Microeconomía I
Primeros parcialitos de semestres/cuatrimestres anteriores.
Prof. Enrique Kawamura

Otoño 2000 UdeSA

El Dr. Javier Mutante es un destacado abogado que sólo consume queso de primera y salamín. El Dr. nos dice que consumiendo una cantidad *pareja* de ambos le da exactamente lo mismo uno que otro tipo de fiambre, pero que no le gusta consumir demasiado de uno y prácticamente nada del otro. Cuando se le pregunto por sus preferencias, él nos dijo que su función de utilidad es representable como la siguiente: $u = \min\left\{\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2;\ \min\{x_1, x_2\}\right\}$. Aquí x_1 denota litros de cerveza y x_2 los de vino tinto de primer calidad. Su ingreso es de m pesos y los precios que observa para cada bien son p_1 y p_2 respectivamente.

1. (25 puntos) Fije un $\bar{u}$, por ejemplo, $\bar{u} = 1$. Dibuje cuidadosamente la curva de indiferencia correspondiente a este nivel de utilidad. ¿Es ésta consistente con las declaraciones del abogdo, en el sentido de que para una cantidad pareja de ambos fiambres le da lo mismo uno u otro y que odia los extremos?
2. (25 puntos) Para $p_1/p_2 < 1$, obtenga la o las óptimas canastas $\{x_1^*, x_2^*\}$ en función de los precios y del ingreso.
3. (25 puntos) Para $p_1/p_2 > 1$, obtenga la o las óptimas canastas $\{x_1^*, x_2^*\}$ en función de los precios y del ingreso.
4. (25 puntos) Para $p_1/p_2 = 1$, obtenga la o las óptimas canastas $\{x_1^*, x_2^*\}$ en función de los precios y del ingreso.

Primavera 2000 UdeSA

En la columna del Suplemento Económico del Diario Clarín del Domingo 3 de Setiembre de 2000 el Licenciado Bernardo Kosakoff de la CEPAL dice:

> *Las actividades turísticas, incluyendo sus más diversas manifestaciones como congresos científicos y convenciones empresariales, turismo de aventura, uso de los centros urbanos y eventos deportivos entre otros, tiene una gran posibilidad de expansión. Para su dinamismo se requiere facilitar en calidad y precio el transporte, el desarrollo de numerosos servicios de apoyo como gastronomía, alojamiento, traducciones, guías turisticas, museos, espectáculos y demás, que tienen un importante efecto en la generacion de empleo y divisas.* (Pag 44)

Entonces, de acuerdo a Kosakoff, el turismo parecería ser un importante motor para crecer. El problema siguiente intenta responder la pregunta relacionada acerca de los efectos sobre los gastos en viajes de un cambio en los precios y en la calidad. Supongamos un turista americano cuyas preferencias pueden representarse por la función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = 2\theta (x_1)^{1/2} + x_2$$

donde x_1 denota la cantidad total de tiempo (medido en horas y en fracciones de horas) dedicadas a viajes a Argentina, y x_2 es el total de lo gastado y consumido en otros bienes. Aqui el precio del bien 2 es $p_2 = 1$. Sea el precio del bien 1 igual a p. El parámetro $\theta > 0$ cuantifica la calidad de los viajes (turísticos) a Argentina. El ingreso del consumidor es $m > 0$.

1. (15 puntos). Plantee el problema de optimización del turista americano. (en esta parte no debe resolver nada)
2. (30 puntos). Obtenga las condiciones de primer orden y obtenga el punto crítico. Argumente que este punto crítico es un máximo (sea a traves de condiciones de segundo orden, sea a través de mostrar la convexidad de las curvas de indiferencia)

3. (30 puntos). Dado el valor de θ, compute la elasticidad de la demanda de x_1 con respecto a p, donde la elasticidad es igual a $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}\right)\left(\frac{p}{x_1}\right)$. ¿Incluye este cambio algún efecto ingreso no nulo? Justifique.

4. (25 puntos). Supongamos que el precio p se incrementa en una proporción τ (esto implica que el nuevo precio es $(1+\tau)\ p$). ¿En qué proporcion debe aumentar la calidad θ para que la demanda de tiempo de viajes a Argentina no cambie? Demuestre su respuesta.

Solución:

1. (15 puntos). Plantee el problema de optimización del turista americano. (en esta parte no debe resolver nada)

   El problema tiene el siguiente planteamiento:

$$\max \quad 2\theta\,(x_1)^{1/2} + x_2$$

   sujeto a

$$px_1 + x_2 = m$$

2. (30 puntos). Obtenga las condiciones de primer orden y obtenga el punto crítico. Argumente que este punto crítico es un máximo (sea a traves de condiciones de segundo orden, sea a través de mostrar la convexidad de las curvas de indiferencia)

   En lugar de utilizar el lagrangiano, de la restricción

$$x_2 = m - px_1$$

   con lo cual el problema de maximización es

$$\max \quad 2\theta\,(x_1)^{1/2} + m - px_1$$

   con respecto a x_1. Entonces la única variable de decisión es x_1. La CPO es

$$\theta\,(x_1)^{-1/2} - p = 0$$

   y de aquí

$$x_1^{1/2} = \frac{\theta}{p}$$

   con lo cual el punto crítico es

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{\theta}{p}\right)^2 \\ x_2 &= m - \frac{\theta^2}{p} \end{aligned}$$

   Suponemos que $m > \frac{\theta^2}{p}$. La derivada segunda es

$$-\frac{\theta}{2}\left(x_1^{-3/2}\right)$$

   que claramente es menor estrictamenteque cero. Esto implica entonces que las expresiones

$$\begin{aligned} x_1^* &= \left(\frac{\theta}{p}\right)^2 \\ x_2^* &= m - \frac{\theta^2}{p} \end{aligned}$$

   dan la demanda de x_1 y x_2.

3. (30 puntos). Dado el valor de θ, compute la elasticidad de la demanda de x_1 con respecto a p, donde la elasticidad es igual a $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}\right)\left(\frac{p}{x_1}\right)$. ¿Incluye este cambio algún efecto ingreso no nulo? Justifique.

   La derivada es
$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}\right) = (-2)\,\frac{\theta^2}{p^3}$$
   y entonces la elasticidad es
$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}\right)\left(\frac{p}{x_1}\right) &= (-2)\,\frac{\theta^2}{p^3}\,\frac{p}{\left(\frac{\theta}{p}\right)^2} \\ &= -2\end{aligned}$$

4. (25 puntos). Supongamos que el precio p se incrementa en una proporción τ (esto implica que el nuevo precio es $(1+\tau)\ p$). ¿En qué proporcion debe aumentar la calidad θ para que la demanda de tiempo de viajes a Argentina no cambie? Demuestre su respuesta.

   Esto se deduce de la función de x_1^*. Si p aumenta en $(1+\tau)$ entonces el numerados θ debe también aumentar en $(1+\tau)$ ya que
$$\left(\frac{\theta\,(1+\tau)}{p\,(1+\tau)}\right)^2 = \left(\frac{\theta}{p}\right)^2 = x_1^*$$

Primavera 2001 UdeSA

Las preferencias de Rafael dependen de la cantidad consumida de tres bienes. Rafael gusta de tomar cerveza. Rafael enfrenta dos marcas de cerveza, llamadas *Blonde* y *Black*. La cantidad de litros de cerveza marca Blonde consumida por Rafael es denotado como x_1 y su precio por litro $p_1 > 0$. Similarmente x_2 y $p_2 > 0$ denotan respectivamente los litros consumidos por Rafael y el precio por litro de la marca Black. Denotamos x_3 a la cantidad de otros bienes consumidos, y supondremos que $p_3 = 1$, con lo cual x_3 denota directamente la cantidad de *pesos* consumidos en otros bienes. Sea $m > 0$ la cantidad de pesos que tiene Rafael para gastar en los tres bienes. Las preferencias de Rafael estan representadas por la funcion
$$u\,(x_1, x_2, x_3) = \ln\,(x_1 + x_2) + x_3$$

1. (50 puntos) Sea x_3 fijo. Muestre en un grafico que, en este caso, si $\frac{p_1}{p_2} < 1$ entonces el valor de x_1^* optimo para Rafael es cero. Muestre en un grafico similar que si $\frac{p_1}{p_2} > 1$ entonces el valor de x_2^* optimo para Rafael es cero. Muestre en un gráfico que si $\frac{p_1}{p_2} = 1$ entonces el par (x_1^*, x_2^*) es cualquiera que satisfaga $p_1x_1 + p_2x_2 = m - x_3$.

2. (50 puntos) Supongamos que $\frac{p_1}{p_2} = 1$. En este caso definimos $p \equiv p_1 = p_2$. Demuestre que la demanda de Rafael por $z \equiv (x_1 + x_2)$ (es decir, la demanda de la *suma* de la totalidad de cerveza por parte de Rafael) es independiente de m.

Primavera 2001 UdeSA

Julieta es una egresada de la escuela secundaria que debe decidir cuánta educación obtener para así poder intentar obtener un buen salario como profesional calificada. Sea e la cantidad de educación (normalizada por calidad) que Julieta debe elegir, donde $e \geq 0$. Supongamos que e está medido en minutos de estudio (que incluye cursada y estudio personal). Dada la situación del mercado, por cada minuto extra de educación que decide Julieta, ella recibirá en el futuro $\theta > 0$ pesos más de salario. Sea w el salario (total) que obtiene Julieta. Sus preferencias se definen por la función de utilidad.
$$u\,(w, e) = w - \frac{e^2}{2}$$

1. (50 puntos) Escriba la ecuación que liga w y e de acuerdo a la relación que se explica en el párrafo de más arriba (20 puntos). Dibuje una curva de indiferencia cualquiera en un plano en el que la variable e aparezca en el eje horizontal y w en el eje vertical (20 puntos). Interprete en no más de dos (2) renglones.

2. (50 puntos) Obtenga la función de demanda óptima de educación por parte de Julieta, como función de θ exclusivamente. (Ayuda: Para esto deberá utilizar la función de utilidad y la ecuación obtenida en 1).

Primavera 2003 UdeSA

En lo que respecta al management en comercio minorista (supermercados), en los últimos tiempos, se ha enfatizado el rol de la ubicación de los productos en las góndolas. Lo que este ejercicio intentará hacer es explicar utilizando la teoría neoclásica del consumidor individual las razones por las que un consumidor podría demandar en mayor o menor medida de acuerdo a su ubicación. Un agente consume dos bienes, el 1 y el 2. Sean x_1 y x_2 las cantidades consumidas de cada bien, y sean p_1 y p_2 sus respectivos precios en pesos. Este agente recibe nu ingreso m en pesos. Sus preferencias se representan por la siguiente función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \phi(x_1 + x_2) - \delta x_1 - \theta x_2$$

donde ϕ, δ y θ son todas constantes positivas con $\phi > \max\{\delta, \theta\}$. El coeficiente δ representa la desutilidad marginal debido al esfuerzo de comprar unidades del bien 1 debido a su ubicación (cuanto más *al medio* de la góndola se encuentre, menor es δ y viceversa). La misma interpretación (para el bien 2) corre con respecto al coeficiente θ.

1. (5 puntos) Escriba el problema de optimización del consumidor

2. (10 puntos) ¿Son convexas estas preferencias? Justifique cuidadosamente su respuesta.

3. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden

4. (25 puntos) Obtenga las funciones de demanda de cada bien (del 1 y del 2 respectivamente)

5. (25 puntos) Compute la derivada $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$. ¿Es verdad que para δ suficientemente cerca de ϕ el bien 1 es un bien Giffen?

6. (25 puntos) Muestre que cuanto menor es δ mayor es x_1^* ceteris paribus. ¿Cuál es el signo de $\frac{\partial x_1^*}{\partial \theta}$? Explique en dos renglones (máximo que leeremos para corregir) una intuición.

Otoño 2004 UdeSA

Recientemente el gobierno ha decidido incrementar el impuesto a los cigarrillos (véase, por ejemplo, el artículo de La Nación del 9 de marzo de 2004 titulado "Kirchner ratificó el acuerdo alcanzado con las tabacaleras"). Este ejercicio ilustrará el efecto posible sobre aquellos consumidores fumadores. Sea un agente consumidor cuyas preferencias dependen de la cantidad de tabaco consumido (bajo la forma de cigarrillos), denotado como x_1, y el resto de los bienes de consumo, denotado como x_2. Sus preferencias pueden representarse por la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha}x_1^\alpha + x_2$, donde α es un parámetro mayor que cero y menor que uno (estrictamente en ambos casos). Suponemos que $p_2 = 1$ a lo largo de todo el ejercicio. El precio del tabaco para consumo es igual a $p_1(1+\tau)$, donde τ es la alícuota (tasa) impositiva sobre el tabaco. Suponemos $0 \leq \tau$. El consumidor recibe un ingreso de m pesos.

1. (5 puntos) Escriba el problema del consumidor (sin resolver nada todavía)

2. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden (necesarias) para encontrar la solución del problema anterior.

3. (5 puntos) Verifique que las condiciones de segundo orden se cumplen para cualquier $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$ (y precios positivos).

4. (20 puntos) Del punto 2 despeje x_1 como función de las otras variables. ¿Es función de m? En caso contrario, ¿cuál es la explicación conceptual (matemática) de esta propiedad?

5. (20 puntos) Obtenga la derivada de la demanda **hicksiana** de x_1 con respecto a $(1+\tau)$ con p_1 constante, sin calcular el problema de minimizar el gasto. (Ayuda: utilice la ecuación de Slutszky).

6. (20 puntos) Obtenga la función de utilidad indirecta. ¿Cómo es la relación entre m y esta utilidad indirecta?

7. (20 puntos) Suponga originalmente un $\tau = 0$. Compute la utilidad indirecta en este caso. Suponga que $\tau = \bar{\tau} > 0$. Suponga que al mismo tiempo, cuando $\tau = \bar{\tau}$, el consumidor recibe un monto extra de ingreso igual a Δm. Obtenga la utilidad indirecta en este caso. ¿Cuánto debe ser Δm para que la utilidad indirecta en ambos casos sea igual? (Pista: este Δm debe quedar en función de $1+\bar{\tau}$ y de p_1).

Solución

1. (5 puntos) Escriba el problema del consumidor (sin resolver nada todavía)

   $\max u(x_1, x_2) = \frac{(x_1)^\alpha}{\alpha} + x_2 \qquad \text{con } 0 < \alpha < 1$

   s.a. $p_1(1+\tau)x_1 + x_2 = m$

2. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden (necesarias) para encontrar la solución del problema anterior.

   $\max L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{(x_1)^\alpha}{\alpha} + x_2 + \lambda[m - p_1(1+\tau)x_1 - x_2]$

   (a) $\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{\alpha}(x_1)^{\alpha-1} - \lambda p_1(1+\tau) = 0$

   (b) $\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = 1 - \lambda = 0$

   (c) $\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = m - p_1(1+\tau)x_1 - x_2 = 0$

3. (5 puntos) Verifique que las condiciones de segundo orden se cumplen para cualquier $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$ (y precios positivos).

   Debemos calcular:

   $L_{11} = (\alpha - 1)x_1^{(\alpha-2)}$

   $L_{22} = 0$

   $L_{21} = L_{12} = 0$

   $\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & -p_1 \\ L_{21} & L_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\alpha-1)x_1^{(\alpha-2)} & 0 & -p_1 \\ 0 & 0 & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$

   $\left|\overline{H}\right| = -(\alpha-1)x_1^{(\alpha-2)}(p_2)^2 = (1-\alpha)x_1^{(\alpha-2)}(p_2)^2 > 0$

   Se cumplen las condiciones de segundo orden.

4. (20 puntos) Del punto 2 despeje x_1 como función de las otras variables. ¿Es función de m? En caso contrario, ¿cuál es la explicación conceptual (matemática) de esta propiedad?

   Tomamos la primera CPO y la combinamos con el hecho de que $\lambda = 1:$

$$(x_1)^{\alpha-1} - p_1(1+\tau) = 0$$

$$(x_1)^{\alpha-1} = p_1(1+\tau)$$

$$x_1^* = [p_1(1+\tau)]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

   Si se prefiere:

$$x_1^* = [p_1(1+\tau)]^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

5. (20 puntos) Obtenga la derivada de la demanda **hicksiana** de x_1 con respecto a $(1+\tau)$ con p_1 constante, sin calcular el problema de minimizar el gasto. (Ayuda: utilice la ecuación de Slutszky).

   Dado que no existen efectos renta:

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial (1+\tau)} = \frac{\partial x_1^*}{\partial (1+\tau)} = -\frac{1}{1-\alpha}\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}-1}$$

   Dado que:

   $-\frac{1}{1-\alpha} - 1 = -\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha} + \frac{-1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha-2}{1-\alpha} = -\frac{2-\alpha}{1-\alpha}$

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial (1+\tau)} = -\frac{1}{1-\alpha}\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}$$

6. (20 puntos) Obtenga la función de utilidad indirecta. ¿Cómo es la relación entre m y esta utilidad indirecta?

   Antes de obtener la función de utilidad indirecta, debe obtenerse la demanda por el bien 2. Utilizando la tercera CPO y la demanda por el bien 1:

   $m - p_1(1+\tau)\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}} - x_2 = 0$

   $x_2 = m - p_1(1+\tau)\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}}$

   $x_2 = m - \left[p_1(1+\tau)\right]^{1-\frac{1}{1-\alpha}}$

   $x_2 = m - \left[p_1(1+\tau)\right]^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}}$

$$x_2^* = m - \left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

   Ahora sí, buscamos la función de utilidad indirecta:

   $v\left(\left[p_1(1+\tau)\right], m\right) = \frac{1}{\alpha}\left\{\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}}\right\}^{\alpha} + m - \left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

   $v\left(\left[p_1(1+\tau)\right], m\right) = m + \frac{1}{\alpha}\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

   $v\left(\left[p_1(1+\tau)\right], m\right) = m + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

$$v\left(\left[p_1(1+\tau)\right], m\right) = m + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[p_1(1+\tau)\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

7. (20 puntos) Suponga originalmente un $\tau = 0$. Compute la utilidad indirecta en este caso. Suponga que $\tau = \bar{\tau} > 0$. Suponga que al mismo tiempo, cuando $\tau = \bar{\tau}$, el consumidor recibe un monto extra de ingreso igual a Δm. Obtenga la utilidad indirecta en este caso. ¿Cuánto debe ser Δm para que la utilidad indirecta en ambos casos sea igual? (Pista: este Δm debe quedar en función de $1+\bar{\tau}$ y de p_1).

