo $V^i(p^*(T))$
12. (10 puntos) ¿Qué signo tiene la derivada $\frac{\partial V^i(p^*(T))}{\partial T}$ cuando es evaluado en $T = 0$? A partir de esta respuesta responda si cada consumidor de Europa estaría de acuerdo en comenzar a pagar un impuesto T pequeño que subsidie a los productores de cereal de Argentina.

Soluciones sugeridas.

1. (5 puntos) Dado que la función de utilidad es una transformación logarítmica (y por lo tanto, monótona creciente) de una función de utilidad Cobb-Douglas la demanda marshalliana de cada consumidor individual i por cereal es simplemente

$$x_1^m = \frac{\alpha_i (m^i - T)}{p_1}$$

y la de los otros bienes es

$$x_2^m = (1 - \alpha_i) (m^i - T)$$

2. (5 puntos) La demanda agregada por parte del conjunto de los I consumidores de cereales es simplemente

$$x_1^d = \frac{\sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T)}{p_1}$$

Nótese que NO puede escribirse como $\frac{I \alpha_i (m^i - T)}{p_1}$ ya que los consumidores no son homogéneos.

3. (10 puntos) La demanda (óptima) por capital de cada firma j se obtiene de elegir k que maximiza

$$p_1 2 (k^j)^{1/2} - R (1 - \tau) k^j$$

La CPO es

$$\frac{p_1}{(k^j)^{1/2}} - R (1 - \tau) = 0$$

(La CSO se verifica ya que $2 (k^j)^{1/2}$ es una función estrictamente cóncava y por la linealidad de $R (1 - \tau) k^j$ con respecto a k^j). De la CPO despejamos

$$k^{j,d} = \left(\frac{p_1}{R (1 - \tau)} \right)^2$$

y la oferta de cereal de la firma j es simplemente

$$y_1^{j,s} = 2 \left[\left(\frac{p_1}{R (1 - \tau)} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{2p_1}{R (1 - \tau)}$$

4. (5 puntos) La oferta agregada de cereal (la de las J firmas argentinas) es

$$y_1^s = \frac{2Jp_1}{R (1 - \tau)}$$

ya que las J firmas sí son idénticas.

5. (10 puntos) La condición de equilibrio en el mercado de cereales (sin resolver todavía) para este ejercicio es

$$\frac{\sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T)}{p_1} = \frac{2Jp_1}{R (1 - \tau)}$$

6. (10 puntos) El precio de cada unidad de cereal (en este caso, suponga que el cereal se mide por kg) en euros como función de τ y de T es

$$p_1(\tau, T) = \left(\frac{R(1-\tau) \sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T)}{2J} \right)^{1/2}$$

7. (5 puntos) La condición de balance para el programa, reemplazando por las respuestas obtenidas en 6 y 3 es

$$J\tau Rk^j = TI$$

Utilizando la demanda por capital y el precio obtenido en 6 tenemos que el lado izquierdo es

$$\begin{aligned} J\tau R \left(\frac{p_1(\tau, T)}{R(1-\tau)} \right)^2 &= JR\tau \left(\frac{R(1-\tau) \sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T)}{(R(1-\tau))^2 2J} \right) \\ &= \frac{\tau \sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T)}{2(1-\tau)} \end{aligned}$$

En consecuencia la condición es

$$\frac{\tau \sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T)}{2(1-\tau)} = TI$$

8. (10 puntos) De la condición del punto 7 y utilizando los nuevos supuestos tenemos que

$$\tau \sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T) = 2(1-\tau)TI$$

\Leftrightarrow

$$\tau \left(\sum_{i=1}^I \alpha_i m^i - \sum_{i=1}^I \alpha_i T \right) = 2(1-\tau)TI$$

\Leftrightarrow

$$\tau \left(I - T \sum_{i=1}^I \left(\frac{i}{I+1} \right) \right) = 2(1-\tau)TI$$

\Leftrightarrow (utilizando la ayuda puesta en el pizarrón el día del examen, $\sum_i i = \frac{I(1+I)}{2}$)

$$\tau \left(I - T \left(\frac{I}{2} \right) \right) = 2(1-\tau)TI \Leftrightarrow \tau \left(1 - \frac{T}{2} \right) = 2(1-\tau)T$$

Entonces despejamos τ

$$\tau = \frac{4T}{2+3T}$$

y por lo tanto

$$1 - \tau = \frac{2-T}{2+3T}$$

Nótese que necesitaríamos $T < 2$ para que $1 - \tau > 0$. En los últimos puntos se supondrá un T muy pequeño con lo cual la desigualdad mencionada se cumplirá automáticamente.

9. (10 puntos) El precio del cereal de equilibrio como función de τ es

$$\begin{aligned} p_1(\tau, T) &= \left(\frac{R(1-\tau) \sum_{i=1}^I \alpha_i (m^i - T)}{2J} \right)^{1/2} = \left(\frac{R \left(\frac{2-T}{2+3T} \right) \left(I - \frac{TI}{2} \right)}{2J} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{RI(2-T) \left(1 - \frac{T}{2} \right)}{2J(2+3T)} \right)^{1/2} \equiv p^*(T) \end{aligned}$$

10. (10 puntos) La derivada $\frac{\partial \ln p^*(T)}{\partial T}$ tiene el mismo signo que la siguiente derivada

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \left[\ln(2-T) + \ln\left(1 - \frac{T}{2}\right) - \ln(1+T) \right] \\ &= \frac{-1}{2-T} - \frac{(1/2)}{1 - \frac{T}{2}} - \frac{1}{T+1} \end{aligned}$$

y evaluado en $T = 0$ es

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -2 < 0$$

con lo cual tiene signo negativo. La idea es que si pasamos de tener 0 subsidios y cero impuestos a tener un impuesto infinitesimal pero subsidios positivos entonces el precio de equilibrio es menor en este último caso. La intuición es el incremento de la oferta del bien 1.

11. (10 puntos) La utilidad indirecta de cada consumidor i evaluado en el equilibrio $p^*(T)$ es simplemente

$$\begin{aligned} & \alpha_i [\ln(\alpha_i) + \ln(m^i - T) - \ln p_1^*(T)] + (1 - \alpha_i) [\ln(1 - \alpha_i) + \ln(m^i - T)] \\ &= \ln(m^i - T) - \alpha^i \ln(p_1^*(T)) \equiv V^i(p^*(T)) \end{aligned}$$

12. (10 puntos) La derivada $\frac{\partial V^i(p^*(T))}{\partial T}$, cuando es evaluado en $T = 0$ tiene el signo de

$$-\frac{1}{m^i} + 2\alpha^i = -\frac{i}{I+1} + \frac{2i}{I+1} = \frac{i}{I+1} > 0$$

Esto significa que cada consumidor de Europa **prefiere** comenzar a pagar un impuesto T pequeño que subsidie a los productores de cereal de Argentina a no hacerlo.

