INTRODUÇÃO

À

LÓGICA MATEMÁTICA

Prof. Antonio A. Pinho

Rio de Janeiro

Julho de 1999

ÍNDICE

I. INTRODUÇÃO

1. Lógica Formal.

Embora existam muitas definições para o campo de estudo da lógica, essas definições não diferem essencialmente umas das outras; há um certo consenso entre os autores de que a Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade.

Embora tenham sido encontrados na Índia, textos sobre esse assunto, escritos em épocas remotas, é tradicionalmente aceito que a Lógica tenha nascido na Grécia Antiga, por volta do século IV antes de Cristo. Os primeiros trabalhos sobre Lógica são devidos a Parmênides, Zenão, e ao grupo conhecido como "sofistas", mas o verdadeiro criador da Lógica é, sem dúvida, Aristóteles, pois foi ele quem sistematizou e organizou esse conhecimento, elevando-o à categoria de ciência. Em sua obra chamada Organum (que, em tradução livre, significa "ferramenta") Aristóteles estabeleceu princípios tão gerais e tão sólidos que dominou o pensamento ocidental durante dois mil anos, e até hoje são considerados válidos.

Aristóteles tinha como objetivo a busca da verdade, e, para isso, procurava caracterizar os instrumentos de que se servia a razão, nessa busca. Em outras palavras, Aristóteles se preocupava com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos. Caberia, pois, à Lógica, a formulação de leis gerais de encadeamentos de conceitos e juízos que levariam à descoberta de novas verdades.

Essa forma de encadeamento é chamado, em Lógica, de argumento, enquanto as afirmações envolvidas são chamadas proposições; um argumento é, pois, um conjunto de proposições tal que se afirme que uma delas é derivada das demais; usualmente, a proposição derivada é chamada conclusão, e as demais, premissas. Em um argumento válido, as premissas são consideradas provas evidentes da verdade da conclusão.

Eis um exemplo de argumento:

Se eu ganhar na Loteria, serei rico
Eu ganhei na Loteria
Logo, sou rico

Como a conclusão "sou rico" é uma decorrência lógica das duas premissas, esse argumento é considerado válido.

É preciso deixar claro que a Lógica se preocupa com o relacionamento entre as premissas e a conclusão, com a estrutura e a forma do raciocínio, e não com seu conteúdo, isto é, com as proposições tomadas individualmente. Em outras palavras, não é objeto da Lógica saber se quem ganha na Loteria fica rico ou não, ou se eu ganhei ou não na Loteria. O objeto da Lógica é determinar se a conclusão é ou não uma conseqüência lógica das premissas. Por esse motivo, por que o objeto da Lógica é a forma pela qual o raciocínio está estruturado, a Lógica costuma receber o nome de Lógica Formal.

A validade do argumento está diretamente ligada à forma pela qual ele se apresenta, como pode ser mostrado pelo enunciado abaixo,

Se eu ganhar na Loteria, serei rico
Não ganhei na Loteria
Logo, não sou rico

que, embora seja semelhante ao anterior, tem outra forma, e, nessa forma, a conclusão não se segue logicamente das premissas, e, portanto, não é um argumento válido.

2. Dedução e Indução.

A Lógica dispõe de duas ferramentas principais que podem ser utilizadas pelo pensamento na busca de novos conhecimentos: a dedução e a indução, que dão origem a dois tipos de argumentos, dedutivos e indutivos. Os argumentos dedutivos pretendem que suas premissas forneçam uma prova conclusiva da veracidade da conclusão. Um argumento dedutivo é válido quando suas premissas, se verdadeiras, fornecem provas convincentes para sua conclusão, isto é, quando for impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa; caso contrário, o argumento dedutivo é dito inválido. Os dois argumentos citados anteriormente são do tipo dedutivo, o primeiro válido e o segundo inválido.

Os argumentos indutivos, por outro lado, não pretendem que suas premissas forneçam provas cabais da veracidade da conclusão, mas apenas que forneçam indicações dessa veracidade. Veja um exemplo de argumento indutivo:

Joguei uma pedra no lago, e a pedra afundou;
Joguei outra pedra no lago e ela também afundou;
Joguei mais uma pedra no lago, e também esta afundou;
Logo, se eu jogar uma outra pedra no lago, ela vai afundar.