   Cuando $\tau = 0$:

$$v(p_1, m) = m + \frac{1-\alpha}{\alpha}(p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{1}$$

   Cuando $\tau = \bar{\tau}$, entonces:

$$v\left(p_1(1+\bar{\tau}), m\right) = m + \Delta m + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[p_1(1+\bar{\tau})\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{2}$$

   Deseamos que ambos valores sean iguales. En consecuencia, $(1)-(2)=0$:

   $m + \frac{1-\alpha}{\alpha}(p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \left[m + \Delta m + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[p_1(1+\bar{\tau})\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] = 0$

   $\frac{1-\alpha}{\alpha}(p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \Delta m - \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[p_1(1+\bar{\tau})\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0$

$\Delta m = \frac{1-\alpha}{\alpha}(p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[p_1(1+\overline{\tau})\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
$\Delta m = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[(p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \left[p_1(1+\overline{\tau})\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$
$\Delta m = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[(p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1+\overline{\tau})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$

$$\Delta m = \frac{1-\alpha}{\alpha}(p_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[1-(1+\overline{\tau})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$$

Otoño 2005 UdeSA

Este problema intenta racionalizar (si esto fuera posible) el *boicot* que el Presidente lanzó a una de las empresas petroleras internacionales más importantes en Argentina, que había decidido aumentar los precios de los combustibles. Rosendo es un asesor de productores agrícolas en la zona de Trenque Lauquen. Por su actividad laboral es un consumidor intensivo de combustibles líquidos (para usar en su automóvil). Sea m el total de pesos que Rosendo destina al consumo de combustibles (en general m es una parte de sus ingresos). Sus preferencias por combustibles están definidas sobre el consumo de dos marcas, S y K. Sean x_S y x_K las cantidades de litros de combustible de cada marca respectiva consumida por Rosendo. Sean sus precios p_S y p_K respectivamente. Rosendo puede comprar cualquiera de estas dos marcas de combustibles tanto en Trenque Lauquen como en Pellegrini, aunque él vive en la primera de las ciudades. Por tanto, para una misma cantidad de combustible entre una u otra cudad, él prefiere cargarla en Trenque Lauquen. Las preferencias incluyen esta característica, y suponemos que ellas pueden representarse por la función de utilidad $u(x_S, x_K, i) = x_S + x_K - \bar{e}\chi(i)$, donde

$$\chi(i) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } i = \text{ Trenque Launquen} \\ 1 & \text{si } i = \text{ Pellegrini} \end{cases}$$

Esto es, $\bar{e} > 0$ es la *desutilidad* para Rosendo de cargar combustible en Pellegrini, el cual es cero si lo carga en Trenque Lauquen (aquí i denota el lugar donde Rosendo carga combustible).

1. (5 puntos) Para un i dado, dibuje la típica curva de indiferencia de Rosendo (con x_S en el eje horizontal)
2. (10 puntos) Suponga que en una primera situación los precios p_S y p_K son iguales en las dos ciudades, y que $p_S < p_K$. Obtenga la cantidad óptima de consumo de cada marca de combustible.
3. (5 puntos) Suponga que ahora se presenta una segunda situación: el precio p_S se incrementa a $p'_S > p_S$, mientras que sólo en Pellegrini el precio del combustible marca K se reduce a $p^*_K < p_K$. Suponga que $p^*_K < p'_S < p_K$. Para un dado i, obtenga la cantidad que Rosendo compra de cada marca si él decidiese comprar en Trenque Lauquen.
4. (10 puntos) Para la misma situación que en (3), obtenga la cantidad que Rosendo compra de cada marca si él decidiese comprar en Pellegrini.
5. (20 puntos) Obtenga la utilidad indirecta que obtiene Rosendo en cada ciudad (10 puntos cada uno)
6. (20 puntos) De su respuesta en (5), obtenga una desigualdad que involucre a p^*_K, m y p'_S tal que Rosendo decida hacerle caso al Presidente y no comprar a S sino a K (en cuyo caso, ¿en qué ciudad comprará combustible?) Ayuda: la desigualdad quedará como p^*_K estrictamente menor que una expresión que depende de m y p'_S.
7. (20 puntos) Demuestre que la condición obtenida en (6) no se cumple para m pequeño (15 puntos). Explique en dos renglones como máximo la intuición de este resultado (5 puntos)
8. (10 puntos) Un simpatizante del Presidente declaró que los que menos tienen necesariamente harán caso al Presidente en relación a este boicot. En tres renglones como máximo, ¿qué tiene para decir al respecto? (utilice la respuesta en (7)).

Solución

1. Dado que se trata de dos bienes sustitutos perfectos, cualquier curva de indiferencia es en realidad lineal, cuya TMS es igual a -1.

2. Dado que la recta presupuestaria en este caso posee una pendiente (en valor absoluto) igual a $\frac{p_S}{p_K}$ $< 1 = |TMS|$, en consecuencia Rosendo encontrará optimo consumir la canasta $x_S^* = \frac{m}{p_S}$, $x_K^* = 0$. Claramente Rosendo prefiere cargar nafta en Trenque Lauquen pues, a iguales precios en ambas ciudades, Rosendo incurre en una desutilidad de $\bar{e}$ si carga en Pellegrini.

3. En este caso, si Rosendo compra en Trenque Lauquen todavía la pendiente de la recta presupuestaria (de comprar nafta en esa ciudad) es, en valor absoluto, $\frac{p'_S}{p_K} < 1 = |TMS|$, en consecuencia Rosendo encontrará optimo consumir la canasta $x_S^* = \frac{m}{p'_S}$, $x_K^* = 0$ si compra en Trenque Lauquen.

4. Aquí la situación es distinta, pues si compra en Pellegrini la recta presupyestaria de comprar nafta en esa ciudad tiene una pendiente cuyo valor absoluto es $\frac{p'_S}{p_K^*} > 1 = |TMS|$, en consecuencia Rosendo encontrará optimo consumir la canasta $x_S^* = 0$, $x_K^* = \frac{m}{p_K^*}$ si compra en Pellegrini.

5. Utilidad indirecta si compra en Trenque Lauquen $V^{TL} = \frac{m}{p'_S}$. Utilidad indirecta si compra en Pellegrini: $V^P = \frac{m}{p_K^*} - \bar{e}$

6. Dado que Rosendo compra a K si compra en Pellegrini y compra a S si compra en Trenque Lauquen, Rosendo elige la primer opción si y solo si $V^P > V^{TL}$, o bien $\frac{m}{p_K^*} - \bar{e} > \frac{m}{p'_S}$, equivalente a $\frac{m}{p_K^*} > \frac{m}{p'_S} + \bar{e}$, equivalente a $p_K^* < \frac{m}{\frac{m}{p'_S}+\bar{e}}$

7. Claramente $\lim_{m\to 0} \frac{m}{\frac{m}{p'_S}+\bar{e}} = 0$, con lo cual para m suficientemente pequeño p_K^* sería estrictamente menor que un número tan cercano a cero como uno quisiera. Pero eso significaría que $p_K^* \leq 0$, lo cual no tiene ninguna interpretación económica relevante. Otra manera de verlo es que para m tendiendo a cero, V^{TL} tiende a cero mientras que V^P tiende a $-\bar{e} < 0$, lo cual nos dice que para m suficientemente pequeño $V^{TL} > V^P$. ¿La interpretación? Simplemente que la utilidad indirecta de comprar en cualquier lugar es lineal en m, pero comprar en P le reporta una desutilidad extra (no dependiente de m), con lo cual si Rosendo es estremadamente pobre no elige ir a Pellegrini.

8. La respuesta en (7) afirma precisamente lo contrario: una medida como ésta podría ser desacatada justamente por los extremadamente pobres, si sus preferencias se ajustan a este ejercicio.

Primer Cuatrimestre 2006 UBA

En este año uno de los objetivos (al menos, enunciado como tal) por parte del actual gobierno nacional es la de reducir el trabajo *en negro*, esto es, el trabajo que no se registra legalmente y que tiene varias consecuencias desde el punto de vista previsional e impositivo. Tal vez una de las principales cuestiones del trabajo en negro es la falta de aportes a AFJPs o cajas de previsión que pudieren engrosar (al menos potencialmente) el flujo de ingresos del empleado en negro cuando le llegue la edad de jubilarse. Este problema intenta analizar precisamene esta cuestión utilizando las aplicaciones de la teoría del consumidor neoclásica con dotaciones a la decisión de trabajo y de consumo en el tiempo.

Supongamos que una persona puede ser contratada *hoy* (en el tiempo presente) para un empleo en una empresa perteneciente a cierto sector productivo. Esta empresa le ofrece dos alternativas: trabajar en negro o en blanco. TRabajar en blanco significa que del total del salario prometido en este caso, denotado como w^B (medido en pesos del presente) el trabajador debe aportar una *proporción* $\tau \in (0,1)$ de w^B a una AFJP, la cual le promete (y suponemos que cumple perfectamente esta promesa) un monto de $\tau w^B R$ pesos en el $futuro$ (el segundo período relevante de vida de este potencial empleado). Trabajar en negro implica cobrar un monto $w^N \geq w^B$ en el presente pero sin realizar aporte alguno a ninguna AFJP o caja previsional (esto es, $\tau = 0$). Esta persona tiene la posibilidad, sea que trabaje en negro o en blanco, de ahorrar o tomar prestado de un banco *hoy* a una tasa (neta) de interés $r > 0$. Este consumidor recibe como única dotación una cantidad de tiempo en el presente igual a H horas, sin recibir ninguna otra dotación en ningún otro momento. Sus preferencias están dadas por la función de utilidad:

$$u(l_0, c_0, c_1) = l_0 + \ln c_0 + \beta \ln c_1$$

donde c_t $(t = 0, 1)$ denota el consumo del presente o del futuro según sea $t = 0$ o $t = 1$, y donde l_0 es la cantidad de ocio consumido en el presente. Sea $\beta \in (0, 1)$ y suponemos que $H > 1 + \beta$.

1. (10 puntos) Escriba la restricción presupuestaria genérica en $t = 0$ y la de $t = 1$ dados w, R, $1+r$ y τ (Notas: utilice la letra s para denotar ahorro/préstamo en $t = 0$, y note también que si el empleo fuese en blanco $w = w^B$ y $\tau \in (0, 1)$ y si fuese en negro $w = w^N$ y $\tau = 0$)
2. (15 puntos) Por ahora suponga l_0 dado. Entonces, dado l_0, escriba el problema que el trabajador - consumidor resuelve en $t = 0$. Obtenga la condición de primer orden y argumente en dos renglones que se cumplen las condiciones de segundo orden.
3. (15 puntos) Obtenga la función de ahorro como función de w, $H - l_0$, τ, $1 + r$ y R (y β, que es un parámetro). Reemplace en las restricciones del punto 1 para obtener el consumo en $t = 0$ y en $t = 1$ que resuelven el problema planteado en 2 como funciones de las variables mencionadas.
4. (10 puntos) Reemplace las expresiones anteriores en la función de utilidad para obtener una utilidad como función de $H - l_0$, w, τ, $1 + r$ y R (y β, que es un parámetro).
5. (15 puntos) Obtenga a partir del punto 4 la demanda marshalliana por ocio como función de H y β.
6. (10 puntos) Reemplace su respuesta en 5 en la expresión obtenida en 4, para obtener la utilidad indirecta.
7. (10 puntos) Escriba entonces la utilidad indirecta de trabajar en blanco como función de H, w^B, τ, $1 + r$ y R, y luego la de trabajar en negro, como función de H, $w^N, 1 + r$ (además de β, que es un parámetro)
8. (15 puntos) Ya sabemos que $w^N \geq w^B$. Si $R = 1 + r$ fuese verdad, ¿podría decir si el trabajador elige trabajar en negro en lugar de trabajar en blanco? Justifique su respuesta.

Soluciones sugeridas.

1. Dado que la única fuente de ingresos es el laboral, la restricción presupuestaria en $t = 0$ es:
$$c_0 + s = w(1 - \tau)(H - l_0)$$
y la del período 1 es
$$c_1 = s(1 + r) + \tau w R(H - l_0)$$
Nótese que si el agente decidiese trabajar en negro $\tau = 0$ y $w = w^N$, lo cual reemplazando en las dos expresiones anteriores nos permitirían obtener las restriccoines para el trabajo en negro. Para el trabajo en blanco τ queda como variable (entre 0 y 1) y $w = w^B$.
2. Reemplazando las restricciones presentadas en 1 en la función de utilidad, y dado que l_0 en esta parte se supone dada, el problema del consumidor puede escribirse como:
$$\max_s \quad \ln(w(1 - \tau)(H - l_0) - s) + \beta \ln(s(1 + r) + \tau w R(H - l_0))$$
La condición de primer orden con respecto a s es:
$$\frac{1}{w(1 - \tau)(H - l_0) - s} = \frac{\beta(1 + r)}{s(1 + r) + \tau w R(H - l_0)}$$
La condición de segundo orden en este caso se cumple, pues estas preferencias constituyen una transformación logaritmica de una Cobb-Douglas. En clase hemos visto que este tipo de preferencias genera curvas de indiferencia estrictamente convexas, lo cual implica que la condición de primer orden caracteriza efectivamente la solución del problema de maximización de utilidad.

3. La función de ahorro es obtenida de la condición de primer orden

$$s(1+r)+\tau wR(H-l_0)=\beta(1+r)(w(1-\tau)(H-l_0)-s)$$

despejando s :

$$\begin{aligned} s &= \frac{\beta(1+r)w(1-\tau)(H-l_0)-\tau wR(H-l_0)}{(1+r)(1+\beta)} \\ &= w(H-l_0)\left[\frac{\beta(1+r)(1-\tau)-\tau R}{(1+r)(1+\beta)}\right] \end{aligned}$$

Y reemplazando en las restricciones de 1 tenemos

$$\begin{aligned} c_0 &= w(1-\tau)(H-l_0)-s \\ &= w(1-\tau)(H-l_0)-w(H-l_0)\left[\frac{\beta(1+r)(1-\tau)-\tau R}{(1+r)(1+\beta)}\right] \\ &= w(H-l_0)\left[\frac{(1-\tau)(1+r)+\tau R}{(1+r)(1+\beta)}\right] \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} c_1 &= w(H-l_0)\left[\frac{\beta(1+r)(1-\tau)-\tau R}{(1+r)(1+\beta)}\right](1+r)+\tau wR(H-l_0) \\ &= w(H-l_0)\beta\left[\frac{(1+r)(1-\tau)+R\tau}{1+\beta}\right] \end{aligned}$$

4. Reemplazando en la función de utilidad:

$$\begin{aligned} & l_0+\ln\left[w(H-l_0)\left[\frac{(1-\tau)(1+r)+\tau R}{(1+r)(1+\beta)}\right]\right]+\beta\ln\left[w(H-l_0)\beta\left[\frac{(1+r)(1-\tau)+R\tau}{1+\beta}\right]\right] \\ = \; & l_0+(1+\beta)\ln(H-l_0)+(1+\beta)\ln\left(\frac{w[(1-\tau)(1+r)+\tau R]}{1+\beta}\right)-\ln(1+r) \end{aligned}$$

5. El problema es maximizar la función en 4 con respecto a l_0, cuya condición de primer orden es:

$$1=\frac{1+\beta}{H-l_0}$$

(Pueden verificar que la derivada segunda con respecto a l_0 es negativa, con lo cual se cumple la condición de segundo orden). De la condición de primer orden despejamos l_0 :

$$H-l_0=1+\beta \quad \Rightarrow \quad l_0^*=H-1-\beta>0$$

dado que suponemos $1+\beta<H$.

6. La utilidad indirecta es:

$$\begin{aligned} V &= H-1-\beta+(1+\beta)\ln(1+\beta)+(1+\beta)\ln\left(\frac{w[(1-\tau)(1+r)+\tau R]}{1+\beta}\right)-\ln(1+r) \\ &= H-1-\beta+(1+\beta)\ln(w[(1-\tau)(1+r)+\tau R])-\ln(1+r) \end{aligned}$$

7. La utilidad indirecta de trabajar en blanco es:

$$V^B=H-1-\beta+(1+\beta)\ln\left(w^B[(1-\tau)(1+r)+\tau R]\right)-\ln(1+r)$$

y la de trabajar en negro es:

$$V^N=H-1-\beta+(1+\beta)\ln\left(w^N[1+r]\right)-\ln(1+r)$$

8. Computamos $V^N - V^B$ dado $R = 1 + r$:

$$\begin{aligned} V^N - V^B &= (1+\beta)\ln\left(w^N R\right) - (1+\beta)\ln\left(w^B\left[(1-\tau)R + \tau R\right]\right) \\ &= (1+\beta)\ln\left(w^N R\right) - (1+\beta)\ln\left(w^B R\right) \\ &= (1+\beta)\ln\left(\frac{w^N}{w^B}\right) \end{aligned}$$

Pero $\frac{w^N}{w^B} \geq 1$ con lo cual $\ln\left(\frac{w^N}{w^B}\right) \geq 0$, con lo cual $V^N - V^B \geq 0$: esta persona al menos prefiere débilmente trabajar en negro que rabajar en blanco, dado que la utilidad indirecta de trabajar en negro es al menos tanta como la de trabajar en blanco.

Otoño 2006 - UdeSA

En el diario El Cronista, en su edición del viernes 31 de marzo de 2006, pág. 10, apareció una nota titulada "Creció el 10% el consumo de pollo por el boicot oficial a la carne". Esta nota refiere al incremento mencionado en el consumo de pollo supuestamente como consecuencia del llamado que el presidente Néstor Kirchner realizó para no convalidar el aumento de precios de la carne reduciendo su consumo y aumentando el consumo de sustitutos, entre ellos, el pollo. Uno podría preguntarse en qué medida este incremento observado del consumo de pollo se debió a este llamado del presidente o si en realidad no hubo alguna otra variable que haya cambiado (por ejemplo, los precios mismos) que haya implicado esta variación en el consumo de pollo, independientemente de los llamados patrióticos del primer mandatario. Este problema intenta ilustrar esta cuestión.

Entre los consumidores involucrados en el párrafo anterior encontramos a Lucas. Supongamos que observamos las decisiones de Lucas sobre consumo de carne vacuna y pollo. En un primer momento observamos que no consume nada de pollo y una cantidad positiva de carne vacuna. En un segundo momento, *luego de los discursos oficiales* sobre el no consumo de carne en función de su precio (los cuales se produjeron despues del primer momento), Lucas no consume nada de carne vacuna y una cantidad positiva de pollo. Sólo sabemos que Lucas posee en los dos casos un ingreso nominal $m > 0$ y consume otros bienes ademas de pollo y carne vacuna. También sabemos que entre los dos momentos el precio de la carne vacuna aumentó, mientras que el de pollo no aumentó. Queremos entender el por qué de este cambio de decisión de consumo. Para el resto del ejercicio suponga que x_1 denota kilos de carne vacuna consumida, x_2 los de pollo, x_3 el consumo del resto de los bienes, y sea p_1^I el precio de la carne en el primer momento, p_1^I el del segundo, sea p_2 el precio del pollo y sea $p_3 = 1$ el del resto de los bienes.