Semestre Otoño 2008 - UdeSA - Parcial

El día 22 de abril de 2008 la cotización de los títulos valores que cotizan en Bolsa (acciones de empresas locales, bonos emitidos por el Estado argentino) cayeron entre un 3% y un 7% en ese día. Esta caída fue reflejada por los principales diarios en Argentina. Por ejemplo, La Nación tituló: “**Crece el mal clima financiero y los inversores buscan refugio**”. En este artículo puede leerse:

El cóctel de desconfianza que detonó ayer venía sumando ingredientes en las últimas semanas. La aceleración de la inflación -que el Gobierno se niega a reconocer (...)- y la aguda confrontación con el sector agropecuario, sin salida a la vista, dieron el marco propicio para que surja toda clase de versiones, que van desde la posibilidad de recambios en el gabinete de ministros hasta las apuestas sobre un posible desdoblamiento de la plaza cambiaria para facilitar la aparición de un dólar comercial más elevado y más acorde con las preferencias de los industriales.

También lo reflejó el matutino *Ámbito Financiero*, que tituló “**Inusitado movimiento accionario**”. En el mismo puede leerse:

La demanda por dólares y por fugar fondos se notó claramente en el mercado de bonos. La fuerte caída de los títulos en pesos, en medio de una ola de ventas, reflejó el interés de muchos inversores de abandonar los activos argentinos, pasarse a dólares para eventualmente enviarlos al exterior.

Este problema intenta racionalizar el incentivo de estos inversores a vender como (al menos así parece) lo hicieron el 22/4/08, a través de una aplicación de la teoría de la elección de un consumidor - inversor que enfrenta riesgo. Suponga dos períodos, $t = 0, 1$. Existe un bien de consumo en cada período llamado *dólar* cuyo precio nominal es 1 en cada período. En $t = 0$ el inversor posee una dotación de D dólares y B bonos. No recibe ninguna dotación en $t = 1$. En $t = 0$ el inversor puede comprar o vender dólares y también comprar o vender bonos. El precio de cada bono en $t = 0$ es de q pesos (con $q < 1$) y el tipo de cambio nominal en $t = 0$ es igual a \bar{e} pesos por dólar. Cada (unidad del) bono promete pagar exactamente 1 peso en $t = 1$. Sin embargo, el tipo nominal de cambio correspondiente a $t = 1$ es considerado como aleatorio desde la perspectiva de $t = 0$. El tipo de cambio en 1 puede ser igual a \hat{e} o a \bar{e} , con $\hat{e}^{-1} < q(\bar{e})^{-1}$. Sea \hat{c} el consumo de dólares en $t = 1$ si el tipo de

cambio en $t = 1$ es igual a \hat{e} y sea \bar{c} lo propio si el tipo de cambio en $t = 1$ es igual a \bar{e} . Las preferencias de este consumidor se asumen como representadas por la siguiente función de utilidad (esperada):

$$U(\bar{c}, \hat{c}) = \pi u(\hat{c}) + (1 - \pi) u(\bar{c})$$

donde

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0$$

Denotemos como d los dólares que luego de transar en $t = 0$ en el mercado correspondiente el inversor decide tener en su portafolio para financiar parte del consumo en $t = 1$. Sea b la cantidad de bonos que luego de transar en $t = 0$ el inversor decide tener en su portafolio también para financiar parte del consumo en $t = 1$ (**Por favor, utilice esta notación**).

1. (15 puntos) Escriba la restricción presupuestaria para cada período y para cada contingencia de $t = 1$, utilizando la notación provista por el enunciado del ejercicio.
2. (10 puntos) Plantee el problema del consumidor, reemplazando la restricción del período 0 en las dos restricciones del período 1 (ayuda: debe quedarle una única variable de decisión).
3. (10 puntos) Obtenga la condición de primer orden. Argumente sin demostrar (pero con fundamento) que se verifica la de segundo orden.
4. (15 puntos) De la condición de primer orden obtenga la cantidad b^* que resuelve el problema del consumidor planteado más arriba.
5. (15 puntos) Suponga a partir de este punto hasta el final del ejercicio que $\sigma = 1$. Obtenga la derivada $\frac{\partial b^*}{\partial e}$ y obtenga su signo.
6. (15 puntos) Obtenga ahora la derivada $\frac{\partial b^*}{\partial \pi}$ y obtenga su signo.
7. (20 puntos) A partir de sus dos respuestas anteriores interprete en no más de cinco renglones qué relación pudo haber habido con las versiones de "apuestas sobre un posible desdoblamiento de la plaza cambiaria para facilitar la aparición de un dólar comercial más elevado y más acorde con las preferencias de los industriales" a los que se refiere el texto del diario La Nación con las ventas de títulos de bonos en pesos que se sugiere en el texto del diario *Ámbito Financiero*.

Soluciones sugeridas.

1. (15 puntos) En $t = 0$ la restricción es

$$d + \frac{q}{e}b = D + \frac{q}{e}B \quad (1)$$

ya que del lado izquierdo tenemos el valor del portafolio que el inversor acarrea de $t = 0$ a $t = 1$, el cual es financiado íntegramente por el valor de la dotación (stocks) de dólares y bonos. Para $t = 1$ las restricciones son

$$\hat{c} = d + \frac{b}{\hat{e}}; \quad \bar{c} = d + \frac{b}{\bar{e}} \quad (2)$$

ya que el consumo en cada estado de la naturaleza se financia con los dólares obtenidos de los d dólares en efectivo más el valor en dólares de lo que los bonos en pesos pagan en $t = 1$, el cual es función del tipo de cambio en cada estado de la naturaleza.

2. (10 puntos) El problema del consumidor puede expresarse de la siguiente manera: teniendo en cuenta que de la restricción (1) $d = D + \frac{q}{e}B - \frac{q}{e}b$ entonces

$$\max_{b \geq 0} \pi u\left(D + \frac{q}{e}B - \frac{q}{e}b + \frac{b}{\hat{e}}\right) + (1 - \pi) u\left(D + \frac{q}{e}B - \frac{q}{e}b + \frac{b}{\bar{e}}\right)$$

donde $u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$.

3. (10 puntos) Suponiendo una solución interior ($b^* > 0$) la condición de primer orden con respecto a b es:

$$\left(\frac{1}{\bar{e}} - \frac{q}{\bar{e}}\right) \pi \left(D + \frac{q}{\bar{e}}B - \frac{q}{\bar{e}}b + \frac{b}{\bar{e}}\right)^{-\sigma} + (1 - \pi) \frac{(1 - q)}{\bar{e}} \left(D + \frac{q}{\bar{e}}B - \frac{q}{\bar{e}}b + \frac{b}{\bar{e}}\right)^{-\sigma} = 0$$

La condición de segundo orden se verifica ya que la función u utilizada aquí es estrictamente cóncava (al ser $\sigma > 0$) las preferencias sobre canastas contingentes (\bar{c}, \hat{c}) son estrictamente convexas, lo cual implica la condición de segundo orden del problema de maximización de utilidad.