1. (20 puntos) Una primera posibilidad de análisis supone que las preferencias de Lucas son representables por una función de utilidad

$$u(x_1, x_2, x_3) = 2\sqrt{x_1 + \theta x_2} + x_3$$

   Para dado x_3, demuestre (con un gráfico) que las cantidades de carne y pollo se comportan respectivamente como

$$\begin{aligned} \text{si } p_1^I &< \frac{p_2}{\theta} &\Rightarrow\quad & x_1(p_1, p_2, m - x_3) = \frac{m - x_3}{p_1^I} \quad \text{y} \quad x_2(p_1, p_2, m - x_3) = 0 \\ \text{si } p_1^{II} &> \frac{p_2}{\theta} &\Rightarrow\quad & x_1(p_1, p_2, m - x_3) = 0 \quad \text{y} \quad x_2^*(p_1, p_2, m - x_3) = \frac{m - x_3}{p_2} \end{aligned}$$

2. (10 puntos) Reemplazando su respuesta de 1 en $u(x_1, x_2, x_3) = 2\sqrt{x_1 + \theta x_2} + x_3$, obtenga la cantidad de x_3 óptima como función de m, θ y los precios para cada caso.

3. (20 puntos) Reemplace su respuesta de 2 en las cantidades obtenidas en el punto 1 para obtener las demandas marshallianas por los bienes 1 y 2 en las situaciones I y II respectivamente. Explique en un renglón (no leeré más que un renglón, el resto será tachado) por qué estas demandas son consistentes con lo que observamos sobre el comportamiento de Lucas

4. (10 puntos) Una segunda posibilidad de análisis es suponer que las preferencias de Lucas pueden depender de un llamado patriótico por parte de las autoridades nacionales. Estas preferencias están condicionadas a si hubo o no hubo llamamiento patriótico. Si no hubo llamamiento patriótico, las preferencias son las del punto 1. Si Lucas escucha el llamamiento patriótico, sus preferencias se definen entonces sobre (x_1, x_2, x_3, a), donde a puede ser 0 (si no hace caso al llamamiento) o 1 (si hace caso). Lo que suponemos es que estas preferencias condicionales a la existencia del llamamiento patriótico pueden representarse por una función de utilidad $u(x_1, x_2, x_3, a)$ definida como:

$$
\begin{aligned}
u(x_1, x_2, x_3, 1) &= \begin{cases} 2\sqrt{\theta x_2} + x_3 & \text{si } x_1 = 0 \\ -x_1 & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{para todo } (x_2, x_3) \\
u(x_1, x_2, x_3, 0) &= -40x_1 \quad \text{para todo } (x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}
$$

¿Es cierto que si estas son las preferencias entonces podemos afirmar que Lucas prefiere *siempre* hacer caso al llamamiento patriótico que no hacer caso? Demuestre su respuesta

5. (20 puntos) Si las preferencias fuesen las del punto 4, obtenga las demandas marshallianas de Lucas por los tres bienes en la situación I y en la II.

6. (20 puntos) ¿Son las cantidades de carne y pollo provenientes de la respuesta en 5 consistentes con el comportamiento observado de Lucas mencionado en el enunciado? ¿Existe alguna diferencia observable entre este comportamiento y el obtenido en el punto 3? Como consecuencia, ¿pueden diferenciarse estas dos explicaciones del comportamiento de Lucas desde el punto de vista de las predicciones acerca del comportamiento de la demanda proveniente de cada alternativa?

Soluciones sugeridas

1. Dado que x_3 es fijo, en ambos gráficos observamos que las *curvas de indiferencia* en el plano $(x_1, \dot{x}_2)$ corresponden al caso de susittutos perfectos. En el gráfico de la situación I observamos que efectivamente $\frac{p_1^I}{p_2} < \frac{1}{\theta} = |TMS_{12}| = \frac{u_1}{u_2}$. Esto implica que para en canasta en el interior de la recta, una unidad más de x_1 implica que el mercado le pide a Lucas reducir x_2 en $\frac{p_1^I}{p_2}$ unidades, que es menor que la cantidad que Lucas está dispuesto a reducir de x_2 para permanecer indiferente $(\frac{1}{\theta})$, en consecuencia la solución óptima es la mencionada en el enunciado.

   En la situación II, como $\frac{p_1^{II}}{p_2} > \frac{1}{\theta} = |TMS_{12}| = \frac{u_1}{u_2}$ entonces para cualquier canasta en el interior de la recta, una unidad menos de x_1 implica que el mercado le retribuye a Lucas con un aumento en x_2 en $\frac{p_1^I}{p_2}$ unidades, que es mayor que la cantidad adicional de x_2 que Lucas exige para permanecer indiferente $(\frac{1}{\theta})$, en consecuencia la solución óptima es la mencionada en el enunciado.

2. En el caso I, tenemos que el problema del consumidor consiste en:

$$\max_{x_3} \quad 2\sqrt{\frac{m - x_3}{p_1^I}} + \theta 0 + x_3$$

   La condición de primer orden es:

$$-\sqrt{\frac{1}{p_1^I (m - x_3)}} + 1 = 0$$

   Nótese que se cumple la condición de segundo orden, ya que la derivada segunda con respecto a x_3 es $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p_1^I}}(m - x_3)^{-3/2}$. De la condición de primer orden tenemos que

$$p_1^I (m - x_3) = 1$$

   con lo cual la demanda marshalliana del bien 3 en la situación I es

$$x_3^{I*} = m - \frac{1}{p_1^I}$$

En la situación II el problema del consumidor es

$$\max_{x_3} \quad 2\sqrt{0+\theta\left(\frac{m-x_3}{p_2}\right)}+x_3$$

La condición de primer orden es:

$$-\sqrt{\frac{\theta}{p_2\left(m-x_3\right)}}+1=0$$

La derivada segunda con respecto a x_3 es $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta}{p_2}}\left(m-x_3\right)^{-3/2}<0$, con lo cual de la condición de primer orden obtenemos que

$$\left(m-x_3\right)p_2=\theta$$

y en consecuencia la demanda marshalliana por el bien 3 en la situación II es

$$x_3^{*II}=m-\frac{\theta}{p_2}$$

3. En la situación I tenemos que:

$$m-x_3^{I*}=\frac{1}{p_1^I}$$

con lo cual la demanda marshalliana por el bien 1 en este caso es

$$x_1^{*I}=\frac{m-x_3^{I*}}{p_1^I}=\frac{1}{\left(p_1^I\right)^2}$$

mientras que ya sabemos que $x_2^{*I}=0$. En la situación II tenemos que

$$m-x_3^{*II}=\frac{\theta}{p_2}$$

con lo cual, sabiendo que en este caso $x_1^{*II}=0$, tenemos que

$$x_2^{*II}=\frac{m-x_3^{*II}}{p_2}=\frac{\theta}{p_2^2}$$

Entonces, en I, Lucas consume sólo carne y en II sólo pollo, tal como observamos.

4. Nótese que, dado que $x_i\geq 0$ para $i=1,2,3$, entonces

$$-40x_1\leq -x_1\leq 2\sqrt{\theta x_2}+x_3$$

donde las desigualdades son estrictas si $x_1>0$. En consecuencia, es claro que si estas fueran las preferencias, tenemos que $u\left(x_1,x_2,x_3,1\right)\geq u\left(x_1,x_2,x_3,0\right)$, donde la desigualdad es estricta si $x_1=0$ y si x_2 o x_3 son positivos (lo cual está garantizado en la medida en que el conjunto presupuestario provenga de la situación donde $m>0$, lo cual es lo que suponemos). Esto implica que prefiere $a=1$ a $a=0$.

5. En la situación I todavía no hubo ningún discurso, con lo cual no hubo ningún llamamiento patriótico (los discursos oficiales se produjeron *después* del primer momento). Con lo cual en la situación I todavía las preferencias son las del punto 1 y entonces tenemos que las demandas marshallianas son:

$$x_1^{*I}=\frac{1}{\left(p_1^I\right)^2},\quad x_2^{*I}=0,\quad x_3^{*I}=m-\frac{1}{p_1^I}$$

En la situación II ya hubo un llamamiento con lo cual las preferencias son las del punto 4. De este punto podemos ver claramente que $x_1^{*I} = 0$ (su utilidad marginal es siempre negativa). Con lo cual el problema del consumidor se reduce a:

$$\max_{x_2,x_3} \quad 2\sqrt{\theta x_2} + x_3 \quad \text{sujeto a } p_2 x_2 + x_3 = m$$

Reemplazando la restricción en la función de utilidad el problema se reduce a

$$\max_{x_2} \quad 2\sqrt{\theta x_2} + m - p_2 x_2$$

Dado que las preferencias son cuasilineales en (x_2, x_3) ya sabemos que as condiciones de segundo orden de este problema se cumplen (las preferencias son estrictamente convexas), con o cual nos focalizamos en las condiciones de primer orden:

$$\sqrt{\frac{\theta}{x_2}} = p_2$$

o bien

$$x_2^{*II} = \frac{\theta}{p_2^2}$$

y entonces

$$x_3^{*II} = m - \frac{\theta}{p_2}$$

6. Podemos observar que la solución para cada momento según los puntos 2-3 coinciden totalmente con los del 5. Esto implica no sólo que la solución del punto 5 también es consistente con el comportamiento de Lucas sino también que *no* podemos diferenciar en nada las dos posibles explicaciones (la proveniente de los puntos 1 a 3 y la de los puntos 4 y 5), ya queambas predicen exactamente el mismo comportamiento.

Segundo cuatrimestre 2006 - UBA

Desde el año 2001 el Gobierno estableció un impuesto a los débitos y créditos bancarios, más popularmente conocido como el impuesto *al cheque*. Este impuesto se cobra sobre las transacciones realizadas a débitos y créditos sobre cuentas corrientes, pero no sobre cajas de ahorro. Ciertamente esto podría dar lugar a incentivos en el comportamiento de los ahorristas acerca de cuál de los dos instrumentos bancarios utilizar para mantener ahorros (líquidos). Por un lado, los cheques tienen cierta circulación como medio de pago que los certificados sobre cajas de ahorro no poseen, pero los cheques (como quedó dicho antes) están sujetos a este gravamen, que no afecta a las cajas de ahorro. El objetivo del ejercicio es estudiar esta *tensión* entre ambos efectos para estudiar el monto óptimo de ahorro en una y otra cuenta. Supongamos un consumidor que vive dos períodos denotados como $t = 0$ y $t = 1$. En $t = 0$ recibe una dotación de ω pesos (con $\omega > 0$) y en $t = 1$ recibe dotación de 0 pesos. Posee preferencias definidas sobre el consumo de uno y de otro período, representadas por la función de utilidad

$$\ln c_0 + \ln c_1$$

Este consumidor tiene acceso a dos instrumentos bancarios: una cuenta corriente y una caja de ahorro. Por cada peso ahorrado en la cuenta corriente el banco paga en $t = 1$ una tasa (neta) de interés de $r_{CC} > 0$. Además el gobierno grava con un impuesto el retiro de los fondos de la cuenta corriente en $t = 1$. (No así el depósito en $t = 0$, suponiéndose esto para simplificar). SEa $\tau \in (0, 1)$ la alícuota de este impuesto, y denote con la letra b el total de pesos depositados en la cuenta corriente en $t = 0$. Por otra parte también tiene disponible una caja de ahorro que no está gravada; en $t = 1$ el banco paga, por cada peso depositado en la caja de ahorro, una tasa (neta) de interés de $r_{CA} > 0$. Por otra parte, para poder gastar los pesos (también en $t = 1$) que retire de la caja de ahorro el consumidor debe pagar un costo adicional que simboliza los costos de extracción de efectivo de la caja o bien los costos asociados a posibles tarjetas de crédito que se utilizan con la caja de ahorro (por ejemplo, por tener débito automático). Sea s el total de pesos depositados en la caja de ahorro en $t = 0$. En este caso el costo adicional una vez que retiró el monto de pesos de la caja de ahorro igual a $c(s) = 2\alpha (s)^2$, con $\alpha > 0$.

1. (15 puntos) Escriba la restricción presupuestaria intatemporal de cada período $t = 0$ y $t = 1$ por separado.
2. (10 puntos) Reemplazando **directamente** su respuesta de 1 en la función de utilidad, escriba formalmente el problema del consumidor que elige los valores de b y de s.
3. (15 puntos) Manteniendo (por ahora) a s como constante, obtenga la condición de primer orden con respecto a s y arguya verbalmente (en no más de dos renglones) que se cumplen las condiciones de segundo orden. De la condición de primer orden despeje b como función de s y de las variables exógenas. ¿Qué restricción deben cumplir éstas para que el monto despejado de b sea estrctamente positivo? (Suponga de aquí en más que se cumplen)
4. (10 puntos) Reemplace su respuesta de 3 en la función de utilidad y obtenga la utilidad como función de s.
5. (15 puntos) Obtenga la condición de primer orden con respecto a s y demuestre matemáticamente que se cumple la condición de segundo orden con respecto a la misma variable.
6. (10 puntos) De la condición de primer orden despeje s en función de r_{CC}, r_{CA}, τ y α. ¿Que restricción sobre estas cuatro variables debe cumplirse para que s sea estrictamente positivo? En particular, ¿es posible tener un s estrictamente positivo con $r_{CC} > r_{CA}$?
7. (10 puntos) Reemplace su respuesta de 6 en la expresión obtenida en 3 (la de b como función de s).
8. (15 puntos) Supongamos que el monto α mide el costo de transacción de utilizar caja de ahorro para consumir en $t = 1$. Si α disminuye infinitesimalmente, ¿en qué dirección varía el monto óptimo depositado en la cuenta corriente? Demuetsre matemáticamente su respuesta y luego interprete en no más de dos renglones.

Soluciones sugeridas

1. (15 puntos) La restricción presupuestaria de $t = 0$ es

$$c_0 = \omega - b - s$$

y la de $t = 1$ es:s

$$c_1 = b\left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right) + s\left(1 + r_{CA}\right) - 2\alpha\left(s\right)^2$$

2. (10 puntos) El problema del consumidor ahorrista puede escribirse como

$$\max_{b,s} \quad \ln\left(\omega - b - s\right) + \ln\left(b\left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right) + s\left(1 + r_{CA}\right) - 2\alpha\left(s\right)^2\right)$$

3. (15 puntos) La CPO es

$$\frac{1}{\omega - b - s} = \frac{\left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right)}{b\left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right) + s\left(1 + r_{CA}\right) - 2\alpha\left(s\right)^2}$$

Nótese que la función de utilidad es una transformación estrictamente cóncava y estrictamente creciente de la función de utilidad Cobb-Douglas $c_0 c_1$, con lo cual constituyen preferencias estrictamente cóncavas, lo cual implica que de las condiciones de primer orden se obtiene directamente el máximo buscado. De la CPO anterior tenemos

$$b\left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right) + s\left(1 + r_{CA}\right) - 2\alpha\left(s\right)^2 = \left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right)\left(\omega - b - s\right)$$

O bien

$$2\left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right)b = \left(1 + r_{CC}\right)\left(1 - \tau\right)\left(\omega - s\right) - \left[s\left(1 + r_{CA}\right) - 2\alpha\left(s\right)^2\right]$$

obteniendo entonces

$$b = \frac{(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) - \left[s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2\right]}{2(1+r_{CC})(1-\tau)}$$

Para que b sea estrictamente positivo (suponiendo que $s < \omega$) debemos tener que $s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2 < (1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s)$. Esto es lo que supondremos de aquí en más.

4. (10 puntos) Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\omega - s - b &= \omega - s - \frac{(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) - \left[s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2\right]}{2(1+r_{CC})(1-\tau)} \\
&= \frac{(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2}{2(1+r_{CC})(1-\tau)}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& b(1+r_{CC})(1-\tau) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2 \\
=\ & \frac{(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) - \left[s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2\right]}{2} + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2 \\
=\ & \frac{(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2}{2}
\end{aligned}$$

Reemplazamos estas expresiones en la utilidad del ahorrista

$$\begin{aligned}
& \ln\left[\frac{(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2}{2(1+r_{CC})(1-\tau)}\right] \\
& + \ln\left[\frac{(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2}{2}\right] \\
=\ & \ln\left[(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2\right] \\
& - \ln(2(1+r_{CC})(1-\tau)) - \ln 2
\end{aligned}$$

5. (15 puntos) El problema puede reducirse a

$$\max_s \ln\left[(1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2\right]$$

o bien, tomando antilogaritmos

$$\max_s \quad (1+r_{CC})(1-\tau)(\omega - s) + s(1+r_{CA}) - 2\alpha(s)^2$$

La CPO es

$$-(1+r_{CC})(1-\tau) + (1+r_{CA}) - 4\alpha s = 0$$

La derivada segunda con respecto a s es

$$-4\alpha$$

que es siempre estrictamente negativa, lo cual hace que la CSO se cumpla.

6. (10 puntos) Despejando s :

$$s = \frac{(1+r_{CA}) - (1+r_{CC})(1-\tau)}{4\alpha}$$

Para que $s > 0$ debe ocurrir que $(1+r_{CA}) > (1+r_{CC})(1-\tau)$. Es posible que $s > 0$ aún si $r_{CC} > r_{CA}$ si τ es suficientemente cercano a 1.

7. (10 puntos) Reemplazando tenemos que b^* es igual a:

$$
\begin{aligned}
& \frac{(1+r_{CC})(1-\tau)\left(\omega-\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{4\alpha}\right)}{2(1+r_{CC})(1-\tau)} \\
& -\frac{\left[\left(\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{4\alpha}\right)(1+r_{CA})-2\alpha\left(\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{4\alpha}\right)^2\right]}{2(1+r_{CC})(1-\tau)} \\
= & \left(\frac{\omega}{2}-\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{8\alpha}\right) \\
& -\left(\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{4\alpha}\right)\frac{\left[(1+r_{CA})-\left(\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{2}\right)\right]}{2(1+r_{CC})(1-\tau)} \\
= & \left(\frac{\omega}{2}-\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{8\alpha}\right) \\
& -\left(\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{4\alpha}\right)\left(\frac{(1+r_{CA})+(1+r_{CC})(1-\tau)}{4(1+r_{CC})(1-\tau)}\right)
\end{aligned}
$$

8. (15 puntos) Derivando con respecto a α tenemos que esta derivada es igual a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b^*}{\partial\alpha} = & \frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{8\alpha^2} \\
& +\left(\frac{(1+r_{CA})+(1+r_{CC})(1-\tau)}{4(1+r_{CC})(1-\tau)}\right)\left(\frac{(1+r_{CA})-(1+r_{CC})(1-\tau)}{4\alpha^2}\right)
\end{aligned}
$$

Dados los supuestos sobre r_{CA}, r_{CC} y τ esta derivada es estrictamente positiva. Esto significa que si α fuese más bajo entonces el agente ahorraría menos en la cuenta corriente. La razón no es muy difícil de entender: una reducción de α simboliza una reducción de los costos de transacción de comprar bienes con fondos en cajas de ahorro. En consecuencia, el costo de oportunidad de comprar bienes con caja de ahorro (en $t = 1$) ahora es menor, lo cual, por efecto sustitución, implicaría este efecto.

Otoño 2007 - UdeSA: Parcialito.

A comienzos del corriente año (2007) el Gobierno decidió aumentar el minimo no imponible del impuesto a las ganancias para, supuestamente (al menos de acuerdo a la interpretacion de los medios periodisticos graficos), inducir un incremento en la demanda de bienes y servicios. Al mismo tiempo, es de publico conocimiento la tendencia al alza de los precios de los productos de consumo. Una pregunta que puede surgir es si el incremento del minimo no imponible del impuesto a las ganancias realmente permite compensar el incremento de precios, especialmente a las familias de menores ingresos. El problema de este parcialito intenta dar una respuesta posible a esta pregunta. Suponga un consumidor que consume dos productos, los bienes 1 y 2, cuyas cantidades denotamos como siempre, x_1 y x_2 respectivamente. Los precios (medidos en pesos) de cada producto es p_1 y p_2 respectivamente. Este consumidor recibe un ingreso de m pesos. El Gobierno cobra un impuesto a la renta de la siguiente manera: si el ingreso m es estrictamente menor que un cierto minimo, que denominaremos $\bar{m}$, entonces paga 0 impuesto. Si el ingreso m es mayor o igual a $\bar{m}$ entonces el consumidor debe pagar un impuesto igual a la diferencia entre m y $\bar{m}$ multiplicado por la alicuota impositiva, $\tau \in (0,1)$. Denote $\widetilde{m}$ el ingreso disponible, igual a m menos los impuestos a la renta. Las preferencias de este consumidor pueden representarse por la siguiente funcion de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$$

1. (10 puntos) Escriba la restriccion presupuestaria como funcion de x_1, x_2, p_1, p_2 y $\widetilde{m}$.

2. (10 puntos) Son estas preferencias estrictamente convexas? Demuestre matematicamente su respuesta (pero del modo que considere mas simple y corto)

3. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden del consumidor.

4. (20 puntos) De su respuesta anterior obtenga x_1^* y x_2^* como funcion de p_1, p_2 y $\widetilde{m}$. Utilizando la respuesta en alguno de los puntos anteriores demuestre que estas cantidades (como funcion de p_1, p_2 y $\widetilde{m}$) constituyen las dos funciones de demanda marshallianas del consumidor por los bienes 1 y 2 respectivamente.

5. (10 puntos) Obtenga la funcion de utilidad indirecta.

6. (15 puntos) Suponga de aqui en mas la siguiente situacion: los precios de ambos bienes aumentan en una proporcion $\Pi > 1$. **Simultáneamente a este aumento de precios**, el Gobierno aumenta el minimo no imponible, de $\bar{m}$ a $\theta\bar{m}$, con $\theta > 1$. Suponga inicialmente en este apartado que $m < \bar{m}$. Dado que $\Pi > 1$, ¿es verdad que en este caso el consumidor se ve *beneficiado* de algun modo (debe definir en que sentido) por este incremento del minimo no imponible que es simultáneo a los incrementos de precios? Demuestre su respuesta.

7. (15 puntos) Suponga la misma situacion con respecto a precios y minimo no imponible, pero suponga ahora que $m > \theta\bar{m}$. Suponga que $\theta = \Pi$. ¿Es verdad que en este caso el consumidor se ve *beneficiado* de algun modo (en el sentido definido en el punto anterior) por este incremento del minimo no imponible que ocurre simultáneamente con el incremento de los precios? Demuestre su respuesta.

8. (10 puntos) Si su respuesta en el punto anterior fue no, demuestre que existe un valor de θ (que depende de Π, τ, m y $\bar{m}$) tal que el consumidor se encuentra indiferente entre la situacion sin incremento de precios ni de minimo no imponible y la situacion con $\Pi > 1$ y $\theta > 1$).

Soluciones sugeridas

1. La restricción es simplemente
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq \widetilde{m}$$

2. Dado que las preferencias son estrictamente monótonas, pues
$$u_l = \frac{1}{\sqrt{x_l}} > 0, \quad l = 1, 2$$
basta entonces con comprobar que
$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = 2u_{12}u_1u_2 - u_{11}u_2^2 - u_{22}u_1^2 > 0$$
en nuestro caso, $u_{12} = u_{21} = 0$, $u_{ll} = -\frac{1}{2(x_l)^2} < 0$, $l = 1, 2$. En consecuencia
$$2u_{12}u_1u_2 - u_{11}u_2^2 - u_{22}u_1^2 = \frac{1}{2(x_1)^2\sqrt{x_2}} + \frac{1}{2(x_2)^2\sqrt{x_1}} > 0$$
demostrando que las preferencias son estrictamente convexas.

3. Las condiciones de primer orden del consumidor son:
$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0 \\ L_2 &= \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0 \\ L_\lambda &= \widetilde{m} - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{aligned}$$

4. De las dos primeras CPO tenemos que
$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$
con lo cual $x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$. Reemplazando esta ecuación en la restricción presupuestaria tenemos que
$$p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1 = \widetilde{m}$$
o bien
$$x_1 p_1 \left[1 + \frac{p_1}{p_2}\right] = \widetilde{m}$$
Despejando x_1 tenemos que
$$x_1^* = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1 + p_2}\right)$$
y reemplazando esta cantidad de x_1 en la relación $x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$ tenemos que
$$x_2^* = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1^* = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1 + p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1 + p_2}\right)$$
La canasta $x_1^* = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1+p_2}\right)$, $x_2^* = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1+p_2}\right)$ constituye la canasta óptima (el par de funciones de demanda marshalianas) ya que el punto 2 demuestra que las preferencias son estrictamente convexas. Por lo tanto, es suficiente con computar esta canasta utilizando las condiciones de primer orden.

5. Para la funcion de utilidad indirecta, reemplazamos la canasta óptima en la función de utilifdad
$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, \widetilde{m}) &= 2\sqrt{x_1^*} + 2\sqrt{x_2^*} \\ &= 2\sqrt{\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1 + p_2}\right)} + 2\sqrt{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1 + p_2}\right)} \\ &= 2\sqrt{\left(\frac{\widetilde{m}}{p_1 + p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right] \end{aligned}$$

6. En este caso, tenemos que en la situación previa $\widetilde{m} = m$ $(< \bar{m})$, y por lo tanto el incremento del mínimo no imponible no afecta a este consumidor. En consecuencia la utilidad indirecta previo al incremento de precios y al incremento de $\bar{m}$ es simplemente:
$$V^I = 2\sqrt{\left(\frac{m}{p_1 + p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right]$$
y luego de ambos incrementos la utilidad indirecta para este consumidor es:
$$V^{II} = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\sqrt{\left(\frac{m}{p_1 + p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right] < 2\sqrt{\left(\frac{m}{p_1 + p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right] = V^I$$
ya que $\Pi > 1$ y por lo tanto $\frac{2}{\sqrt{\Pi}} < 2$. Si definimos al beneficio como el incremento en la utilidad indirecta entre la situación I y la situación II entonces vemos que este consumidor no se beneficia con el incremento del minimo no imponible (lo cual es lógico ya que la suba del mínimo no imponible sólo afecta a quienes antes del incremento de $\bar{m}$ pagaban impuestos, no a los que recibían un ingreso suficientemente bajo como para no pagar impuestos a la renta).

7. En este caso tenemos que, previo al incremento de precios y de $\bar{m}$, $\widetilde{m} = m - \tau(m - \bar{m}) = m(1-\tau) + \bar{m}\tau$. En consecuencia las utilidades indirectas previo al incremento y post incremento son respectivamene

$$\begin{aligned} V^{I} &= 2\sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\bar{m}\tau}{p_1+p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right] \\ V^{II} &= \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\theta\bar{m}\tau}{p_1+p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right] \end{aligned}$$

donde $\theta = \Pi$. Ahora bien, este incremento en $\bar{m}$ (simultaneamente con el incremento en precios) beneficia a este consumidor (en el sentido de incrementar la utilidad indirecta entre las situaciones I y II) si $V^{II} > V^{I}$. Sin embarog claramente tenemos que

$$\frac{m(1-\tau)+\Pi\bar{m}\tau}{\Pi} < m(1-\tau)+\bar{m}\tau$$

para $\Pi > 1$. En consecuencia

$$\sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\Pi\bar{m}\tau}{\Pi(p_1+p_2)}\right)} < \sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\bar{m}\tau}{(p_1+p_2)}\right)}$$

Multiplicando en ambos lados por $2\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right]$ tenemos que

$$\frac{2}{\sqrt{\Pi}}\sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\Pi\bar{m}\tau}{p_1+p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right] < 2\sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\bar{m}\tau}{p_1+p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right]$$

y en consecuencia $V^{I} > V^{II}$, contrariamente a lo que ocurriria si este consumidor se viese beneficiado por esta política. En consecuencia la respuesta es no.

8. Para resolver esta parte igualamos $V^{II} = V^{I}$ para algún θ :

$$\frac{2}{\sqrt{\Pi}}\sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\theta\bar{m}\tau}{p_1+p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right] = 2\sqrt{\left(\frac{m(1-\tau)+\bar{m}\tau}{p_1+p_2}\right)}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right]$$

Cancelando $\frac{2}{\sqrt{p_1+p_2}}\left[\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right]$ a ambos lados la igualdad anterior puede expresarse como

$$\sqrt{\frac{m(1-\tau)+\theta\bar{m}\tau}{\Pi}} = \sqrt{m(1-\tau)+\bar{m}\tau}$$

o bien

$$\frac{m(1-\tau)+\theta\bar{m}\tau}{\Pi} = m(1-\tau)+\bar{m}\tau$$

Resolviendo para θ obtenemos

$$\theta = \frac{m(1-\tau)(\Pi-1)+\Pi\bar{m}\tau}{\bar{m}\tau} = \Pi + \frac{m(1-\tau)(\Pi-1)}{\bar{m}\tau}$$

Otoño 2007 - UdeSA: Parcial.

En el servicio de noticias Cityeconómica, del día 17 de abril de 2007, puede leerse un artículo titulado "**En sólo un año las familias duplicaron su nivel de deuda**" (fuente original: diario Infobae). En este artículo puede leerse:

Según un informe del Centro de Economía y Finanzas para el desarrollo de la Argentina (Cefid-ar), las familias argentinas aumentaron su endeudamiento en 10.000 millones de pesos, entre febrero de 2006 y el mismo mes de este año. Esa suba implica un crecimiento de casi el 50% en el stock de crédito. De acuerdo con la evaluación, las familias aumentaron su endeudamiento principalmente para lo que puede catalogarse como consumo doméstico, que incluye desde la compra de electrodomésticos hasta la financiación de sus vacaciones.

Este problema intenta racionalizar una posible causa (no necesariamente la única) de la relación entre el incremento en este endeudamiento y la compra de electrodomésticos (más en general, bienes durables), a través de una aplicación de la teoría de la elección intertemporal de consumo. Suponga dos períodos, $t = 0$, 1. Existe un bien de consumo en cada período llamado *dólar* cuyo precio nominal es 1 en cada período. En el primer período también el consumidor puede comprar una unidad de un bien de consumo durable, que llamaremos electrodoméstico. Llamando c_t al consumo de dólares de $t = 0, 1$ y $k \in \{0, 1\}$ a las unidades de electrodomésticos que elige el consumidor en $t = 0$ las preferencias de este consumidor se asumen como representadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(c_0, c_1, k) = \ln c_0 + \beta \ln c_1 + u(k)$$

donde $u(0) = 0$ y $u(1) > 0$. Para nuestra mayor comodidad llamemos $a \equiv u(1)$. Este consumidor recibe una dotación de ω_0 dólares en $t = 0$ y de $\omega_1 > 0$ dólares en $t = 1$, suponiendo que $\omega_t > 0$ para $t = 0, 1$. El precio de un electrodoméstico en $t = 0$ es igual a q dólares, donde se supone que $q = \theta\omega_0$, con $\theta > 0$. Este consumidor tiene acceso a un *banco* que toma depósitos en dólares y presta en dólares, todo a una misma tasa (neta) de interés denotada como r. Denotamos como s al ahorro/préstamo (dependiendo del signo) que el consumidor realiza en el banco.

1. (10 puntos) Escriba la restricción presupuestaria intratemporal en cada período por separado en el caso en que el consumidor compra el electrodoméstico y luego las que corresponde al caso en que no lo compra.

2. (5 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden en cada uno de los dos casos anteriores y arguya sin demostrar matemáticamente que las condiciones de segundo orden se verifican en este caso.

3. (5 puntos) Obtenga el valor de s^* que maximiza la utilidad del consumidor en cada uno de los dos casos.

4. (5 puntos) ¿Es posible que se dén al mismo tiempo dos condiciones sobre $(\omega_0, \omega_1, 1 + r)$ y eventualmente θ, una que afirme que el consumidor **ahorra** si no compra el electrodoméstico y otra en la que afirme que el consumidor **toma prestado** si compra el electrodoméstico? Demuestre y explique.

5. (5 puntos) Obtenga la utilidad indirecta para el caso en que el consumidor no adquiere el electrodoméstico y luego la utilidad indirecta para el caso en que sí lo adquiere.

6. (10 puntos) Escriba la desigualdad que implica que el consumidor prefiere comprar el electrodoméstico a no hacerlo.

7. (15 puntos) Suponga las condiciones que obtuvo en (4) y (6). Suponga primero que $\theta \in (0, 1)$. ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si (ω_0, ω_1) aumentan ambos en una proporción ϕ? ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si sólo ω_0 aumenta? Demuestre matemáticamente su respuesta.

8. (10 puntos) Suponga las condiciones que obtuvo en (4) y (6). Suponga ahora que $\theta > 1$. Obtenga la condición que implica que, aún con $\theta > 1$, los consumos óptimos en $t = 0$ y en $t = 1$ son mayores a cero.

9. (10 puntos) Suponga $\theta > 1$ .Si ω_0 fuese mayor (con el mismo ω_1), ¿es la condición que obtuvo en (6) más o menos probable que se verifique? ¿y la que obtuvo en (8)?

10. (15 puntos) Suponga las condiciones que obtuvo en (4), (6) y (8). Suponga que $\theta > 1$. ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si (ω_0, ω_1) aumentan ambos en una proporción ϕ? ¿Es cierto que el préstamo del consumidor es mayor si sólo ω_0 aumenta? Demuestre matemáticamente su respuesta.

11. (10 puntos) Suponga que (ω_0, ω_1) fuesen un 10% mayor. Suponga que $\theta > 1$ y las condiciones en (4), (6) y (8). ¿En qué porcentaje se incrementa el préstamo del consumidor? ¿Es este incremento *aproximadamente igual* al incremento del 50% del crédito que según el artículo se verificó en Argentina entre febrero de 2006 y febrero de 2007?

Soluciones sugeridas

1. Las restricciones presupuestarias intratemporales en cada período en el caso en que el consumidor compra el electrodoméstico son

$$\begin{aligned} c_0 + s + \theta\omega_0 &= \omega_0 \quad \text{para } t = 0 \\ c_1 &= \omega_1 + s(1+r) \quad \text{para } t = 1 \end{aligned}$$

y las que corresponde al caso en que no lo compra son:

$$\begin{aligned} c_0 + s &= \omega_0 \quad \text{para } t = 0 \\ c_1 &= \omega_1 + s(1+r) \quad \text{para } t = 1 \end{aligned}$$

2. Si reemplazamos cada restricción presupuestaria en la función de utilidad correspondiente podemos computar la CPO con respecto a s en el caso en que compra el electrodoméstico es

$$\frac{\beta(1+r)}{\omega_1 + s(1+r)} = \frac{1}{\omega_0(1-\theta) - s}$$

y para quien no compra el electrodoméstico:

$$\frac{\beta(1+r)}{\omega_1 + s(1+r)} = \frac{1}{\omega_0 - s}$$

Las CSO se verifican ya que la función $\ln c_0 + \beta \ln c_1$ es una transformación logarítimica (y por ende monótona) de la función Cobb-Douglas $c_0 c_1^{\beta}$ (ademas, la función es esrictamente cóncava con lo cual puede demostrarse que el determinante del hessiano orlado es estrictamente positivo, además que $u_1 > 0$, $u_2 > 0$)

3. En el caso en que compre el electrodoméstico lo obtenemos de:

$$\omega_1 + s(1+r) = \beta(1+r)\left[\omega_0(1-\theta) - s\right]$$

con lo cual (denotando a s^E el s^* cuando compra el electrodoméstico):

$$s^E = \frac{\beta(1+r)\,\omega_0(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}$$

Similarmente, en el caso en que no compre el electrodoméstico tenemos que

$$\omega_1 + s(1+r) = \beta(1+r)(\omega_0 - s)$$

y de aquí despejamos s, cuya solución denotamos s^{NE} :

$$s^{NE} = \frac{\beta(1+r)\,\omega_0 - \omega_1}{(1+r)(1+\beta)}$$

4. Sí es posible que se dén al mismo tiempo dos condiciones sobre $(\omega_0, \omega_1, 1+r)$ y eventualmente θ, una que afirme que el consumidor **ahorra** si no compra el electrodoméstico y otra en la que afirme que el consumidor **toma prestado** si compra el electrodoméstico. La razón es sencilla: $s^E < 0$ si y sólo si

$$(1-\theta) < \frac{\omega_1}{\beta(1+r)\omega_0}$$

y $s^{NE} > 0$ si y sólo si

$$1 > \frac{\omega_1}{\beta(1+r)\omega_0}$$

En consecuencia, la condición para que $s^E < 0$ y $s^{NE} > 0$ simultáneamente es

$$(1-\theta) < \frac{\omega_1}{\beta(1+r)\omega_0} < 1$$

Esto significa que la relación entre el valor presente de la dotación futura $\left(\frac{\omega_1}{1+r}\right)$ y ω_0 (normaizado por el coeficiente β) es menor a uno, lo suficientemente pequeño para que un consumidor que sólo gasta en dólares tanto en $t=0$ como en $t=1$ decida ahorrar en $t=0$, y por otra parte el costo de comprar el electrodoméstico $\theta\omega_0$ es suficientemente grande como para que ese mismo consumidor decida tomar un préstamo en $t=0$.