4. (15 puntos) De la condición de primer orden tenemos que

$$(1 - \pi) \frac{(1 - q)}{\bar{e}} \left(D + \frac{q}{\bar{e}}B - \frac{q}{\bar{e}}b + \frac{b}{\bar{e}}\right)^{\sigma} = \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi \left(D + \frac{q}{\bar{e}}B - \frac{q}{\bar{e}}b + \frac{b}{\bar{e}}\right)^{\sigma}$$

o bien

$$\left[(1 - \pi) \frac{(1 - q)}{\bar{e}}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \left(D + \frac{q}{\bar{e}}B - \frac{q}{\bar{e}}b + \frac{b}{\bar{e}}\right) = \left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi\right]^{\frac{1}{\sigma}} \left(D + \frac{q}{\bar{e}}B - \frac{q}{\bar{e}}b + \frac{b}{\bar{e}}\right)$$

Esta es una ecuación lineal en b . Despejando b entonces

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{(1 - q)}{\bar{e}} \left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \left[\frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \right\} b \\ & = (D + qB) \left\{ \left[\frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^{\frac{1}{\sigma}} - \left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi\right]^{\frac{1}{\sigma}} \right\} \end{aligned}$$

con lo cual la cantidad b^* que resuelve el problema del consumidor planteado más arriba es:

$$b^* = \frac{(D + qB) \left\{ \left[\frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^{\frac{1}{\sigma}} - \left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi\right]^{\frac{1}{\sigma}} \right\}}{\frac{(1 - q)}{\bar{e}} \left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \left[\frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^{\frac{1}{\sigma}}} \quad (3)$$

5. (15 puntos) A partir de este punto suponemos hasta el final del ejercicio que $\sigma = 1$. En consecuencia b^* queda:

$$\begin{aligned} b^* & = \frac{(D + qB) \left\{ \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}} - \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi \right\}}{\frac{(1 - q)\pi}{\bar{e}} \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) + \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}} \\ & = \frac{(D + qB) \left\{ \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}} - \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi \right\}}{\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}} \end{aligned}$$

La derivada $\frac{\partial b^*}{\partial \bar{e}}$ es simplemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial b^*}{\partial \bar{e}} & = (D + qB) \left\{ \frac{\left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right] \left(-\frac{\pi}{\bar{e}^2}\right) - \left\{ \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}} - \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi \right\} \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}} \frac{1}{\bar{e}^2}}{\left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^2} \right\} \\ & = -(D + qB) \left\{ \frac{\left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right] \left(\frac{\pi}{\bar{e}^2}\right) + \left\{ \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}} - \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \pi \right\} \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}} \frac{1}{\bar{e}^2}}{\left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^2} \right\} \\ & = -\frac{(D + qB) \left[\frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^2}{\left[\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}}\right) \frac{(1 - q)(1 - \pi)}{\bar{e}}\right]^2} < 0 \end{aligned}$$

6. (15 puntos) La derivada $\frac{\partial b^*}{\partial \pi}$ es

$$\begin{aligned}\frac{\partial b^*}{\partial \pi} &= \frac{\bar{e}(D + qB) \left\{ \left[\frac{-1}{\bar{e}} - \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}} \right) \right] (1 - \pi) + \left[\frac{(1-q)(1-\pi)}{\bar{e}} - \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}} \right) \pi \right] \right\}}{\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}} \right) (1 - q) (1 - \pi)^2} \\ &= \frac{\bar{e}(D + qB) \left[\frac{-q(1-\pi)}{\bar{e}} - \left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}} \right) \right]}{\left(\frac{q}{\bar{e}} - \frac{1}{\bar{e}} \right) (1 - q) (1 - \pi)^2} = \frac{-\bar{e}(D + qB) \left[\frac{q(1-\pi)}{q - \frac{\bar{e}}{e}} + 1 \right]}{(1 - q) (1 - \pi)^2} \\ &= \frac{-\bar{e}(D + qB) \left[\frac{(1-\pi)}{1 - \frac{\bar{e}}{qe}} + 1 \right]}{(1 - q) (1 - \pi)^2}\end{aligned}$$

Con los supuestos $\frac{1}{\bar{e}} < \frac{q}{\bar{e}}$ y $q < 1$ entonces $\bar{e} < q\hat{e}$ y por lo tanto $\left(1 - \frac{\bar{e}}{q\hat{e}}\right) > 0$. Por lo tanto podemos afirmar que:

$$\frac{\partial b^*}{\partial \pi} = \frac{-\bar{e}(D + qB) \left[\frac{(1-\pi)}{1 - \frac{\bar{e}}{qe}} + 1 \right]}{(1 - q) (1 - \pi)^2} < 0$$

7. (20 puntos) Para la interpretación usaremos el supuesto $\pi + \frac{\bar{e}}{q\hat{e}} \geq 2$. Bajo este supuesto, la venta masiva de bonos en pesos observada el 22/4/08 podría atribuirse a una posible futura depreciación debido al desdoblamiento del tipo de cambio futuro (aumento en \hat{e} que lleva a una caída en b^* y por lo tanto a un incremento en $B - b^*$, de acuerdo al resultado del punto 5) o un incremento en la probabilidad de que efectivamente se desdoble el tipo de cambio y esto lleve a una posible depreciación del peso (incremento en π que también reduce b^* según la respuesta del punto y el supuesto realizado al comienzo del punto 7) ya que en ambos casos el consumidor se cubre contra pérdidas posibles provenientes de un incremento en el precio futuro del dólar (con la misma cantidad de pesos que el bono paga obtendría una menor cantidad de dólares si se verifica una depreciación del peso).

Primer cuatrimestre 2008 - UBA - Parcial 1

En los últimos meses se vino hablando del problema del incremento del precio mundial de los alimentos, como el arroz u otros cereales. La causa que comunmente se esgrime para explicar este incremento de los alimentos es la mejora en el poder adquisitivo de los consumidores de China e India. Ante este tipo de fenómenos, algunos gobiernos de países productores de estos alimentos parecerían estar dispuestos a recortar las exportaciones de estos bienes, como de hecho lo hizo el gobierno argentino. Este ejercicio intenta analizar este tipo de fenómenos y también la política comercial propuesta. Supongamos dos países, llamados P y C . En cada país existe un conjunto de consumidores I_P e I_C . Con un abuso de notación, suponemos también que el número de consumidores en cada país es I_P e I_C , con $0 < I_P < I_C$. Cada consumidor evalúa canastas compuestas por cantidades de dos bienes: alimentos (bien 1) y otros bienes (genéricamente denotado como bien 2). Las preferencias de cada agente i están representadas por la función de utilidad

$$U^i(x_1^i, x_2^i) = (x_1^i)^{\alpha_i} (x_2^i)^{1-\alpha_i}$$

con

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_C, & \forall i \in I_C \\ \alpha_P, & \forall i \in I_P \end{cases}$$

con $0 < \alpha_C, \alpha_P < 1$. Cada consumidor i recibe un ingreso de m^i dólares. Los precios en dólares de cada producto son iguales a (p_1, p_2) . Por otra parte, existen productores de alimentos en ambos países. Cada productor está denotado por j . Existen J_C productores en C y J_P productores en P , con $0 < J_C < J_P$. Con un abuso de notación J_C denota también el conjunto de productores del país C y lo propio ocurre con J_P . Cada productor j posee una cantidad fija de tierra T^j . Luego debe contratar capital y trabajo a precios respectivos w_j y r_j en dólares, donde:

$$r_j = \begin{cases} r_C, & \forall j \in J_C \\ r_P, & \forall j \in J_P \end{cases} \quad \text{y} \quad w_j = \begin{cases} w_C, & \forall j \in J_C \\ w_P, & \forall j \in J_P \end{cases}$$

(esto es, el salario en cada país es diferente del del otro país, lo mismo que para el precio del capital) para producir y_1^j kilos de alimentos con una tecnología dada por

$$y_1^j = (K^j)^{1/5} (L^j)^{3/5} (T^j)^{1/5}$$

donde K^j es la cantidad de capital que demanda en el mercado, y L^j es lo propio con respecto a la cantidad de trabajo. Se supone que en el país P existe un gobierno que grava los ingresos por ventas de cada productor por medio de un impuesto al valor de las ventas cuya alícuota es $\tau_P \in (0, 1)$. El gobierno de C no grava con ningún impuesto ni a productores ni a consumidores.