5. Reemplazando en cada caso obtenemos

$$\begin{aligned}
V^E &= \ln\left(\omega_0(1-\theta) - \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta)-\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)\right) \\
&\quad +\beta\ln\left(\omega_1 + \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta)-\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)(1+r)\right) + a \\
&= \ln\left(\frac{\omega_0(1-\theta)(1+r)+\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right) + \beta\ln\left(\frac{\beta\omega_0(1-\theta)(1+r)+\beta\omega_1}{(1+\beta)}\right) + a \\
&= (1+\beta)\ln\left(\frac{\omega_0(1-\theta)(1+r)+\omega_1}{(1+\beta)}\right) + \beta\ln\beta - \ln(1+\beta) + a
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
V^{NE} &= \ln\left(\omega_0 - \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0-\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)\right) + \beta\ln\left(\omega_1 + \left(\frac{\beta(1+r)\omega_0-\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right)(1+r)\right) \\
&= (1+\beta)\ln\left(\frac{\omega_0(1+r)+\omega_1}{(1+\beta)}\right) + \beta\ln\beta - \ln(1+\beta)
\end{aligned}$$

6. La desigualdad que implica que el consumidor prefiere comprar el electrodoméstico a no hacerlo es

$$(1+\beta)\ln(\omega_0(1-\theta)(1+r)+\omega_1) + a \geq (1+\beta)\ln(\omega_0(1+r)+\omega_1)$$

o bien

$$\frac{a}{(1+\beta)} \geq \ln\left(\frac{(\omega_0(1+r)+\omega_1)}{(\omega_0(1-\theta)(1+r)+\omega_1)}\right)$$

o bien

$$\exp\left(\frac{a}{(1+\beta)}\right) \geq \frac{\omega_0(1+r)+\omega_1}{\omega_0(1-\theta)(1+r)+\omega_1}$$

7. Supongamos que (ω_0, ω_1) aumentan ambos en una misma proporción ϕ. Dado que la desigualdad en (6) se verifica el consumidor decide comprar el electrodoméstico. Dado que las desigualdades en (4) se verifican entonces sabemos que $s^E < 0$. Transcribimos s^E aquí:

$$\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta)-\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}$$

si (ω_0, ω_1) aumentan en una proporción, suponemos que las dotaciones con aumento pueden escribirse como $((1+\phi)\,\omega_0, (1+\phi)\,\omega_1)$. En consecuencia el monto de s^E es ahora

$$\begin{aligned} s_\phi^E &= \frac{\beta\,(1+r)\,\omega_0\,(1+\phi)\,(1-\theta)-(1+\phi)\,\omega_1}{(1+r)\,(1+\beta)} \\ &= \left[\frac{\beta\,(1+r)\,\omega_0\,(1-\theta)-\omega_1}{(1+r)\,(1+\beta)}\right](1+\phi) \end{aligned}$$

con $\phi > 0$. Dado que $\left[\frac{\beta(1+r)\omega_0(1-\theta)-\omega_1}{(1+r)(1+\beta)}\right] < 0$, la conclusión es que si (ω_0, ω_1) aumentan en una proporción ϕ el endeudamiento (el negativo de s^E) aumenta en la misma proporción. Si sólo ω_0 aumenta podemos observar que

$$\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} = \frac{\beta\,(1+r)\,(1-\theta)}{(1+r)\,(1+\beta)}$$

Dado que $\theta < 1$ tenemos que $\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} > 0$. Pero entonces, si ω_0 aumenta, lo hace s^E, pero entonces s^E se hace menos negativo, siendo entonces *menor* el monto de préstamo que el consumidor decide en $t = 0$ cuanto mayor sea ω_0.

8. Para responder esta pregunta, dado que por las condiciones en (4) y (6) el consumidor toma un préstamo en $t = 0$ para comprar el electrodoméstico (ya que la desigualdad (6) afirma que le es preferido a no comprarlo) entonces obtenemos los consumos directamente:

$$\begin{aligned} c_0^E &= \omega_0\,(1-\theta) - s^E = \frac{\omega_0\,(1-\theta)\,(1+r)+\omega_1}{(1+\beta)\,(1+r)} \\ c_1^E &= \omega_1 + s^E\,(1+r) = \frac{\beta}{(1+\beta)}\left[\omega_0\,(1-\theta)\,(1+r)+\omega_1\right] \end{aligned}$$

Claramente entonces $c_0^E > 0$ y $c_1^E > 0$ si y sólo si

$$\frac{\omega_1}{\omega_0\,(1+r)} > (\theta - 1)$$

9. (10 puntos) La condición en (6) es

$$\exp\left(\frac{a}{(1+\beta)}\right) \geq \frac{\omega_0\,(1+r)+\omega_1}{\omega_0\,(1-\theta)\,(1+r)+\omega_1}$$

con $(1-\theta) < 0$. Claramente esto implica que si ω_0 es más grande, lo es $\frac{\omega_0(1+r)+\omega_1}{\omega_0(1-\theta)(1+r)+\omega_1}$, con lo cual para un dado a y β un valor más grande de ω_0 hace que la desigualdad sea menos probable que se cumpla (de hecho, para

$$\omega_0 \simeq \omega_0^* \equiv \frac{\omega_1}{(\theta-1)\,(1+r)}$$

el denominador $\omega_0\,(1-\theta)\,(1+r)+\omega_1$ es prácticamente cero y entonces la desigualdad no podría ser cierta). En el caso de la desigualdad del punto (8):

$$\frac{\omega_1}{\omega_0\,(1+r)} > (\theta - 1)$$

claramente el lado izquierdo es decreciente en ω_0 con lo cual cuanto mayor sea ω_0 menor es $\frac{\omega_1}{\omega_0(1+r)}$ y menos probable es que esta desigualdad se cumpla.

10. Supongamos que las condiciones en (4), (6) y (8) son ciertas y que $\theta > 1$. En este caso el préstamo que toma el consumidor (para comprar el electrodoméstico) es nuevamente:

$$\frac{\beta\,(1+r)\,\omega_0\,(1+\phi)\,(1-\theta)-(1+\phi)\,\omega_1}{(1+r)\,(1+\beta)}$$

Por los mismos argumentos que en el punto (7), si tanto ω_0 como ω_1 fuesen más grandes en una proporción ϕ entonces s^E también es mayor en una proporción ϕ Si sólo ω_0 aumenta otra vez comprobamos que

$$\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} = \frac{\beta\,(1+r)\,(1-\theta)}{(1+r)\,(1+\beta)}$$

pero como ahora $\theta > 1$ entonces $\frac{\partial s^E}{\partial \omega_0} < 0$. Esto significa que si ω_0 es mayor, es menor entonces s^E. Pero como $s^E < 0$ entonces un menor s^E es equivalente a decir que el monto de préstamo que toma el consumid0or es mayor cuanto mayor sea ω_0.

11. En este caso tenemos que $\phi = 0.1$. Suponiendo $\theta > 1$ y las condiciones en (4), (6) y (8), el préstamo tomado por el consumidor sería simplemente

$$\left[\frac{\beta\,(1+r)\,\omega_0\,(1-\theta) - \omega_1}{(1+r)\,(1+\beta)}\right](1.1)$$

Esto significa que el incremento del préstamo es del 10%. Claramente este incremento no es siquiera *aproximadamente igual* al incremento del 50% del crédito que según el artículo se verificó en Argentina entre febrero de 2006 y febrero de 2007. Esto podría interprtarse como el hecho de que no podría explicarse el incremento del monto de préstamo por un aumento del ingreso corriente y del ingreso futuro (percibido) del 10%, que es un poco superior a lo que se incrementó el producto anualmente en el último trienio.

Segundo cuatrimestre 2007 UBA. Parcialito

En la coyuntura actual una de las preocupaciones más grandes hacia el futuro es lo que ocurrirá con el accionar de los gremios. En su edición impresa del día 28 de setiembre de 2007 el diario El Cronista Comercial publica un artículo titulado "**Gremios le ponen precio al pacto social: 30% para salarios**". El mismo tñitulo sugiere que para que no existan mayores "conflictos" el incremento salarial tendrá que tener ese piso. Este problema simplemente intenta racionalizar la existencia de un *precio* por parte de un trabajador para evitar un conflicto sindical y eventualmente originar mayores costos a través de medidas de fuerza. Suponga entonces un consumidor-trabajador que debe decidir primero si aceptar trabajar una cantidad de horas que luego decidirá por un salario w por unidad de tiempo o, en su lugar, recurrir al paro. Si este trabajador decide no recurrir al paro y trabajar, suponemos que entonces el trabajador decide la cantidad de horas trabajadas y la cantidad de horas consumidas como ocio, de una dotación total de $H > 1$ horas. Sea l el consumo de horas de ocio. Este trabajador consume adem.as un conjunto de bienes cuyo precio normalizamos a 1. Sea c el consumo de esos bienes. Las preferencias de este trabajador (dado que decide trabajar y no recurrir al paro) se representan por la función de utilidad

$$u\,(c, l) = A\sqrt{l} + \sqrt{c}$$

con $A > 0$. Si decide recurrir al paro, obtiene un consumo de ocio de H horas y con probabilidad $\eta \in (0, 1)$ sus reclamos tienen un impacto tal que recibe un subsidio igual a una cantidad de bienes igual a tres veces lo que obtendría si no recurriese al paro y trabajase al salario w la cantidad de horas deseada y con probabilidad $(1-\eta)$ obtiene un consumo de 0 bienes. Las preferencias sobre consumo de ocio y de bienes se representan del mismo modo que en el caso en que no recurre al paro.

1. (15 puntos) Plantee el problema de este consumidor si decide trabajar y no recurrir al paro
2. (15 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden correspondiente al problema anterior; ¿se cumplen las condiciones de segundo orden? Justifique su respuesta (no tiene necesariamente que demostrar que se cumplen estas últimas, pero su respuesta debe estar demostrada de alguna manera)
3. (10 puntos) De las condiciones del punto anterior obtenga el valor de l y el de c que surgen de ellas
4. (10 puntos) Escriba la utilidad "indirecta" del trabajador si decide trabajar y no recurrir al paro

5. (10 puntos) Escriba la utilidad esperada de este trabajador si decidiese recurrir al paro

6. (15 puntos) Obtenga la utilidad indirecta del trabajador antes de decidir si recurrir al paro o no

7. (10 puntos) Del punto anterior: escriba entonces la desigualdad que caracteriza al trabajador que decide trabajar y no recurrir a la medida de fuerza.

8. (15 puntos) Del punto anterior: ¿es posible predecir si el trabajador decide recurrir al paro o trabajar cuando $w \downarrow 0$? ¿y cuando w es suficientemente grande?

Soluciones sugeridas

1. (15 puntos) El problema de este consumidor si decide trabajar y no recurrir al paro puede plantearse como

$$\max_{(l,c)} A\sqrt{l}+\sqrt{c} \text{ sujeto a } c=w\,(H-l)$$

con $l \leq H$.

2. (15 puntos) Luego de reemplazar la restricción de presupuesto en la funciòn de utilidad el problema es simplemente elegir l que maximice $A\sqrt{l}+\sqrt{w\,(H-l)}$.La condición de primer orden correspondiente al problema anterior es:

$$\frac{A}{2\sqrt{l}}-\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{(H-l)}}=0$$

Nótese que la función de utilidad es estrictamente cóncava, esto es, $u_{cc}<0$ y $u_{ll}<0$, con $u_{cc}u_{ll}$ - $2u_{lc}$ >0. Esto implica que el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} u_{cc} & u_{cl} & u_c \\ u_{lc} & u_{ll} & u_l \\ u_c & u_l & 0 \end{bmatrix}$$

dado que $u_{lc}=u_{cl}=0$ es igual a $-u_c^2u_{ll}-u_l^2u_{cc}>0$.Por lo tanto las preferencias son estrictamente convexas y por lo tanto se cumplen las condiciones de segundo orden.

3. (10 puntos) De las condiciones del punto anterior despejamos el valor de l que satisface la condición de primer orden:

$$A^2\,(H-l)=wl \Rightarrow\ l^M=\frac{A^2}{A^2+w}H$$

y entonces

$$c^M=w\left(H-\frac{A^2}{A^2+w}H\right)=\frac{w^2H}{A^2+w}$$

4. (10 puntos) La utilidad "indirecta" del trabajador si decide trabajar y no recurrir al paro es

$$\begin{aligned} V^T &\equiv A\sqrt{\frac{A^2}{A^2+w}H}+\sqrt{\frac{w^2H}{A^2+w}}=\left(\sqrt{\frac{H}{A^2+w}}\right)\left(A^2+w\right) \\ &= \sqrt{H}\sqrt{(A^2+w)} \end{aligned}$$

5. (10 puntos) La utilidad esperada de este trabajador si decidiese recurrir al paro es simplemente

$$\begin{aligned} V^P &= \eta\left[A\sqrt{H}+\sqrt{\frac{3w^2H}{A^2+w}}\right]+\eta A\sqrt{H} \\ &= A\sqrt{H}+\eta\sqrt{\frac{3w^2H}{A^2+w}} \end{aligned}$$

6. (15 puntos) La utilidad indirecta del trabajador antes de decidir si recurrir al paro o no es

$$V = \max\left\{V^T; V^P\right\} = \max\left\{\sqrt{H}\sqrt{(A^2+w)}; \sqrt{H}\left(A+\eta\sqrt{\frac{3w^2}{A^2+w}}\right)\right\}$$

7. (10 puntos) Del punto anterior deducimos que la desigualdad que caracteriza al trabajador que decide trabajar y no recurrir a la medida de fuerza es simplemente

$$\sqrt{(A^2+w)} \geq A+\eta\sqrt{\frac{3w^2}{A^2+w}}$$

8. (15 puntos) Del punto anterior tomamos primero el limite de $w \downarrow 0$ a ambos lados de la desigualdad, el cual se transforma en

$$A \geq A$$

el cual en rigor se transforma en igualdad. Esto significa que cuando el salario es infinitesimal (o despreciable) el consumidor tenderá a estar indiferente entre elegir trabajar por un salario casi nulo o realizar un paro y cobrar con probabilidad η un pago casi nulo.

Luego tomamos el limite con w tendiendo a infinito: el lado derecho tiende a infinito, y lo mismo ocurre con el lado derecho. Ante este problema de comparar infinitos (lo cual significa una indeterminación) tomamos la fracción

$$\frac{A+\eta\sqrt{\frac{3w^2}{A^2+w}}}{\sqrt{(A^2+w)}}$$

Utilizando L'Hopital tenemos que

$$\lim_{w\to\infty}\frac{A+\eta\sqrt{\frac{3w^2}{A^2+w}}}{\sqrt{(A^2+w)}} = \lim_{w\to\infty}\frac{\eta\sqrt{3}\frac{\left[1-\frac{w}{2(A^2+w)}\right]}{(A^2+w)^{1/2}}}{\frac{1}{2\sqrt{A^2+w}}} = \lim_{w\to\infty}\eta 2\sqrt{3}\left[1-\frac{w}{2\left(A^2+w\right)}\right] = \eta\sqrt{3}$$

Esto significa que si $\eta > \frac{1}{\sqrt{3}}$ entonces para un w suficientemente alto $A+\eta\sqrt{\frac{3w^2}{A^2+w}}$ es mayor que $\sqrt{(A^2+w)}$ y por lo tanto preferirá ir al paro, mientras que si $\eta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ entonces para un w suficientemente alto $A+\eta\sqrt{\frac{3w^2}{A^2+w}}$ es menor que $\sqrt{(A^2+w)}$ y por lo tanto preferirá trabajar.

Otoño 2008 UdeSA. Parcialito

Desde al menos dos años (desde el año 2006) la tasa de inflación volvió a instalarse (después de más de quince años de cierta estabilidad de precios salvo en el año 2002) como uno de los principales ejes de las discusiones económicas en Argentina (basta con leer titulares de suplementos económicos como los del diario La Nación del 27/03/08). De todos modos, el problema de su "medición" dista de ser trivial. Este problema ilustra precisamente acerca del problema de medir la "inflación relevante" para dos consumidores distintos. Supongamos dos hermanas mellizas, Alicia y Beatriz, que reciben en principio un mismo ingreso $m > 0$ y ambas consumen solamente dos productos: yogurth de frutilla y agua mineral. Sea x_1 los litros de yogurth consumidos y x_2 los de agua mineral. Ellas compran estos productos en el supermercado, y los precios por litro de cada uno de estos productos son p_1 y p_2 respectivamente. Cada una de las hermanas posee preferencias definidas sobre canastas (x_1, x_2), que satisfacen todos los axiomas vistos en clase y que tienen la siguiente representación a través de las funciones de utilidad

$$U^i(x_1,x_2) = (x_1)^{\alpha_i}(x_2)^{1-\alpha_i}$$

donde $i \in \{A, B\}$, queriendo decir que $i = A$ se refiere a Alicia e $i = B$ se refiere a Beatriz. Suponemos concretamente que $\alpha_A = \frac{1}{5}$ y que $\alpha_B = \frac{3}{5}$.

1. (10 puntos) Plantee el problema de cada hermana i de elección de la canasta óptima dados (p_1, p_2, m)

2. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden de cada consumidora.

3. (10 puntos) De su respuesta anterior obtenga x_1^* y x_2^* como función de p_1, p_2 y $\widetilde{m}$ para cada hermana. Arguya sin demostrar matemáticamente que se verifica la condición de segundo orden en este caso.

4. (10 puntos) Obtenga la funcion de utilidad indirecta de cada hermana.

5. (15 puntos) Suponga a partir de este punto hasta el final del ejercicio que ahora los precios de cada bien no son más p_1 ni p_2 sino $p_1 \cdot (1 + \pi_1)$ y $p_2 \cdot (1 + \pi_2)$ respectivamente, con $\pi_1 > 0$ y $\pi_2 > 0$. Suponga que m no varía. Demuestre entonces que cada una de las dos hermanas se encuentra peor (desde el punto de vista de su utilidad) con este incremento de precios.

6. (15 puntos) Siguiendo con los mismos supuestos sobre los precios, suponga ahora que el padre de Alicia y Beatriz les aumenta el ingreso nominal de m a $m\,(1 + \pi_m)$, con $\pi_m > 0$ tal que

$$\ln(1 + \pi_m) = \frac{1}{2}\ln(1 + \pi_1) + \frac{1}{2}\ln(1 + \pi_2)$$

¿Es cierto que con este incremento de m tanto Alicia como Beatriz obtendrán un nivel de utilidad igual o mayor que antes del incremento en p_1, p_2 y m? Si la respuesta es no, entonces diga si al menos una de las hermanas está mejor con este π_m dados π_1 y π_2, o si en realidad su respuesta depende de alguna condición adicional no especificado en el ejercicio hasta aquí.

7. (15 puntos) Suponga que el padre de las mellizas decide incrementar m pero de modo diferenciado: a Alicia le dará $m \cdot (1 + \pi_A)$ y a Beatriz $m\cdot\,(1 + \pi_B)$. Para realizar esto, entonces él contrata sus servicios ya que los valores de π_A y de π_B no pueden tomar cualquier valor. Él desea incrementarle a Alicia el ingreso de m a $m \cdot (1 + \pi_A)$ de modo tal que una vez que Alicia recibe este último monto de ingreso su nivel de utilidad es el mismo que previamente al incremento en precios; lo mismo se aplica a Beatrix con respecto al valor de π_B.Dadas estas restricciones, obtenga cuál debe ser π_A y cuál π_B para que verifiquen esas condiciones.

8. (15 puntos) Suponga que definimos la tasa de inflación relevante para un consumidor como aquella a la cual los ingresos nominales de ese consumidor debe incrementarse para mantener su utilidad (maximizada) en un mismo nivel ante incrementos en los precios p_1 y p_2.Dada su respuesta en el punto anterior, ¿existe en este caso una única tasa de inflación relevante? Si la respuesta es no, explique qué es lo que las diferencia en este caso.

Soluciones sugeridas

1. (10 puntos) El problema de cada hermana i de elección de la canasta óptima dados (p_1, p_2, m) es

$$\max_{\left(x_1^i, x_2^i\right)} \left(x_1^i\right)^{\alpha_i} \left(x_2^i\right)^{1-\alpha_i} \text{ sujeto a } p_1 x_1^i + p_2 x_2^i \leq m$$

2. (10 puntos) Las condiciones de primer orden de cada consumidora son simplemente

$$\alpha_i \left(x_1^i\right)^{\alpha_i - 1} \left(x_2^i\right)^{1-\alpha_i} = \lambda^i p_1;\ (1 - \alpha_i) \left(x_1^i\right)^{\alpha_i} \left(x_2^i\right)^{-\alpha_i} = \lambda^i p_2$$

$$p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = m$$

donde λ^i es el multiplicador de Lagrange asociado al problema planteado en el primer punto, reconociendo que en la solución $\lambda^i > 0$.

3. (10 puntos) Del punto anterior despejamos x_1^{i*} y x_2^{i*} como función de p_1, p_2 y m de la siguiente manera: de las dos primeras condiciones de primer orden sabemos que

$$\left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right)\frac{\left(x_1^i\right)^{\alpha_i-1}\left(x_2^i\right)^{1-\alpha_i}}{\left(x_1^i\right)^{\alpha_i}\left(x_2^i\right)^{-\alpha_i}}=\left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right)\frac{x_2^i}{x_1^i}=\frac{p_1}{p_2}$$

con lo cual

$$p_2x_2^i=\left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right)p_1x_1^i$$

y reemplazando en la restricción presupuestaria:

$$p_1x_1^i\left(1+\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right)=\frac{p_1x_1^i}{\alpha_i}=m$$

entonces

$$x_1^{i*}\left(p_1,m\right)=\frac{\alpha_i m}{p_1},\text{ entonces } x_2^i\left(p_2,m\right)=\frac{\left(1-\alpha^i\right)m}{p_2}$$

La condición de segundo orden se verifica ya que se trata de preferencias Cobb-Douglas con $\alpha=\alpha_i$ y $\beta=1-\alpha_i$. Se demostró en clase que toda preferencia Cobb-Douglas satisface la condición de estricta convexidad.

4. (10 puntos) La funcion de utilidad indirecta de cada hermana i es simplemente

$$\begin{aligned}V^i\left(p_1,p_2,m\right) &= \left(x_1^{*i}\right)^{\alpha_i}\left(x_2^{*i}\right)^{1-\alpha_i}\\ &= \left(\frac{\alpha_i m}{p_1}\right)^{\alpha_i}\left(\frac{\left(1-\alpha^i\right)m}{p_2}\right)^{1-\alpha_i}\\ &= \frac{m\alpha_i^{\alpha_i}\left(1-\alpha_i\right)^{1-\alpha_i}}{p_1^{\alpha_i}p_2^{1-\alpha_i}}\end{aligned}$$

En consecuencia

$$V^A\left(p_1,p_2,m\right)=\frac{m\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}\left(\frac{4}{5}\right)^{4/5}}{p_1^{1/5}p_2^{4/5}};\ V^B\left(p_1,p_2,m\right)=\frac{m\left(\frac{3}{5}\right)^{3/5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/5}}{p_1^{3/5}p_2^{2/5}}$$

5. (15 puntos) Suponiendo a partir de este punto hasta el final del ejercicio que los precios de cada bien son $p_1\cdot(1+\pi_1)$ y $p_2\cdot(1+\pi_2)$ respectivamente, con $\pi_1>0$ y $\pi_2>0$, si m no varía, entonces cada una de las dos hermanas se encuentra peor (desde el punto de vista de su utilidad) con este incremento de precios pues

$$V^i\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m\right)=\frac{m\alpha_i^{\alpha_i}\left(1-\alpha_i\right)^{1-\alpha_i}}{\left(p_1\cdot(1+\pi_1)\right)^{\alpha_i}\left(p_2\cdot(1+\pi_2)\right)^{1-\alpha_i}}$$

Pero $p_1\cdot(1+\pi_1)>p_1$ y $p_2\cdot(1+\pi_2)>p_2$. Por lo tanto $\frac{1}{(p_1\cdot(1+\pi_1))^{\alpha_i}}<\frac{1}{p_1^{\alpha_i}}$ y $\frac{1}{(p_2\cdot(1+\pi_2))^{1-\alpha_i}}<\frac{1}{p_2^{1-\alpha_i}}$.En consecuencia

$$\frac{m\alpha_i^{\alpha_i}\left(1-\alpha_i\right)^{1-\alpha_i}}{\left(p_1\cdot(1+\pi_1)\right)^{\alpha_i}\left(p_2\cdot(1+\pi_2)\right)^{1-\alpha_i}}<\frac{m\alpha_i^{\alpha_i}\left(1-\alpha_i\right)^{1-\alpha_i}}{p_1^{\alpha_i}p_2^{1-\alpha_i}}=V^i\left(p_1,p_2,m\right)$$

6. (15 puntos) Siguiendo con los mismos supuestos sobre los precios, se supone ahora que el ingreso nominal es $m\left(1+\pi_m\right)$, con $\pi_m>0$ y que satisface:

$$\ln\left(1+\pi_m\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\pi_1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\pi_2\right)$$

La utilidad indirecta es ahora

$$V^i\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)=\frac{m(1+\pi_m)\,\alpha_i^{\alpha_i}(1-\alpha_i)^{1-\alpha_i}}{(p_1\cdot(1+\pi_1))^{\alpha_i}(p_2\cdot(1+\pi_2))^{1-\alpha_i}}$$

Tomando logaritmo natural tenemos que

$$\begin{aligned}
& \ln V^i\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)\\
= \; & \ln m-\alpha_i\ln p_1-(1-\alpha_i)\ln p_2+\alpha_i\ln\alpha_i+(1-\alpha_i)\ln(1-\alpha_i)\\
& +\ln(1+\pi_m)-\alpha_i\ln(1+\pi_1)-(1-\alpha_i)\ln(1+\pi_2)
\end{aligned}$$

y que

$$\ln V^i(p_1,p_2,m)=\ln m-\alpha_i\ln p_1-(1-\alpha_i)\ln p_2+\alpha_i\ln\alpha_i+(1-\alpha_i)\ln(1-\alpha_i)$$

Por lo tanto es claro que

$$\begin{aligned}
& \ln V^i\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)-\ln V^i(p_1,p_2,m)\\
= \; & \ln(1+\pi_m)-\alpha_i\ln(1+\pi_1)-(1-\alpha_i)\ln(1+\pi_2)
\end{aligned}$$

Pero $\ln(1+\pi_m)=\frac{1}{2}\ln(1+\pi_1)+\frac{1}{2}\ln(1+\pi_2)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \ln V^i\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)-\ln V^i(p_1,p_2,m)\\
= \; & \frac{1}{2}\ln(1+\pi_1)+\frac{1}{2}\ln(1+\pi_2)-\alpha_i\ln(1+\pi_1)-(1-\alpha_i)\ln(1+\pi_2)\\
= \; & \left(\frac{1}{2}-\alpha_i\right)\ln(1+\pi_1)+\left(\frac{1}{2}-(1-\alpha_i)\right)\ln(1+\pi_2)
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
& \ln V^A\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)-\ln V^A(p_1,p_2,m)\\
= \; & \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\ln(1+\pi_1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\right)\ln(1+\pi_2)\\
= \; & \frac{3}{10}\ln(1+\pi_1)-\frac{3}{10}\ln(1+\pi_2)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \ln V^B\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)-\ln V^B(p_1,p_2,m)\\
= \; & \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)\ln(1+\pi_1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)\ln(1+\pi_2)\\
= \; & -\frac{1}{10}\ln(1+\pi_1)+\frac{1}{10}\ln(1+\pi_2)
\end{aligned}$$

Esto implica que con este incremento de m para π_1 y π_2 distintos entre sí no es cierto que Alicia **y** Beatriz obtendrán **ambas** un nivel de utilidad igual o mayor que antes del incremento en p_1, p_2 y m.Si π_1 y π_2 fuesen iguales entonces las dos hermanas obtendrían un nivel de utilidad indirecta igual bajo la configuración (p_1,p_2,m) que bajo la configuración $\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)$. Claramente, si $\pi_1>\pi_2$ entonces Alicia estará mejor y Beatriz peor bajo la configuración $(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),$ relativo a (p_1,p_2,m). Si $\pi_1<\pi_2$ entonces es Beatriz quien está mejor y Alicia la que está peor bajo la configuración $\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_m)\right)$ relativo a (p_1,p_2,m).

7. (15 puntos) Alicia recibe $m\cdot(1+\pi_A)$ tal que

$$V^A\left(p_1\cdot(1+\pi_1),p_2\cdot(1+\pi_2),m(1+\pi_A)\right)=V^A(p_1,p_2,m)$$

o bien

$$\frac{m(1+\pi_A)\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}\left(\frac{3}{5}\right)^{3/5}}{(p_1\cdot(1+\pi_1))^{1/5}(p_2\cdot(1+\pi_2))^{3/5}}=\frac{m\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}\left(\frac{3}{5}\right)^{3/5}}{p_1^{1/5}p_2^{3/5}}$$

Simplicando términos la igualdad anterior es idéntica a

$$\frac{1+\pi_A}{(1+\pi_1)^{1/5}(1+\pi_2)^{3/5}}=1$$

o bien

$$\pi_A=(1+\pi_1)^{1/5}(1+\pi_2)^{3/5}-1$$

Similarmente, Beatriz recibe un ingreso $m\cdot(1+\pi_B)$ tal que

$$\frac{m(1+\pi_B)\left(\frac{3}{5}\right)^{3/5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/5}}{(p_1\cdot(1+\pi_1))^{3/5}(p_2\cdot(1+\pi_2))^{2/5}}=\frac{m\left(\frac{3}{5}\right)^{3/5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/5}}{p_1^{3/5}p_2^{2/5}}$$

y simplificando la igualdad anterior es idéntica a

$$\frac{(1+\pi_B)}{(1+\pi_1)^{3/5}(1+\pi_2)^{2/5}}=1$$

o bien

$$\pi_B=(1+\pi_1)^{3/5}(1+\pi_2)^{2/5}-1$$

8. (15 puntos) Si se define la tasa de inflación relevante para la hermana $i\in\{A,B\}$ como aquella a la cual los ingresos nominales de ella debe incrementarse para mantener su utilidad (maximizada) en un mismo nivel ante incrementos en los precios p_1 y p_2,que la tasa de inflación relevante para A es esencialmente el valor de π_A obtenido en el punto previo, mientras que para B es el valor de π_B. Entonces sólo existe en este caso una única tasa de inflación relevante si $\pi_1=\pi_2\equiv\pi$, en cuyo caso $\pi_A=\pi_B=\pi$. Si π_1 es distinto de π_2 entonces π_A es distinta de π_B y por lo tanto no existe una ùnica tasa de inflación relevante. La diferencia radica en que π_A y π_B depende de las preferencias de A y B respectivamente: en este sentido es que si los precios nominales aumentan pero no de manera totalmente uniforme, la inflación que es relevante para una no lo es para la otra hermana debido a que las canastas óptimas entre ellas son distintas.

Primer Cuatrimestre 2008 UBA. Parcialito

Un artículo recientemente publicado en el diario La Nación (10/03/08) en la sección 2 se titula "Hasta el 50% de lo que paga el consumidor se va en impuestos". El mismo menciona un informe del IERAL (Instituto de Investigaciones dependiente de la Fundación Mediterránea) que cuantifica el peso de los impuestos al realizar compras de distintos bienes de consumo. Por ejemplo, "*Entre los productos alimenticios, el informe del Ieral concluye que las carnes costarían entre el 86,9 y el 89,1% de su precio de no existir los impuestos. Una situación similar se da en el caso de las frutas, verduras y legumbres: entre el 12 y el 13% de los valores de venta corresponden a los recursos fiscales.*" Una pregunta que puede surgir inmediatamente es si esta es una manera "eficiente" de recaudar impuestos (en este caso el concepto de eficiencia se relaciona con el bienestar de los consumidores que pagan estos impuestos). El siguiente ejercicio constituye una ilustración de este problema. Suponga un consumidor que recibe un ingreso de m pesos y consume sólo dos bienes: bola de lomo y tomates. Sea x_1 y x_2 los kilos de lomo y los kilos de tomates consumidos en una canasta (x_1,x_2). Sea p_1 y p_2 los precios sin impuestos, y sea τ_1 y τ_2 las alícuotas de los impuestos ad-valorem que este consumidor debe obtener. (Según lo que afirma el informe del IERAL estas dos alícuotas debvieran estar cerca de $0,12$ o $0,13$.) Esto signfica que el consumidor debe pagar una proporción τ_1 (en conceptos de impuestos) del VALOR del gasto en bola de lomo (valuado a precios sin impuestos), y lo mismo se aplica con respecto a τ_2 por impuestos al gasto en tomates. Suponga que $\tau_1\neq\tau_2$. Este consumidor posee preferencias definidas sobre las canastas (x_1,x_2) que satisfacen los axiomas conocidos y puede re'resentarse por la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

1. (10 puntos) Plantee el problema de este consumidor.

2. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden correspondientes al problema planteado arriba. Argumente sin necesidad de demostrar que se verifican la condición de segundo orden.

3. (10 puntos) De las condiciones de primer orden obtenga la demanda marshalliana por cada uno de los dos bienes.

4. (10 puntos) Obtenga la utilidad indirecta como función, entre otras variables, de m, p_1, p_2, τ_1 y τ_2.

5. (10 puntos) Suponga ahora que el Estado, en lugar de cobrar impuestos por compras de bola de lomo y tomate, decidiese suprimir estos impuestos y reemplazarlo por un impuesto sobre la renta (nominal) cuya alícuota es τ_m. Vuelva a plantear el problema del consumidor en este caso.

6. (10 puntos) Obtenga nuevamente las condiciones de primer orden y luego de las mismas obtenga las expresiones de las demandas marshallianas.

7. (10 puntos) Obtenga nuevamente la utilidad indirecta para este caso.

8. (15 puntos) Suponga que τ_m es tal que la recaudación total bajo el segundo régimen impositivo es la misma que bajo el primero. Obtenga el valor de τ_m que satisfaga esta condición. Llamemoslo τ_m^1. Bajo esta alícuota: ¿el consumidor está mejor o peor bajo el segundo régimen impositivo que bajo el primero?

9. (15 puntos) Suponga ahora que τ_m es tal que el consumidor está igual (desde la perspectiva de sus preferencias) bajo el segundo régimen impositivo que bajo el primero. Llamemos a este valor de la alícuota τ_m^2. Con esta alícuota: ¿obtiene el Estado de parte de este consumidor una recaudaciópn mayor o menor bajo el segundo régimen que bajo el primero?

Soluciones sugeridas

1. (10 puntos) El problema de este consumidor es

$$\max_{(x_1,x_2)} x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \text{ sujeto a } p_1\left(1+\tau_1\right)x_1 + p_2\left(1+\tau_2\right)x_2 \leq m$$

En rigor, ya que $0<\alpha<1$ estas preferencias se encuentran incluidas en la familia de funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas y por lo tanto de las demostraciones vistas en clase la solución de este problema implica que la restricción se verifica con igualdad.

2. (10 puntos) El lagrangiano correspondiente al problema planteado en el punto 1 es

$$L = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} + \lambda\left(m - p_1\left(1+\tau_1\right)x_1 - p_2\left(1+\tau_2\right)x_2\right)$$

Las condiciones de primer orden correspondientes al problema planteado arriba son:

$$\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1\left(1+\tau_1\right) = 0;\ \left(1-\alpha\right)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} - \lambda p_2\left(1+\tau_2\right) = 0$$

$$m - p_1\left(1+\tau_1\right)x_1 - p_2\left(1+\tau_2\right)x_2 = 0$$

La condición de segundo orden se verifica ya que, según las demostraciones vistas en clase, toda función de utilidad Cobb-Douglas satisface el axioma de estricta convexidad.