1. (10 puntos) Plantee el problema de cada consumidor i y obtenga la demanda individual por alimentos.
2. (10 puntos) Obtenga la demanda por alimentos en cada país y luego la de los dos países en conjunto.
3. (10 puntos) Plantee el problema de cada empresa $j \in J_P$, y obtenga las condiciones de primer orden y una discusión sobre las de segundo orden para cada $j \in J_P$ (ayuda: puede no pasar por la función de costo mínimo)
4. (10 puntos) De las condiciones obtenidas en el punto anterior obtenga la función de oferta de cada empresa $j \in J_P$.
5. (10 puntos) Sin realizar ningún cálculo, basado en la respuesta del punto anterior obtenga la la función de oferta de cada empresa $j \in J_C$.
6. (10 puntos) Obtenga la oferta total de alimentos en cada país y luego la de los dos países.
7. (10 puntos) Suponiendo que los únicos dos países consumidores y productores de alimentos son C y P , escriba la condición de equilibrio.
8. (10 puntos) A partir del punto anterior obtenga el precio de equilibrio de los alimentos.
9. (10 puntos) Obtenga la elasticidad del precio de equilibrio de los alimentos con respecto a $(\sum_{i \in I_C} m^i)$. ¿Qué signo tiene? ¿Puede ser esta elasticidad mayor a 1?
10. (10 puntos) Obtenga la elasticidad del precio de equilibrio de los alimentos con respecto a τ_C . ¿Qué signo tiene? ¿a qué expresión tiende esta elasticidad cuando $(\sum_{j \in J_C} T^j) \rightarrow 0$?

Soluciones sugeridas.

1. (10 puntos) El problema de cada consumidor i es

$$\max_{(x_1^i, x_2^i)} (x_1^i)^{\alpha_i} (x_2^i)^{1-\alpha_i} \text{ sujeto a } p_1 x_1^i + p_2 x_2^i \leq m^i$$

Dado que la función de utilidad es de tipo Cobb-Douglas de las notas de clase podemos deducir que la demanda individual por alimentos del agente i es:

$$x_1^i(m^i, p_1) = \frac{\alpha_i m^i}{p_1}$$

2. (10 puntos) La demanda por alimentos en cada país es

$$\text{en el país } C : X_1^C = \frac{\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i}{p_1}; \text{ en el país } P : X_1^P = \frac{\alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i}{p_1}$$

y la de los dos países en conjunto es

$$X_1 = \frac{\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i}{p_1}$$

3. (10 puntos) El problema de cada empresa $j \in J_P$ es

$$\max_{(K^j, L^j)} \left\{ p_1 (1 - \tau_P) \left((K^j)^{1/5} (L^j)^{3/5} (T^j)^{1/5} \right) - w_P L^j - r_P K^j \right\}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{3}{5} p_1 (1 - \tau_P) (K^j)^{1/5} (L^j)^{-2/5} (T^j)^{1/5} - w_P = 0 \quad (4)$$

$$\frac{p_1}{5} (1 - \tau_P) (K^j)^{-4/5} (L^j)^{3/5} (T^j)^{1/5} - r_P = 0 \quad (5)$$

Sobre las condiciones de segundo orden para cada $j \in J_P$: se trata de una función de producción Cobb-Douglas que tiene rendimientos decrecientes con respecto a (K^j, L^j) (constantes con respecto a (K^j, L^j, T^j) , pero T^j aquí actúa como una constante), con lo cual, por la misma demostración que la vista en clase, se puede demostrar que se trata de una función estrictamente cóncava, lo que hace que la función de beneficios sea estrictamente cóncava con respecto a (K^j, L^j) . El interesado puede demostrar que en este caso $F_{KK} < 0$ y $F_{LL} < 0$ y que el determinante del hessiano correspondiente a este problema de maximización de beneficios es estrictamente positivo.

4. (10 puntos) De las condiciones de primer orden obtenidas en el punto anterior dividiendo la ecuación (4) por la (5) obtenemos primero que

$$\frac{3K^j}{L^j} = \frac{w_P}{r_P} \Leftrightarrow K^j = \frac{L^j w_P}{3r_P} \quad (6)$$

y reemplazando esta ecuación en, por ejemplo, la ecuación (4) tenemos que

$$\frac{3}{5} p_1 (1 - \tau_P) \left(\frac{L^j w_P}{3r_P} \right)^{1/5} (L^j)^{-2/5} (T^j)^{1/5} = w_P$$

o bien

$$(L^j)^{1/5} = \frac{3}{5} \frac{p_1 (1 - \tau_P)}{w_P} \left(\frac{w_P}{3r_P} \right)^{1/5} (T^j)^{1/5} = \frac{3^{4/5} p_1 (1 - \tau_P) (T^j)^{1/5}}{5r_P^{1/5} w_P^{4/5}}$$

\Rightarrow

$$L^j(w_P, r_P, p_1(1 - \tau_P)) = \frac{3^4 p_1^5 (1 - \tau_P)^5 (T^j)}{5^5 r_P w_P^4};$$

$$(L^j(w_P, r_P, p_1(1 - \tau_P)))^{3/5} = \frac{3^{12/5} p_1^3 (1 - \tau_P)^3 (T^j)^{3/5}}{5^3 r_P^{3/5} w_P^{12/5}}$$

y reemplazando esta demanda por trabajo de la empresa j en la relación (6) tenemos que la demanda por capital de la empresa j es:

$$K^j(w_P, r_P, p_1(1 - \tau_P)) = \frac{3^4 p_1^5 (1 - \tau_P)^5 (T^j) w_P}{5^5 r_P w_P^4 3r_P} = \frac{3^3 p_1^5 (1 - \tau_P)^5 (T^j)}{5^5 r_P^2 w_P^3}$$

$$\Rightarrow$$

$$(K^j(w_P, r_P, p_1(1 - \tau_P)))^{1/5} = \frac{3^{3/5} p_1 (1 - \tau_P) (T^j)^{1/5}}{5r_P^{2/5} w_P^{3/5}}$$