3. (10 puntos) De las dos condiciones de primer orden obtenemos como es de costumbre:

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha x_2}{\left(1-\alpha\right)x_1} = \frac{p_1\left(1+\tau_1\right)}{p_2\left(1+\tau_2\right)}$$

ya que en la solución del problema $\lambda^M > 0$. Por lo tanto $x_2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{p_1(1+\tau_1)}{p_2(1+\tau_2)}x_1$.Reemplazando esta relación en la restricción presupuestaria y despejando x_1 llegamos a que

$$x_1^M = \frac{\alpha m}{p_1\left(1+\tau_1\right)}$$

y por lo tanto

$$x_2^M = \frac{\left(1-\alpha\right)m}{p_2\left(1+\tau_2\right)}$$

4. (10 puntos) La utilidad indirecta es

$$\begin{aligned} V\left(p_1\left(1+\tau_1\right), p_2\left(1+\tau_2\right), m\right) &= \left(\frac{\alpha m}{p_1\left(1+\tau_1\right)}\right)^{\alpha}\left(\frac{\left(1-\alpha\right)m}{p_2\left(1+\tau_2\right)}\right)^{1-\alpha} \\ &= \frac{m\alpha^{\alpha}\left(1-\alpha\right)^{1-\alpha}}{\left(p_1\left(1+\tau_1\right)\right)^{\alpha}\left(p_2\left(1+\tau_2\right)\right)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

5. (10 puntos) El problema del consumidor ahora es

$$\max_{(x_1,x_2)} x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \text{ sujeto a } p_1x_1+p_2x_2 \leq \left(1-\tau_m\right)m$$

6. (10 puntos) El Lagrangiano en este caso es:

$$L = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} + \lambda\left(m\left(1-\tau_m\right)-p_1x_1-p_2x_2\right)$$

Las condiciones de primer orden son

$$\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0;\ \left(1-\alpha\right)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0$$

$$m\left(1-\tau_m\right) - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

De las dos condiciones de primer orden obtenemos como es de costumbre:

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha x_2}{\left(1-\alpha\right)x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

ya que en la solución del problema $\lambda^M > 0$. Por lo tanto $x_2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{p_1}{p_2}x_1$.Reemplazando esta relación en la restricción presupuestaria y despejando x_1 llegamos a que las expresiones de las demandas marshallianas son:

$$x_1^{M\prime} = \frac{\alpha m\left(1-\tau_m\right)}{p_1}$$

y

$$x_2^{M\prime} = \frac{\left(1-\alpha\right)m\left(1-\tau_m\right)}{p_2}$$

7. (10 puntos) La utilidad indirecta para este caso es simplemente:

$$\begin{aligned} V\left(p_1, p_2, m\left(1-\tau_m\right)\right) &= \left(\frac{\alpha m\left(1-\tau_m\right)}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\left(1-\alpha\right)m\left(1-\tau_m\right)}{p_2}\right)^{1-\alpha} \\ &= \frac{m\left(1-\tau_m\right)\alpha^{\alpha}\left(1-\alpha\right)^{1-\alpha}}{p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

8. (15 puntos) Si τ_m es tal que la recaudación total bajo el segundo régimen impositivo es la misma que bajo el primero entonces

$$\begin{aligned} \tau_m^1 m &= \tau_1p_1x_1^M + \tau_2p_2x_2^M = \frac{\alpha m\tau_1p_1}{p_1\left(1+\tau_1\right)} + \frac{\left(1-\alpha\right)m\tau_2p_2}{p_2\left(1+\tau_2\right)} \\ &= \frac{\alpha m\tau_1}{\left(1+\tau_1\right)} + \frac{\left(1-\alpha\right)m\tau_2}{\left(1+\tau_2\right)} \end{aligned}$$

Es decir

$$\tau_m^1 = \frac{\alpha\tau_1}{\left(1+\tau_1\right)} + \frac{\left(1-\alpha\right)\tau_2}{\left(1+\tau_2\right)}$$

Dados los valores de $\alpha = \frac{1}{4}$, $\tau_1 = \frac{1}{10}$ y $\tau_2 = \frac{1}{5}$ entonces

$$\tau_m^1 = \frac{1}{4}\frac{0.1}{1.1} + \frac{3}{4}\frac{0.2}{1.2} = \frac{1}{44} + \frac{1}{8} = 0.147727$$

Bajo esta alícuota: la utilidad indirecta es

$$\frac{0,852272727m\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}}{p_1^{\frac{1}{4}}p_2^{\frac{3}{4}}}$$

mientras que en el régimen impositivo que implica impuesto al consumo la utilidad indirecta es

$$\frac{m\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}}{(p_1)^{\frac{1}{4}}(p_2)^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{(1.1)^{1/4}(1.2)^{3/4}}$$

Pero $0,852272727 > \frac{1}{(1.1)^{1/4}(1.2)^{3/4}} = 0,851659302$. Por lo tanto el consumidor está mejor bajo el segundo régimen impositivo que bajo el primero.

9. (15 puntos) Si ahora τ_m es tal que el consumidor está igual (desde la perspectiva de sus preferencias) bajo el segundo régimen impositivo que bajo el primero entonces

$$\frac{m\left(1-\tau_m^2\right)\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} = \frac{m\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}{(p_1(1+\tau_1))^\alpha(p_2(1+\tau_2))^{1-\alpha}}$$

o bien

$$\left(1-\tau_m^2\right) = \frac{1}{(1+\tau_1)^\alpha(1+\tau_2)^{1-\alpha}} = \frac{1}{(1.1)^{1/4}(1.2)^{3/4}} = 0,851659302$$

y por lo tanto

$$\tau_m^2 = 0,148340698$$

Con esta alícuota el Estado de parte de este consumidor obtiene una recaudación de $0,148340698m$ pesos. Con el régimen basado en impuesto al consumo la recaudación es

$$\begin{aligned}
\tau_1 p_1 x_1^M + \tau_2 p_2 x_2^M &= \frac{\alpha m \tau_1 p_1}{p_1(1+\tau_1)} + \frac{(1-\alpha)m\tau_2 p_2}{p_2(1+\tau_2)} \\
&= \frac{\alpha m \tau_1}{(1+\tau_1)} + \frac{(1-\alpha)m\tau_2}{(1+\tau_2)} = \left(\frac{(1/4)(1/10)}{1.1} + \frac{(3/4)(1/5)}{1.2}\right)m \\
&= 0,147727273m
\end{aligned}$$

el cual es menor que la recaudación obtenida en el régimen de impuestos sobre los ingresos.

Segundo Cuatrimestre 2008 UBA. Parcialito

El viernes 19 de setiembre de 2008 apareció una nota en El Cronista titulado "La crisis de EE.UU. afectará a la próxima temporada de turismo" (pág. 18). En el mismo se menciona una afirmación de Antonio Falcone, presidente de la JURCA (la cámara que nuclea a las aerolìneas internacionales), quien dijo que "*el turismo siempre es muy sensible a la actividad económica, ya sea positiva o negativa. Nosotros nos vemos afectados exponencialmente*". Este ejercicio intenta entender mediante una aplicación de la teoría del consumidor este tipo de comportamientos de demanda de servicios turísticos. Considere un agente en Europa, quien recibe una dotación de $H > 0$ horas, parte de las cuales puede consumir como ocio, mientras que el resto de las horas son ofrecidas como trabajo. Sea w el salario por hora de trabajo medido en euros. Además de consumir ocio, consume otros dos bienes: por un lado, un "combo" de servicios turísticos, medido en horas, y denotado como T; por el otro, un agregado de otros bienes de consumo denotado como c. El precio del combo de servicios turísticos es p medido en euros, mientras que el precio de c es 1 (por lo tanto c se mide en euros directamente). Este consumidor europeo posee preferencias que satisfacen los axiomas básicos vistos en clase, que están representadas por la siguiente función de utilidad

$$U((l,T),c) = [\min\{l,T\}]^{1/2} + \eta c^{1/2}$$

con $\eta < \frac{1}{2}$.

1. (15 puntos) Escriba la restricción presupuestaria de este consumidor.

2. (10 puntos) Plantee el problema del consumidor escribiendo cuidadosamente cada uno de sus elementos

3. (15 puntos) Dada cualquier cantidad c de bienes, ¿qué relación se debe cumplir entre l y T en la canasta óptima?

4. (15 puntos) Reemplace la relación anterior en la restricción presupuestaria, y luego reemplace la misma en la función de utilidad. Escrinba entonces el problema del consumidor como función de una única variable.

5. (15 puntos) Del problema planteado en el punto anterior obtenga la demanda óptima por el ocio, y luego la de los servicios turísticos.

6. (5 puntos) Si lo que dice Falcone es cierto, esto significaría que la relación entre el salario w como indicador de actividad y la demanda por servicios turísticos es exponencial. ¿Se ccumple esta relación en este ejercicio? Justifique su respuesta.

7. (10 puntos) De su respuesta del punto 5, compute la derivada de la demanda óptima por los servicios turísticos con respecto al salario y también con respecto al precio de los servicios turísticos en euros.

8. (15 puntos) Suponga que efectivamente se observa en octubre de 2008 que la demanda por servicios turísticos se reduce. ¿Afirmaría usted que la razón fue la consecuencia de la crisis financiera en los salarios de los trabajadores o que la misma se debió a la inflación en euros de servicios turísticos en Argentina, o no podría distinguirlos? Justifique su respuesta.

Soluciones sugeridas

1. (15 puntos) La restricción presupuestaria de este consumidor es simplemente

$$c + pT = w\,(H - l)$$

2. (10 puntos) El problema del consumidor se plantea del siguiente modo

$$\max_{l,T,c} \left\{ [\min\{l,T\}]^{1/2} + \eta c^{1/2} \right\} \text{ sujeto a } c + pT = w\,(H - l)\,,\ l \in [0, H]$$

3. (15 puntos) Dada cualquier cantidad c de bienes, la relación que se debe cumplir entre l y T en la canasta óptima es que $l = T$. La razón para esta afirmación es que, sea cual sea c, la parte de la función de utilidad $\min\{l,T\}$ muestra que el consumidor considera a l y T como complementos perfectos, consumiendo a ambos bienes en proporciones iguales. (Si l fuese menor estrictamente a T, al consumidor le convendría reducir marginalmente su consumo de T y aumentar marginalmente el de l de modo tal que la restricción presupuestaria se mantenga con igualdad y en ese caso $\min\{l,T\}$ se incrementaría. El argumento opuesto se presentaría si $l > T$).

4. (15 puntos) Reemplazando $l = T$ en la restricción presupuestaria, tenemos que

$$c = wH - l\,(w + p)$$

y luego, reemplazando esta última igualdad en la función de utilidad, el problema del consumidor queda así:

$$\max_{l\in[0,H]} \left\{ [l]^{1/2} + \eta\,(wH - l\,(w + p))^{1/2} \right\}$$

5. (15 puntos) Suponiendo que en la canasta óptima $l^m \in (0, H)$ entonces la demanda óptima por el ocio se obtiene de la condición de primer orden:

$$\frac{1}{2} l^{-1/2} - \frac{\eta}{2}\,(w + p)\,(wH - l\,(w + p))^{-1/2} = 0$$

Por las dudas: nótese que si derivamos con respecto a l por segunda vez, la derivada segunda es

$$-\frac{1}{4}l^{-3/2}-\frac{\eta}{4}(w+p)^2(wH-l(w+p))^{-3/2}$$

que es claramente estrictamente negativo (con lo cual la función a maximizar es estrictamente cóncava y por lo tanto de la condición de primer orden se obtiene el máximo de la función). La demanda óptima por el ocio es entonces

$$(wH-l(w+p))^{1/2}=\eta(w+p)l^{1/2}$$

o elevando al cuadrado a ambos lados:

$$wH-l(w+p)=\eta^2(w+p)^2 l$$

Despejando l llegamos a $l^m(w,p,H)$

$$l^m(w,p,H)=\frac{wH}{(w+p)\left[\eta^2(w+p)+1\right]}$$

y dado que $T=l$ en la canasta óptima entonces la demanda marshalliana de los servicios turísticos es

$$T^m(w,p,H)=\frac{wH}{(w+p)\left[\eta^2(w+p)+1\right]} \tag{3}$$

6. (5 puntos) Claramente, si la relación entre el salario w como indicador de actividad y la demanda por servicios turísticos fuese exponencial debería verse una relación así:

$$T^m(w,p,H)=\Phi(p,H)e^{\alpha w}+\Lambda(p,H)$$

para algún $\alpha>0$, y alguna función Φ y otra Λ. Sin embargo, la función T^m obtenida en este ejercicio (expresión 3) claramente no posee esta propiedad.

7. (10 puntos) Computamos primero la derivada de la demanda óptima por los servicios turísticos con respecto al salario:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^m}{\partial w} &= H\left[\frac{(w+p)\left[\eta^2(w+p)+1\right]-w\left[\eta^2(w+p)+1+\eta^2(w+p)\right]}{(w+p)^2\left[\eta^2(w+p)+1\right]^2}\right]\\
&= H\left[\frac{(w+p)^2\eta^2+(w+p)-w\left[2\eta^2(w+p)+1\right]}{(w+p)^2\left[\eta^2(w+p)+1\right]^2}\right]\\
&= H\left[\frac{(w+p)^2\eta^2+(w+p)-w\left[2\eta^2(w+p)+1\right]}{(w+p)^2\left[\eta^2(w+p)+1\right]^2}\right]\\
&= H\left[\frac{w^2\eta^2+p^2\eta^2+2wp\eta^2+(w+p)-2\eta^2w^2-2\eta^2wp-w}{(w+p)^2\left[\eta^2(w+p)+1\right]^2}\right]\\
&= H\left[\frac{p^2\eta^2+p-\eta^2w^2}{(w+p)^2\left[\eta^2(w+p)+1\right]^2}\right]
\end{aligned}$$

Nótese que el numerador es positivo si y sólo si

$$\eta<\frac{\sqrt{p\left(1+p\eta^2\right)}}{w}$$

Pero sabíamos que $\eta<\frac{1}{2}$, por lo tanto, si

$$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{p\left(1+p\eta^2\right)}}{w}$$

entonces $\frac{\partial T^m}{\partial w} > 0$. La derivada con respecto al precio de los servicios turísticos en euros es

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^m}{\partial p} &= wH\left[\frac{-\left[\eta^2(w+p)+1+\eta^2(w+p)\right]}{(w+p)^2\left[\eta^2(w+p)+1\right]^2}\right]\\ &= -wH\left[\frac{2\eta^2(w+p)+1}{(w+p)^2\left[\eta^2(w+p)+1\right]^2}\right]\end{aligned}$$

que es claramente negativo.

8. (15 puntos) Dado que la cantidad de servicios turísticos se reduce, la posibilidad de identificar el origen de esta caída en T depende de alguna información adicional. Si supiéramos que η es tal que $\eta > \frac{\sqrt{p(1+p\eta^2)}}{w}$, entonces podríamos adjudicar la caída en T a un incremento en p,ya que la desigualdad $\eta > \frac{\sqrt{p(1+p\eta^2)}}{w}$ implicaría que T^m aumentaría si w se reduce, y no al revés. Pero si supieramos que $\eta < \frac{\sqrt{p(1+p\eta^2)}}{w}$ (o en su defecto, que al menos $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{p(1+p\eta^2)}}{w}$), en este caso tanto un incremento en p como una disminución en w implicaría una reducción en T^m, haciendo imposible entonces una identificación puramente cualitativa del origen de la caída en T.

Otoño 2009 UdeSA. Parcialito

En un artículo publicado el 23 de marzo de 2009 en el Suplemento Económico del diario La Nación, (pág. 3) firmada por Oliver Galak y titulado "Cambio de hábitos por la crisis", aparece una infografía[1] proveniente de los resultados de una encuesta realizada por la consultora Identidad + Estrategia (I+E). Según esta encuesta (que incluyó unas 500 respuestas), el 31% de los encuestados afirmó que "cambió a segundas marcas" como consecuencia de la crisis. Este ejercicio intenta racionalizar semejante decisión sin apelar al concepto de "bienes inferiores" que normalmente implica la derivación de demandas marshallianas algebraicamente engorrosas. El ejercicio supone que un consumidor individual que recibe un ingreso en pesos igual a $m > 0$ consume dos bienes, 1 y 2. Sin embargo, para cada bien, existen dos marcas distintas: las dos marcas para el bien 1 se llaman A_1 y B_1, mientras que las marcas para el bien 2 se llaman A_2 y B_2.Este consumidor puede consumir unidades de cada marca y bien, siendo x_{A_l} y x_{B_l} (con $l = 1, 2$) la notación para las cantidades consumidas de las marcas A_l y B_l respectivamente. La característica esencial es que este consumidor tiene que elegir uno de dos lugares de compra: dos supermercados. El supermercado H sólo vende bienes 1 y 2 de marcas A_1 y A_2 respectivamente, mientras que el supermercado L sólo vende bienes 1 y 2 de marcas B_1 y B_2 respectivamente. Suponemos que el consumidor sólo puede ir a uno de los dos supermercados (esto es, no va a comprar cantidades positivas en ambos supermercados) ya que el costo de transporte es demasiado grande para ir a ambos supermercados. Cuando va a uno de estos supermercados, esto implica que la cantidad consumida de las marcas que este supermercado no vende es automáticamente cero. Este consumidor vive al lado del supermercado L y a unas cuadras del H. Esto hace que, si eligiese ir al supermercado H, tenga el consumidor que perder más tiempo, lo cual no es deseado por el consumidor. Todo esto se captura a través de la función de utilidad que, suponemos, refleja sus preferencias:

$$U\left(x_{A_1}, x_{A_2}, x_{B_1}, x_{B_2}\right) = \left[ax_{A_1} + x_{B_1}\right]^{\alpha} \cdot \left[bx_{A_2} + x_{B_2}\right]^{1-\alpha} - \phi \cdot 1_H \tag{4}$$

donde $a > 1$, $b > 1$, $\phi > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Aquí 1_H es una función que tiene la siguiente característica:

$$1_H = \begin{cases} 1 \text{ si elige el supermercado } H \\ 0 \text{ si elige el supermercado } L \end{cases} \tag{5}$$

Los precios de las marcas son $\left(p_{A_1}, p_{A_2}, p_{B_1}, p_{B_2}\right)$, y suponemos que

$$\left(\frac{a}{p_{A_1}}\right)^{\alpha}\left(\frac{b}{p_{B_1}}\right)^{1-\alpha} > \frac{1}{\left(p_{B_1}\right)^{\alpha}\left(p_{B_2}\right)^{1-\alpha}} \tag{6}$$

[1] Para quien le interese ver la infografía on-line puede acceder al mismo en la dirección http://www.lanacion.com.ar/herramientas/galeria-infografias/infografias.asp?nota_id=1111288&multimedio_id=27473&multimediofile_id=

1. (10 puntos) Plantee el problema de este consumidor si elige ir al supermercado H.

2. (10 puntos) Obtenga las demandas marshallianas por los bienes y marcas relevantes cuando va al supermercado H. (Nota: dado el tipo de función de utilidad, si recuerda los casos vistos en clase, usted podría directamente dar la respuesta sin tener que derivar las funciones invocando el caso correspondiente visto en clase, el cual debe ser explícitamente citado).

3. (10 puntos) Obtenga la función de utilidad indirecta dado que elige ir al supermercado H, llamándolo V^H.

4. (10 puntos) Plantee el problema de este consumidor si elige ir al supermercado L.

5. (10 puntos) Obtenga las demandas marshallianas por los bienes y marcas relevantes cuando va al supermercado L. (Aplicando la misma nota que en el apartado 2)

6. (10 puntos) Obtenga la función de utilidad indirecta dado que elige ir al supermercado L, llamándolo V^L.

7. (5 puntos) Obtenga la diferencia $V^H - V^L$.

8. (15 puntos) Obtenga el límite de $V^H - V^L$ cuando $m \to 0$ y diga también a dónde tiende $V^H - V^L$ cuando $m \to \infty$. Demuestre que, dado los supuestos del ejercicio, $\frac{\partial(V^H - V^L)}{\partial m} > 0$ para todo $m > 0$. Utilizando el teorema del valor intermedio[2], concluya entonces que existe un único valor de m, llamado m^*, tal que $V^H - V^L = 0$, y diga qué signo tiene $V^H - V^L$ cuando $m < m^*$.

9. (20 puntos) Dado el resultado anterior, escriba **en no más de cinco renglones** una interpretación de lo que se publicó en el diario **utilizando las implicancias del punto 8 únicamente**.

Soluciones sugeridas

1. (10 puntos) El problema de este consumidor si elige ir al supermercado H es simplemente

$$\max_{(x_{A_1}, x_{A_2})} [a x_{A_1}]^{\alpha} \cdot [b x_{A_2}]^{1-\alpha} - \phi \text{ sujeto a } p_{A_1} x_{A_1} + p_{A_2} x_{A_2} = m$$

   pues si va al supermercado H debe ser cierto que $x_{B_1} = x_{B_2} = 0$.

2. (10 puntos) Estas preferencias corresponden a las de una función de utilidad Cobb-Douglas (nótese que el término $a^{\alpha} b^{1-\alpha}$ es una constante que no altera la TMS entre x_{A_1} y x_{A_2}) con $\beta = 1 - \alpha$. Por lo tanto, según lo visto en clase tenemos que las demandas marshallianas por los bienes y marcas relevantes cuando va al supermercado H son

$$x^*_{A_1} = \frac{\alpha m}{p_{A_1}},\ x^*_{A_2} = \frac{(1-\alpha)\, m}{p_{A_2}}$$

3. (10 puntos) La función de utilidad indirecta dado que elige ir al supermercado H es:

$$V^H = \frac{a^{\alpha} b^{1-\alpha}}{(p_{A_1 o})^{\alpha} (p_{A_2})^{1-\alpha}} \left(m \alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha} \right) - \phi$$

4. (10 puntos) El problema de este consumidor si elige ir al supermercado L es simplemente:

$$\max_{(x_{B_1}, x_{B_2})} [x_{B_1}]^{\alpha} \cdot [x_{B_2}]^{1-\alpha} \text{ sujeto a } p_{B_1} x_{B_1} + p_{B_2} x_{B_2} = m$$

   pues si va al supermercado L debe ser cierto que $x_{A_1} = x_{A_2} = 0$.

[2] Para este ejercicio, la versión del teorema del valor intermedio relevante para este ejercicio dice lo siguiente: sea $f(x)$ con $x \in [0, \infty)$. Si $f(x)$ es continua, estrictamente creciente, con $\lim_{x \to 0} f(x) < 0$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) > 0$, entonces existe un único $x^* \in (0, \infty)$ tal que $f(x^*) = 0$.

5. (10 puntos) Las demandas marshallianas por los bienes y marcas relevantes cuando va al supermercado L dado que se trata de una función de utilidad Cobb-Douglas con $\beta = 1 - \alpha$, según lo visto en clase, deben ser iguales a

$$x^*_{B_1} = \frac{\alpha m}{p_{B_1}},\ x^*_{B_2} = \frac{(1-\alpha)\, m}{p_{B_2}}$$

6. (10 puntos) La función de utilidad indirecta dado que elige ir al supermercado L es

$$V^L = \frac{1}{(p_{B_{1^o}})^{\alpha} (p_{B_2})^{1-\alpha}} \left(m\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}\right)$$

7. (5 puntos) La diferencia $V^H - V^L$ es

$$V^H - V^L = \left(m\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}\right) \left[\frac{a^{\alpha} b^{1-\alpha}}{(p_{A_{1^o}})^{\alpha} (p_{A_2})^{1-\alpha}} - \frac{1}{(p_{B_{1^o}})^{\alpha} (p_{B_2})^{1-\alpha}}\right] - \phi$$

8. (15 puntos) El límite de $V^H - V^L$ cuando $m \to 0$ es

$$\lim_{m\to 0} \left\{\left(m\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}\right) \left[\frac{a^{\alpha} b^{1-\alpha}}{(p_{A_{1^o}})^{\alpha} (p_{A_2})^{1-\alpha}} - \frac{1}{(p_{B_{1^o}})^{\alpha} (p_{B_2})^{1-\alpha}}\right] - \phi\right\} = -\phi < 0$$

y el límite de $V^H - V^L$ cuando $m \to \infty$ es

$$\lim_{m\to 0} \left\{\left(m\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}\right) \left[\frac{a^{\alpha} b^{1-\alpha}}{(p_{A_{1^o}})^{\alpha} (p_{A_2})^{1-\alpha}} - \frac{1}{(p_{B_{1^o}})^{\alpha} (p_{B_2})^{1-\alpha}}\right] - \phi\right\} = +\infty$$

pues por el supuesto del ejercicio $\left[\frac{a^{\alpha} b^{1-\alpha}}{(p_{A_{1^o}})^{\alpha} (p_{A_2})^{1-\alpha}} - \frac{1}{(p_{B_{1^o}})^{\alpha} (p_{B_2})^{1-\alpha}}\right] > 0$. Por otra parte,

$$\frac{\partial \left(V^H - V^L\right)}{\partial m} = \left(\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}\right) \left[\frac{a^{\alpha} b^{1-\alpha}}{(p_{A_{1^o}})^{\alpha} (p_{A_2})^{1-\alpha}} - \frac{1}{(p_{B_{1^o}})^{\alpha} (p_{B_2})^{1-\alpha}}\right] > 0 \text{ para todo } m > 0$$

pues $\left(\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}\right) > 0$ y $\left[\frac{a^{\alpha} b^{1-\alpha}}{(p_{A_{1^o}})^{\alpha} (p_{A_2})^{1-\alpha}} - \frac{1}{(p_{B_{1^o}})^{\alpha} (p_{B_2})^{1-\alpha}}\right] > 0$. En consecuencia, la función $V^H - V^L$ es continuamente diferenciable en m, estrictamente creciente en m, y verifica que cuando m tiende a cero $V^H - V^L$ tiende a un númoero negativo y cuando m es suficientemente alto $V^H - V^L$ es positivo. Por el teorema del valor intermedio, existe un único valor de m, llamado m^*, tal que $V^H - V^L = 0$. Dado que $\frac{\partial\left(V^H - V^L\right)}{\partial m} > 0$, claramente cuando $m < m^*$ entonces $V^H - V^L$ es negativo.

9. (20 puntos) Para interpretar el párrafo podemos decir que, mientras no haya crisis, m es mayor o igual a m^* y por lo tanto los consumidores eligen ir a supermercados que venden exclusivamente marcas de alta calidad. Cuando sobreviene la crisis, m se reduce a un valor menor que m^*y por lo tanto al consuidor ahora le conviene ir al supermercado que vende solamente marcas de baja calidad en lugar del otro supermercado.

Otoño 2009 UdeSA. Parcial

El día 21 de abril de 2009, en su edición electrónica, el diario El Cronista publicó una breve nota según la cual el secretario general de la CGT, Hugo Moyano, afirmaba que:

"...en el encuentro que mantuvo ayer con la presidenta Cristina Fernández se habló sobre la necesidad de aumentar el seguro por desempleo y destacó que no sólo es importante tener en cuenta los despidos colectivos sino también los individuales."

De hecho, existe un viejo debate (todavía no saldado) acerca de la conveniencia o no de hacer más generoso el seguro contra el desempleo, debido a los posibles efectos sobre los incentivos a la búsqueda de nuevos trabajos para los desempleados. Entre otras cuestiones este tema ha discutido si un sistema laboral à la europea (con una cobertura de desempleo más generosa) es peor o mejor (y en qué sentido) que el sistema laboral à la americana (menos generosa). Este ejercicio se focalizará más bien en estudiar el comportamiento de un consumidor-trabajador sobre elección de trabajar al salario ofrecido en el presente o descartarlo, buscando un trabajo para el futuro, y en qué medida un seguro de desempleo puede influir sobre decisiones de búsqueda laboral.

Considere un consumidor-trabajador que vive dos períodos, fechados como $t = 0, 1$. En el período $t = 0$ recibe una dotación de $H > 0$ horas, parte de las cuales puede consumir como ocio y el resto de las horas trabajarlas, si es que acepta trabajar en $t = 0$ al salario $w_0 > 0$. Si acepta esta oferta laboral, el trabajador entonces queda en este trabajo hasta el final del período $t = 1$ cobrando en ese período el mismo sueldo por hora w_0. En cada período el trabajador decide canastas de ocio y consumo de otros bienes en cada período t, (l_t, c_t), con $t = 0, 1$ (las preferencias se describen más abajo).

Sin embargo, el trabajador puede descartar esta oferta salarial en $t = 0$ y quedar desempleado en ese mismo período. En ese caso, el gobierno le otorga un seguro de desempleo $\phi_0 \in \left(0, w_0^2\right)$ y en ese mismo período $t = 0$ usa parte de su tiempo para buscar trabajo. Sea e la cantidad de horas que el trabajador usa para buscar trabajo. A esa altura la búsqueda de un nuevo trabajo (para el siguiente período) puede resultar en un *éxito*, en cuyo caso suponemos que encuentra un empleo (válido para $t = 1$) cuyo salario por hora (también en $t = 1$) es $w_1 > w_0$, o en un $fracaso$, en cuyo caso no encuentra trabajo para $t = 1$ y por lo tanto vuelve a quedar desempleado, en cuyo caso el gobierno le paga un seguro de desempleo $\phi_1 \in \left(0, w_0^2\right)$. La probabilidad de éxito está dada por

$$\pi(e) \equiv \frac{\alpha e}{e + 1} \tag{7}$$

donde α es un parámetro entre 0 y 1. Luego, el trabajador que quedó desocupado en $t = 0$ entra al período $t = 1$ con una dotación H de horas. En caso de haber encontrado trabajo en $t = 1$ (al salario w_1) el trabajador debe elegir la combinación óptima de ocio y consumo de otros bienes en el período $t = 1$. En cada período, de quedar desempleado, su consumo de ocio es automáticamente igual al total de tiempo disponible.

Las preferencias del consumidor satisfacen axiomas de modo tal de que se representen a través de una función de utilidad:

$$U(l_0, c_0, l_1, c_1) = u(l_0, c_0) + u(l_1, c_1) \tag{8}$$

donde

$$u(l_t, c_t) = l_t + c_t^{1/2}, \ t = 0, 1 \tag{9}$$

En este caso suponemos que no existe ni banco ni ninguna otra institución que permita el ahorro o préstamo de los consumidores-trabajadores.

1. (10 puntos) Plantee el problema del consumidor-trabajador que en el período $t = 0$ elige trabajar al salario w_0 en ambos períodos.

2. (10 puntos) Obtenga las condiciones de primer orden del problema planteado en (1). Argumente sin demostrar formalmente en dos renglones máximo que se verifican las condiciones de segundo orden.

3. (10 puntos) De las condiciones anteriores obtenga la cantidad óptima de ocio y la del consumo de otros bienes en el caso de elegir trabajar al salario w_0 en ambos períodos. Obtenga luego la utilidad indirecta *total* cuando elige trabajar al salario w_0 en ambos períodos.

4. (10 puntos) Suponga ahora (por el momento) que el trabajador elige quedar desempleado en $t = 0$. Suponga (también por ahora) que en $t = 1$ obtuvo el empleo de $t = 1$ al salario w_1. Sin hacer ningún cálculo adicional obtenga la cantidad óptima de ocio y de consumo de otros bienes (ayuda: utilice lo que obtuvo en los apartados (2) y (3) para responder esta pregunta).

5. (10 puntos) Obtenga la utilidad indirecta del trabajador desocupado dado que obtuvo el empleo de $t = 1$. Luego escriba la utilidad indirecta del mismo trabajador desocupado dado que **no** obtuvo el empleo de $t = 1$.

6. (10 puntos) Escriba la utilidad **esperada** indirecta para $t = 1$ desde la perspectiva del trabajador desocupado que gasta una cierta cantidad de tiempo e en $t = 0$ en buscar trabajo.
7. (10 puntos) Dado el valor de e, utilizando la expresión obtenida en el apartado (6) y los datos del ejercicios, escriba la utilidad total del trabajador que elige estar desocupado en $t = 0$ como función de e y de otras variables.
8. (10 puntos) Plantee el problema del consumidor-trabajador que elige no aceptar el salario w_0 en $t = 0$ y elige quedar desocupado. Luego obtenga la condición de primer orden.
9. (10 puntos) De su respuesta en (7) obtenga el valor de e^* que resuelve el problema planteado en (8). Luego, reemplácelo en la función obtenida en el apartado (7) para obtener la utilidad indirecta del trabajador que elige estar desocupado.
10. (10 puntos) Escriba la desigualdad que hace que el trabajador elija quedar desocupado en $t = 0$, suponiendo que en caso de indiferencia el trabajador elige trabajar al salario w_0.

Soluciones sugeridas

1. (10 puntos) El problema del consumidor-trabajador que en el período $t = 0$ elige trabajar al salario w_0 en ambos períodos es simplemente

$$\max_{l_t \in [0,H]} \; l_t + \left(w_0\left(H - l_t\right)\right)^{1/2}, \; t = 0, 1 \tag{10}$$

2. (10 puntos) La condición de primer orden del problema planteado en (1) es

$$1 - \frac{w_0^{1/2}}{2\left(H - l_t\right)^{1/2}} = 0, \; t = 0, 1 \tag{11}$$

Las condiciones de segundo orden se verifican ya que se trata de preferencias cuasilineales, las cuales se mostraron en los ejercicios de tutoriales que son estrictamente convexas.

3. (10 puntos) De la condición (11) tenemos que:

$$1 = \frac{w_0^{1/2}}{2\left(H - l_t\right)^{1/2}}$$

y multiplicando en cruz tenemos

$$\left(H - l_t\right)^{1/2} = \frac{w_0^{1/2}}{2}$$

y luego elevando al cuadrado:

$$H - l_t = \frac{w_0}{4}$$

La cantidad óptima de ocio es

$$l_t^E = H - \frac{w_0}{4} \tag{12}$$

y la del consumo de otros bienes es

$$c_t^E = w_0\left[\frac{w_0}{4}\right] \tag{13}$$

La utilidad indirecta *total* es:

$$V^E = 2\left(H - \frac{w_0}{4} + \left(\frac{w_0^2}{4}\right)^{1/2}\right) = 2\left(H + \frac{w_0}{4}\right)$$

4. (10 puntos) Dado que el problema de este trabajador en este caso es totalmente análogo al del problema planteado en (10) entonces se puede, del apartado anterior, deducir que la cantidad óptima de ocio en $t = 1$ es

$$l_1^{U,W} = H - \frac{w_1}{4} \tag{14}$$

y la de consumo de otros bienes es

$$c_1^{U,W} = w_1 \left(\frac{w_1}{4}\right) = \frac{w_1^2}{4} \tag{15}$$

5. (10 puntos) La utilidad indirecta del trabajador desocupado dado que obtuvo el empleo de $t = 1$ es entonces

$$V_1^{U,W} = H - \frac{w_1}{4} + \left(\frac{w_1^2}{4}\right)^{1/2} = H + \frac{w_1}{4} \tag{16}$$

y la utilidad indirecta del mismo trabajador desocupado dado que **no** obtuvo el empleo de $t = 1$ es simplemente

$$V_1^{U,U} = H + (\phi_1)^{1/2} \tag{17}$$

6. (10 puntos) La utilidad **esperada** indirecta para $t = 1$ desde la perspectiva del trabajador desocupado que gasta una cierta cantidad de tiempo e en $t = 0$ en buscar trabajo es:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha e}{e+1}\right)\left(H + \frac{w_1}{4}\right) + \left(1 - \left(\frac{\alpha e}{e+1}\right)\right)\left(H + (\phi_1)^{1/2}\right) \\ = \quad & H + (\phi_1)^{1/2} + \left(\frac{\alpha e}{e+1}\right)\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

7. (10 puntos) Dado el valor de e, utilizando la expresión obtenida en el apartado (6) y los datos del ejercicio, la utilidad total del trabajador que elige estar desocupado en $t = 0$ es:

$$(H - e) + (\phi_0)^{1/2} + H + (\phi_1)^{1/2} + \left(\frac{\alpha e}{e+1}\right)\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right) \tag{19}$$

donde $(H - e)$ es el ocio que le queda por consumir al trabajador desocupado en $t = 0$ que elige gastar e horas en buscar un nuevo trabajo, y donde los tres últimos sumandos constituye la utilidad esperada desde la perspectiva de $t = 0$ de lo que obtiene en $t = 1$.

8. (10 puntos) El problema del consumidor-trabajador que elige no aceptar el salario w_0 en $t = 0$ y elige quedar desocupado es (ignorando el término $(\phi_0)^{1/2} + H + (\phi_1)^{1/2}$ en la expresión (19) que claramente no depende de e)

$$\max_{0 \le e \le H} \left\{ H - e + \left(\frac{\alpha e}{e+1}\right)\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right) \right\} \tag{20}$$

La condición de primer orden es

$$\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)\left(\frac{\alpha}{(e+1)^2}\right) = 1 \tag{21}$$

9. (10 puntos) De la ecuación (21) despejamos el valor de e^*:

$$(e+1)^2 = \alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$e^* = \sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} - 1 \tag{22}$$

Nótese que el nivel de esfuerzo óptimo para el trabajador que eligió no aceptar w_0 es decreciente en ϕ_1, es decir, decreciente en el subsidio que obtiene en $t = 1$ si queda sin trabajo. Este es el típico efecto que se discute en la literatura: subsidios futuros más generosos pueden incidir negativamente en el incentivo a poner esfuerzo en buscar trabajo. Reemplazando e^* en la función (19) obtenemos la utilidad indirecta del trabajador que elige estar desocupado:

$$\begin{aligned} V^U &= H + 1 - \sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} + (\phi_0)^{1/2} + H + \\ &\quad (\phi_1)^{1/2} + \left(\frac{\alpha\left(\sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} - 1\right)}{\sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)}}\right)\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right) \\ &= 2H + 1 + (\phi_0)^{1/2} + (\phi_1)^{1/2} + \left[\sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} - 1 - 1\right]\sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} \\ &= 2H + 1 + (\phi_0)^{1/2} + (\phi_1)^{1/2} + \sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)}\left[\sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} - 2\right] \qquad (23) \end{aligned}$$

10. (10 puntos) La desigualdad que hace que el trabajador elija quedar desocupado en $t = 0$ es

$$\begin{aligned} & 2H + 1 + (\phi_0)^{1/2} + (\phi_1)^{1/2} + \sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)}\left[\sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} - 2\right] \\ > \; & 2\left(H + \frac{w_0}{4}\right) = 2H + \frac{w_0}{2} \end{aligned}$$

o bien

$$1 + (\phi_0)^{1/2} + (\phi_1)^{1/2} + \sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)}\left[\sqrt{\alpha\left(\frac{w_1}{4} - (\phi_1)^{1/2}\right)} - 2\right] > \frac{w_0}{2} \qquad (24)$$

Esta condición establece que en la medida que el salario por hora sea menor a la expresión de la izquierda, que es creciente en el subsidio de desempleo de $t = 0$, el trabajador eligirá rechazar el salario w_0. Nótese que la expresión de la izquierda no es estrictamente creciente en ϕ_1.