y en consecuencia la función de oferta de cada empresa $j \in J_P$ es

$$y_j(w_P, r_P, p_1(1 - \tau_P)) = \frac{3^{12/5} p_1^3 (1 - \tau_P)^3 (T^j)^{3/5}}{5^3 r_P^{3/5} w_P^{12/5}} \cdot \frac{3^{3/5} p_1 (1 - \tau_P) (T^j)^{1/5}}{5r_P^{2/5} w_P^{3/5}} \cdot (T^j)^{1/5}$$

$$= \frac{3^3 p_1^4 (1 - \tau_P)^4}{5^4 w_P^3 r_P} \cdot T^j; \quad j \in J_P$$

5. (10 puntos) Basandonos en la respuesta del punto anterior la función de oferta de cada empresa $j \in J_C$ es simplemente

$$y_j(w_C, r_C, p_1) = \frac{3^3 p_1^4}{5^4 w_C^3 r_C} \cdot T^j; \quad j \in J_C$$

pues en este caso el vector de precios de factores (w_P, r_P) de P se reemplaza simplemente por el vector (w_C, r_C) de C , siendo que $\tau_C = 0$ (es decir, el país C no cobra impuestos a sus productores, tal cual está explicitado en el enunciado).

6. (10 puntos) La oferta total de alimentos en cada país es:

$$\begin{aligned} \text{en } P &: Y^P(w_P, r_P, p_1(1 - \tau_P)) = \frac{3^3 p_1^4}{5^4} \cdot \left(\frac{(1 - \tau_P)^4 \sum_{j \in J_P} T^j}{w_P^3 r_P} \right); \\ \text{en } C &: Y^C(w_C, r_C, p_1) = \frac{3^3 p_1^4}{5^4} \cdot \left(\frac{\sum_{j \in J_C} T^j}{w_C^3 r_C} \right) \end{aligned}$$

en consecuencia la función de oferta por alimentos de los dos países en conjunto es:

$$Y = \frac{3^3 p_1^4}{5^4} \left[\frac{(1 - \tau_P)^4 \left(\sum_{j \in J_P} T^j \right)}{w_P^3 r_P} + \frac{\left(\sum_{j \in J_C} T^j \right)}{w_C^3 r_C} \right]$$

7. (10 puntos) Suponiendo que los únicos dos países consumidores y productores de alimentos son C y P , la condición de equilibrio es simplemente:

$$\frac{\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i}{p_1} = \frac{3^3 p_1^4}{5^4} \left[\frac{(1 - \tau_P)^4 \left(\sum_{j \in J_P} T^j \right)}{w_P^3 r_P} + \frac{\left(\sum_{j \in J_C} T^j \right)}{w_C^3 r_C} \right]$$

8. (10 puntos) Del punto anterior despejamos el precio de equilibrio de los alimentos:

$$p_1^* = \frac{(\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i)^{1/5} 5^{4/5}}{3^{3/5} \left[\frac{(1 - \tau_P)^4 \left(\sum_{j \in J_P} T^j \right)}{w_P^3 r_P} + \frac{\left(\sum_{j \in J_C} T^j \right)}{w_C^3 r_C} \right]^{1/5}} \quad (7)$$

9. (10 puntos) Antes de comenzar: quisiera aclarar que esta pregunta fue incluida ya que en este curso se supone que el concepto de elasticidad-precio fue debidamente estudiada no solamente en el curso de Economía del Ciclo Básico sino también en el curso de análisis matemático. Además es distintos ejercicios puestos a disposición de los alumnos del curso apareció este concepto aplicado, con lo cual no es admisible ninguna excusa referente a la posible ausencia de este tema en las clases teóricas del curso de Microeconomía I: este presupone el cómodo manejo de este concepto, como lo respaldan esos ejercicios.

La elasticidad del precio de equilibrio de los alimentos con respecto a $(\sum_{i \in I_C} m^i)$ puede escribirse como

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial (\sum_{i \in I_C} m^i)} \cdot \frac{(\sum_{i \in I_C} m^i)}{p_1^*} = \frac{\partial \ln p_1^*}{\partial (\sum_{i \in I_C} m^i)} \cdot \left(\sum_{i \in I_C} m^i \right)$$

Con lo cual, de la expresión (7) tenemos primeramente que

$$\begin{aligned} \ln p_1^* &= \frac{4}{5} \ln 5 + \frac{1}{5} \ln \left(\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i \right) - \frac{3}{5} \ln 3 \\ &\quad - \frac{1}{5} \ln \left[\frac{(1 - \tau_P)^4 \left(\sum_{j \in J_P} T^j \right)}{w_P^3 r_P} + \frac{\left(\sum_{j \in J_C} T^j \right)}{w_C^3 r_C} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

con lo cual

$$\frac{\partial \ln p_1^*}{\partial (\sum_{i \in I_C} m^i)} = \frac{1}{5} \frac{\alpha_C}{(\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i)}$$

y entonces la elasticidad es

$$\frac{\partial \ln p_1^*}{\partial (\sum_{i \in I_C} m^i)} \cdot \left(\sum_{i \in I_C} m^i \right) = \frac{1}{5} \frac{\alpha_C (\sum_{i \in I_C} m^i)}{(\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i)}$$

que es claramente estrictamente positivo pues lo son α_C , α_P y los ingresos. Por otra parte es claro que $\frac{\alpha_C (\sum_{i \in I_C} m^i)}{(\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i)} < 1$ con lo cual $\frac{1}{5} \frac{\alpha_C (\sum_{i \in I_C} m^i)}{(\alpha_C \sum_{i \in I_C} m^i + \alpha_P \sum_{i \in I_P} m^i)} < \frac{1}{5} < 1$, con lo que esta elasticidad nunca puede ser estrictamente mayor a 1.

10. (10 puntos) Análogamente al punto anterior, la elasticidad del precio de equilibrio de los alimentos con respecto a τ_P es

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial \tau_P} \cdot \frac{\tau_P}{p_1^*} = \frac{\partial \ln p_1^*}{\partial \tau_P} \cdot \tau_P$$

De la igualdad (8) extraemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p_1^*}{\partial \tau_P} &= -\frac{1}{5} \left(\frac{-\frac{4(1-\tau_P)^3 (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P}}{\left[\frac{(1-\tau_P)^4 (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P} + \frac{(\sum_{j \in J_C} T^j)}{w_C^3 r_C} \right]} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{\frac{4(1-\tau_P)^3 (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P}}{\left[\frac{(1-\tau_P)^4 (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P} + \frac{(\sum_{j \in J_C} T^j)}{w_C^3 r_C} \right]} \right) \end{aligned}$$

con lo cual la elasticidad es

$$\frac{\partial \ln p_1^*}{\partial \tau_P} \cdot \tau_P = \frac{1}{5} \left(\frac{\frac{4(1-\tau_P)^3 \tau_P (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P}}{\left[\frac{(1-\tau_P)^4 (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P} + \frac{(\sum_{j \in J_C} T^j)}{w_C^3 r_C} \right]} \right)$$

que también es positivo pues $\tau_P \in (0, 1)$. Cuando $(\sum_{j \in J_C} T^j) \rightarrow 0$ entonces

$$\begin{aligned} &\lim_{(\sum_{j \in J_C} T^j) \rightarrow 0} \frac{1}{5} \left(\frac{\frac{4(1-\tau_P)^3 \tau_P (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P}}{\left[\frac{(1-\tau_P)^4 (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P} + \frac{(\sum_{j \in J_C} T^j)}{w_C^3 r_C} \right]} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{\frac{4(1-\tau_P)^3 \tau_P (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P}}{\frac{(1-\tau_P)^4 (\sum_{j \in J_P} T^j)}{w_P^3 r_P}} \right) = \frac{4}{5} \frac{\tau_P}{1-\tau_P} \end{aligned}$$

Primer cuatrimestre 2008 - UBA - Recuperatorio Parcial 1

En un trabajo de investigación reciente de Irene Brambilla (de Yale University y Universidad de San Andrés), Guido Porto (del Banco Mundial y UNLP) y Alessandro Tarozzi (de Duke University) estudian el impacto de una política de antidumping sobre las importaciones de parte de EEUU de pescado (más específicamente, de bagres) desde Vietnam, imponiendo aranceles sobre los mismos. Este ejercicio plantea el posible impacto que un tipo de decisión de política de este estilo pudo haber tenido sobre decisiones, por ejemplo, de educación. Supongamos

un productor de bagres que vive dos períodos, $t = 0, 1$. En cada período $t = 0, 1$ puede producir una cantidad y_t de kilos de bagre con la siguiente tecnología

$$y_t = \begin{cases} L_0^{1/4} x_0^{3/4}, & \text{si } t = 0 \\ ((1+h)L_1)^{1/4} x_1^{3/4}, & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

donde L_t es la cantidad de trabajo que el productor dedica a producir (pescar y envasar) bagres en el período t , x_t es la cantidad de insumos que utiliza para producir y_t kilos de bagre en el período t y h denota la educación que el productor decide obtener en $t = 0$ y que incrementa la productividad del trabajo en $t = 1$ (con $h \geq 0$). El productor tiene en cada período t una dotación de tiempo de H horas que dedica, parte a trabajar, parte a consumir como ocio. El precio del kilo de bagre que recibe el productor en el período t es p_t^* dólares y el precio de cada kilo de insumo que debe pagar el productor en el período t es q_t^* dólares por kilo. Este productor posee preferencias definidas sobre consumo de ocio l_t y de dólares, c_t , en cada período $t = 0, 1$, las cuales satisfacen los axiomas usuales supuestos por la teoría neoclásica, y que permiten representarse a través de la función de utilidad (intertemporal)

$$U(c_0, l_0, c_1, l_1) = \frac{(c_0^{1/3} l_0^{2/3})^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{(c_1^{1/3} l_1^{2/3})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

con $0 < \beta < 1$ y con $0 < \sigma \neq 1$. El único ingreso que el consumidor-productor recibe en cada período es el monto de beneficios que le queda luego de haber vendido el pescado al precio p_t^* y de haber pagado el costo de los insumos.

1. (10 puntos) Plantee el problema del productor del período 0 (dado L_0)
2. (10 puntos) Obtenga la cantidad de kilos de insumos en $t = 0$ que soluciona el problema planteado en el punto anterior y luego los beneficios maximizados dado L_0
3. (15 puntos) Repita los puntos (1) y (2) pero para $t = 1$, dado también h .
4. (10 puntos) Dado h , y utilizando los resultados en (2) y (3) plantee el problema de elección óptima de consumo y oferta laboral en cada período t .
5. (10 puntos) Dado h , obtenga entonces la oferta laboral óptima en cada período y el consumo de dólares óptimo en cada período, ambos como función de h y de otras variables, y reemplacelo en la función de utilidad del productor
6. (10 puntos) Plantee el problema de elección del óptimo h dados los precios del bagre y el del insumo en cada período
7. (10 puntos) Del problema planteado en (6) obtenga la solución del h^* óptimo como función de los precios del bagre y el del insumo en los dos períodos
8. (5 puntos) Suponga que EEUU realiza una política antidumping temporario, solamente en el período $t = 0$; en nuestro ejercicio equivale a una baja en p_0^* . ¿Qué ocurriría con el h^* óptimo en ese caso?
9. (5 puntos) Suponga ahora (en lugar de lo anterior) que EEUU realiza una política antidumping temporario, solamente en el período $t = 1$; en nuestro ejercicio equivale a una baja en p_1^* . ¿Qué ocurriría con el h^* óptimo en ese caso?
10. (5 puntos) Suponga ahora (en lugar de los dos anteriores) que EEUU realiza una política antidumping permanente; en nuestro ejercicio equivale a una baja en p_0^* y en p_1^* equi-proporcionales ¿Qué ocurriría con el h^* óptimo en ese caso?
11. (10 puntos) Según el resultado empírico del artículo, los autores encuentran que el efecto de la política antidumping en EEUU sobre el nivel de escolaridad ("school attendance") fue mínimo. ¿A cuál de los tres casos anteriores se ajusta mejor esta evidencia?

Segundo cuatrimestre 2008 - UBA - Parcial 1

Uno de los fenómenos más notorios de la crisis que se observa en los mercados financieros del mundo desarrollado es la caída de los precios de los commodities cerealeros. Por ejemplo, la soja, cuyo precio en dólares era de unos US\$ 600 en julio, hoy ronda los US\$ 300. La principal argumentación que se encuentra en que la crisis potencialmente producirá una "recesión" que implicará una reducción en la demanda de estos productos agropecuarios. Sin embargo, lo extraño es que también algunos precios de contado ya comienzan a reducirse, y los efectos de la crisis financiera sobre la actividad real no parece transmitirse automáticamente. Sin embargo, otros medios destacan que las peores "perspectivas a futuro" como producto de la crisis son las causantes de esta reducción del precio. Este último canal es el que explora este ejercicio.

Suponga dos períodos, $t = 0, 1$. Existen I consumidores (índizados como $i = 1, 2, \dots, I$), cada uno de los cuales vive en ambos períodos. Cada consumidor i consume dos bienes en $t = 0$, dólares (cuyo precio nominal normalizamos a 1) y maíz (cuyo precio en dólares denotamos como p). Usamos la notación x^i como la cantidad (kilos) de maíz consumidor por i en $t = 0$ y c_0^i los dólares de consumo por parte de i en $t = 0$. Cada consumidor i consume también dólares en $t = 1$ (no maíz). Cada consumidor i recibe una dotación de $\omega_0^i > 0$ dólares en $t = 0$ y 0 de maíz en $t = 0, 1$. En el período $t = 0$ existen dos mercados en los que participa el consumidor i : el de maíz (de contado) y el financiero. El mercado financiero se trata de un mercado donde el objeto transado es un "activo" cuyo precio en $t = 0$ es igual a $q > 0$ dólares y que promete pagar en el período $t = 1$ un monto de $\bar{R} > 1$ dólares por activo adquirido en $t = 1$ con probabilidad $\eta \in (0, 1)$ y 0 con probabilidad $(1 - \eta)$. Denotamos como $s = B$ la contingencia "buena", en la que el activo paga \bar{R} , mientras que $s = M$ es el estado "malo", en el que el activo paga 0. En caso en que el activo pague 0 el regulador financiero se compromete a pagar a cada tenedor del activo financiero un monto $\varepsilon > 0$ pero pequeño de dólares, independientemente de la cantidad de activos que haya adquirido en $t = 0$. Denotamos con z^i la cantidad del activo que el consumidor i decide comprar en $t = 0$ (suponemos que el consumidor no tiene ninguna dotación de este activo en $t = 0$). Cada consumidor, aparte del monto ε que sólo cobra si el activo financiero paga 0, no recibe ninguna otra transferencia o dotación de dólares en $t = 0$. Las preferencias están dadas por

$$U(x^i, c_0^i, c_{1B}^i, c_{1M}^i) = \alpha \ln x^i + (1 - \alpha) \ln c_0^i + \eta \beta \ln c_{1B}^i + (1 - \eta) \beta \ln c_{1M}^i$$

donde c_{1s}^i denota el consumo de dólares en el estado s , y donde $\alpha \in (0, 1)$.

Existen J (índizados como $j = 1, 2, \dots, J$) productores de maíz. Cada productor posee una tecnología de producción de y^j kilos de maíz en $t = 0$ que utiliza T^j unidades de tierra y l^j unidades de un combo de mano de obra + fertilizantes, cuyo precio en dólares es igual a w , todas ellas utilizadas en $t = 0$. Suponemos que cada productor tiene una cantidad fija de tierra $\bar{T}^j > 0$ que sólo puede utilizar para producir maíz, y por lo tanto no tiene posibilidad de alquilarlo u obtener ningún otro tipo de renta de esta tierra. La tecnología está dada por la función de producción

$$y^j = (l^j)^\theta (T^j)^{1-\theta}$$

con $0 < \theta < 1$.

1. (10 puntos) Escriba la restricción presupuestaria intra temporal e intra contingente de cada consumidor i en cada período y contingencia.
2. (10 puntos) Plantee el problema de cada consumidor i , reemplazando la restricción presupuestaria de $t = 0$ en la función de utilidad, de modo que sólo quede un problema en la que se involucren sólo dos variables de decisión.
3. (10 puntos) Del planteo anterior obtenga las condiciones de primer orden con respecto a z^i y x^i . Argumente en no más de dos renglones que las condiciones de segundo orden del problema del consumidor individual se verifican en este caso.
4. (10 puntos) De la condición de primer orden obtenga la demanda marshalliana por maíz en el período $t = 0$ para cada agente consumidor i .
5. (5 puntos) Del punto anterior obtenga la demanda agregada por maíz en el período $t = 0$.
6. (10 puntos) Plantee el problema de oferta óptima de cada productor j (nota: no tiene que obtener la función de costo mínimo para resolver este punto, aunque si desea lo puede obtener previamente)
7. (10 puntos) Del punto anterior, obtenga la o las condicione(s) de primer orden que caracterizan la solución del problema planteado en el punto anterior. Argumente en no más de dos renglones que se verifica la(s) condición(es) de segundo orden en este caso.

8. (10 puntos) Del punto anterior obtenga la oferta óptima de maíz del productor j en $t = 0$. Luego obtenga la oferta agregada de maíz en $t = 0$.
9. (5 puntos) Plantee la condición de equilibrio en el mercado de maíz de $t = 0$. Reemplace en esta condición por respuestas de puntos anteriores.
10. (10 puntos) Obtenga el precio de equilibrio de maíz en $t = 0$.
11. (10 puntos) Suponga que cada consumidor considera que es menos probable que se realice el estado $s = B$. ¿Qué ocurrirá con el precio de equilibrio de maíz? Demuestra su respuesta y provea también de una intuición económica de no más de tres renglones.

Soluciones sugeridas.

1. (10 puntos) Las restricciones presupuestarias intratemporales e intracontingentes de cada consumidor i son las siguientes

$$\begin{aligned} t = 0 : px^i + c_0^i + qz^i &= \omega_0^i \\ t = 1, s = B : c_{1B}^i &= \bar{R}z^i \\ t = 1, s = M : c_{1M}^i &= \varepsilon \end{aligned}$$

2. (10 puntos) El problema de cada consumidor i es el siguiente

$$\max_{(x^i, z^i)} \{ \alpha \ln x^i + (1 - \alpha) \ln (\omega_0^i - qz^i - px^i) + \eta\beta \ln (\bar{R}z^i) + (1 - \eta) \beta \ln \varepsilon \}$$

3. (10 puntos) Las condiciones de primer orden con respecto a z^i y x^i son

$$\begin{aligned} x^i : \quad \frac{\alpha}{x^i} - \frac{(1 - \alpha)p}{(\omega_0^i - qz^i - px^i)} &= 0 \\ z^i : \quad -\frac{(1 - \alpha)q}{(\omega_0^i - qz^i - px^i)} + \frac{\eta\beta}{z^i} &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de segundo orden del problema del consumidor individual se verifican en este caso ya que la función de utilidad es estrictamente cóncava y por lo tanto satisface la condición de estricta convexidad de preferencias según lo demostrado en clase.

4. (10 puntos) De las dos condiciones de primer orden tenemos que

$$\frac{\alpha}{\eta\beta} \frac{z^i}{x^i} = \frac{p}{q}$$

o bien

$$qz^i = \frac{\eta\beta}{\alpha} px^i \tag{9}$$

Reemplazando la ecuación (9) en la primera de las dos condiciones de primer orden tenemos que

$$\begin{aligned} p(1 - \alpha)x^i &= \alpha(\omega_0^i - qz^i - px^i) = \alpha\left(\omega_0^i - \frac{\eta\beta}{\alpha}px^i - px^i\right) \\ &= \alpha\omega_0^i - px^i(\alpha + \beta\eta) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$((1 - \alpha) + \alpha + \beta\eta)px^i = \alpha\omega_0^i$$

o bien

$$x^i = \frac{\alpha\omega_0^i}{(1 + \beta\eta)p}$$

5. (5 puntos) La demanda agregada por maíz en el período $t = 0$ es

$$x^d = \sum_{i=1}^I x^i = \frac{\alpha \left(\sum_{i=1}^I \omega_0^i \right)}{(1 + \beta\eta) p}$$

6. (10 puntos) El problema de oferta óptima de cada productor j es

$$\max p (l^j)^\theta (\bar{T}^j)^{1-\theta} - w l^j$$

7. (10 puntos) Del punto anterior, La condición de primer orden es

$$p\theta (l^j)^{\theta-1} (\bar{T}^j)^{1-\theta} - w = 0$$

Al ser $\theta \in (0, 1)$, la productividad marginal del trabajo es claramente decreciente en l^j y por lo tanto la función de beneficios es estrictamente cóncava con respecto a l^j , verificándose entonces la condición de segundo orden en este caso.

8. (10 puntos) Del punto anterior despejamos primero l^j

$$l^j = \left(\frac{\theta p}{w} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} (\bar{T}^j)$$

y por lo tanto la oferta de j es

$$y^{js} = \left[\left(\frac{\theta p}{w} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} (\bar{T}^j) \right]^\theta (\bar{T}^j)^{1-\theta} = \bar{T}^j \left(\frac{\theta p}{w} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$$

y la agregada entonces es

$$y^s = \left(\sum_{j=1}^J \bar{T}^j \right) \left(\frac{\theta p}{w} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$$

9. (5 puntos) La condición de equilibrio en el mercado de maíz de $t = 0$ es simplemente

$$x^d = y^s$$

o bien

$$\frac{\alpha \left(\sum_{i=1}^I \omega_0^i \right)}{(1 + \beta\eta) p} = \left(\sum_{j=1}^J \bar{T}^j \right) \left(\frac{\theta p}{w} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$$

10. (10 puntos) El precio de equilibrio de maíz en $t = 0$ entonces proviene de la igualdad anterior, que puede reescribirse como

$$\frac{\alpha \left(\sum_{i=1}^I \omega_0^i \right) (w)^{\frac{\theta}{1-\theta}}}{(1 + \beta\eta) \left(\sum_{j=1}^J \bar{T}^j \right) \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}} = (p^*)^{1 + \frac{\theta}{1-\theta}} = (p^*)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

Por lo tanto

$$p^* = \left(\frac{w}{\theta} \right)^\theta \left[\frac{\alpha \left(\sum_{i=1}^I \omega_0^i \right)}{(1 + \beta\eta) \left(\sum_{j=1}^J \bar{T}^j \right)} \right]^{1-\theta}$$

11. (10 puntos) Si cada consumidor considera que es menos probable que se realice el estado $s = B$, esto es lo mismo que η se reduzca. Por lo tanto, de la expresión anterior surge rápidamente que:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \eta} = -(1 - \theta) \left(\frac{w}{\theta} \right)^\theta \left[\frac{\alpha \left(\sum_{i=1}^I \omega_0^i \right)}{\left(\sum_{j=1}^J \bar{T}^j \right)} \right]^{1-\theta} (1 + \eta\beta)^{\theta-2} < 0$$

y por lo tanto p^* debe ser mayor. La intuición económica no es nada difícil. Una reducción en η implica una menor demanda por el activo de riesgo (menor incentivo a ahorrar), implicando una mayor demanda por maíz por parte de cada consumidor, lo cual debe llevar a un incremento en p^* .

Segundo cuatrimestre 2008 - UBA - Parcial 1 (Recuperatorio)

Una de las características salientes de la crisis actual es la caída abrupta de los precios de los denominados "commodities". En particular, la caída del precio del petróleo desde julio de 2008 hasta diciembre del mismo año es realmente contundente: pasó de US\$ 140 el barril a julio de 2008 a menos de US\$ 45 el barril a comienzos de diciembre (una caída de casi un 70%). Los comentarios de la prensa especializada comúnmente atribuyen esta caída a la creciente recesión en EEUU (que probablemente se extienda a otros países), la cual se manifiesta, entre otros modos, a través de un incremento de la tasa del desempleo. Este problema se concentra en ilustrar la relación entre la caída del precio de petróleo y el incremento en el desempleo. Suponga un mercado de combustibles líquidos en el cual existen I consumidores (con $I > 1$ y muy grande). Cada consumidor (que también es trabajador, al menos potencial trabajador) puede estar o bien empleado o bien desempleado (la proporción de consumidores desempleados es igual a μ). Cada consumidor recibe una dotación de $H > 0$. Cada consumidor posee preferencias definidas sobre cuatro bienes de consumo: dólares (denotado por c), ocio que se consume en la casa (denotado como l_h), ocio que se consume fuera de la casa (denotado como l_o) y litros de combustible (para alimentar el automóvil, denotado como x). Las preferencias satisfacen axiomas que permiten representarse a través de la función de utilidad:

$$U(c, l_o, l_h) = \ln c + l_h + \theta l_o, \theta > 0$$

Cada consumidor - trabajador que se encuentra empleado trabaja en el mercado laboral, el cual paga un salario $w > 0$. Cada consumidor - trabajador que se encuentra desempleado no ofrece ninguna hora de trabajo al mercado (por definición) y obtiene del estado una compensación por desempleo igual a T , positivo pero menor a w . El precio por litro de combustible líquido es igual a $p > 0$. La oferta agregada de combustible líquido se la supone constante e igual a $\bar{X} > 0$. Esto al menos refleja el hecho de que la oferta de petróleo se limita a los yacimientos en explotación (suponiendo una velocidad de descubrimiento de nuevos yacimientos mucho más lenta que la de explotación de los preexistentes).

1. (5 puntos) Dada la función de utilidad de cualquier consumidor, ¿qué relación debe existir entre x y l_o en cualquier canasta individualmente óptima?
2. (5 puntos) Escriba la restricción presupuestaria de cualquier consumidor empleado.
3. (10 puntos) Despejando una de las variables endógenas de la restricción en el punto (2) y reemplazando en la función de utilidad del consumidor empleado, obtenga las derivadas primeras de la función objetivo con respecto a la cantidad de combustible y con respecto a l_h (nótese que NO se piden condiciones de primer orden todavía).
4. (10 puntos) De las dos derivadas anteriores, suponga que en la canasta óptima x es estrictamente positiva. Esto implica una CPO con respecto a x como el que usualmente se obtiene (primer derivada igualada a 0). Dada esta CPO, suponiendo que p satisface

$$\theta > 1 + \frac{p}{w} \tag{10}$$

demuestre que la derivada primera de la función objetivo con respecto a l_h es negativo para todo l_h (con lo cual en la canasta óptima $l_h = 0$).

5. (10 puntos) Dadas las condiciones del punto anterior, obtenga la demanda marshalliana individual por x para cualquier trabajador empleado.
6. (5 puntos) Escriba la restricción presupuestaria de cualquier consumidor desempleado.
7. (10 puntos) Despejando una de las variables endógenas de la restricción en el punto anterior y reemplazando en la función de utilidad del consumidor desempleado, obtenga las derivadas primeras de la función objetivo con respecto a la cantidad de combustible y con respecto a l_h (nótese que NO se piden condiciones de primer orden todavía)

8. (10 puntos) Suponga que

$$\theta < 1 + \frac{p}{T} \quad (11)$$

Demuestre entonces que la derivada primera de la función objetivo con respecto a la cantidad de combustible (cuando $x = 0$) es negativa (esto implica que la cantidad óptima de x es cero para cualquier consumidor desempleado).

9. (5 puntos) Obtenga la demanda agregada por combustibles líquidos.
10. (10 puntos) Plantee la condición de equilibrio en el mercado de combustibles líquidos y obtenga el precio de equilibrio de combustibles líquidos.
11. (10 puntos) Reemplace el precio de equilibrio en las condiciones (10) y (11) de modo de obtener una doble desigualdad en la que se involucren únicamente variables exógenas.
12. (10 puntos) Demuestre que, ceteris paribus, cuanto mayor es el desempleo (dado por un incremento en μ) menor es el precio de equilibrio. Interprete en no más de tres renglones.