Os termos “válidos” e “inválidos” não se aplicam aos argumentos indutivos; eles costumam ser avaliados de acordo com a maior ou menor possibilidade com que suas conclusões sejam estabelecidas.

Costuma-se dizer que os argumentos indutivos partem do particular para o geral, isto é, a partir de observações particulares, procura estabelecer regras gerais, que, no caso das ciências naturais, devem ser provadas por outros meios; os argumentos dedutivos, por seu lado, partem de regras gerais para estabelecer a veracidade de acontecimentos particulares. O desenvolvimento da ciência tem dependido, em grande parte, da habilidade em combinar os dois tipos de raciocínio.

3. Lógica Clássica e Lógica Simbólica.

Os argumentos formulados em uma linguagem natural, como o inglês ou português, são, muitas vezes, de difícil avaliação, principalmente por causa da ambigüidade inerente às linguagens naturais, e das construções às vezes vagas ou confusas dos termos. Em virtude desses fatos, a partir dos trabalhos de George Boole, em meados do século XIX, foram sendo utilizados cada vez mais símbolos de origem matemática para expressar os enunciados e raciocínios da Lógica. A Lógica apresentada dessa forma é chamada Lógica Matemática ou Lógica Simbólica, enquanto a Lógica baseada em linguagem natural é chamada Lógica Clássica.

À medida que a Lógica Simbólica desenvolve sua própria linguagem técnica, vem se tornando um instrumento cada vez mais poderoso para a análise e a dedução dos argumentos. A utilização de uma simbologia matemática ajuda a expor, com maior clareza, as estruturas lógicas das proposições e dos argumentos, que podem não ficar suficientemente claras se expressas em linguagem natural.

Uma outra vantagem da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica é a possibilidade de utilização de recursos computacionais no tratamento de enunciados e argumentos; os computadores digitais se mostram bastante adequados à manipulação de símbolos, enquanto apresentam extrema dificuldade no tratamento de linguagem natural. Em 1965, um pesquisador chamado Robinson desenvolveu um procedimento computacional para a dedução, chamado Resolução, evidenciando as vantagens da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica.

4. Proposições e Predicados.

Muitas das idéias envolvidas nos argumentos podem ser apresentadas através de proposições (também chamados enunciados ou sentenças) que se referem a um objeto; por exemplo, "eu ganhei na Loteria", "José atirou uma pedra no lago", "Sócrates é um homem". Tais proposições são chamadas singulares.

Existem outras proposições, no entanto, que fazem referência a conjuntos de objetos; por exemplo, "todos os homens são mortais", "alguns astronautas foram à Lua", "nem todos os gatos caçam ratos".

Os termos "homens", "astronautas" e "gatos" são conceitos; não se referem a nenhum homem, astronauta ou gato em particular, mas sim ao conjunto de propriedades que faz com que um objeto esteja em uma categoria ou em outra. Tais propriedades são chamadas predicados.

Como a Lógica que trata apenas das proposições singulares é mais simples que a que trata também com conjuntos de objetos, os autores preferiram separar o estudo da Lógica Matemática em duas partes: o Cálculo Proposicional, ou Lógica Sentencial, que se ocupa das proposições singulares, e o Cálculo de Predicados, ou Lógica dos Predicados, que trata dos conjuntos de objetos e suas propriedades.

Para tratar com objetos e suas propriedades, o Cálculo de Predicados apresenta dois conceitos matemáticos, a variável, para se referir a um objeto genérico de uma categoria, e os quantificadores, expressões como "para todo" e "existe algum" para se referirem à quantidade de objetos que partilham o mesmo predicado; assim a proposição "todos os homens são mortais" assume a forma "para todo x, se x é um homem, então x é mortal" e as proposições "alguns astronautas foram à Lua" e "nem todos os gatos caçam ratos" assumem respectivamente as formas "existe um x tal que x é um astronauta e x foi à Lua" e "existe um x tal que x é um gato e x não caça ratos".

Quando as variáveis e quantificadores se referem apenas aos objetos, o Cálculo de Predicados também é chamado Lógica de Primeira Ordem; mas podemos pensar em uma situação na qual as variáveis e quantificadores se refiram também aos predicados; por exemplo, considere o enunciado "existe um predicado que todas as pessoas possuem", que pode ser expressa por "existe um p tal que p é um predicado e tal que para todo x, se x é uma pessoa, x possui p"

Quando as variáveis e quantificadores se referem também aos predicados, como na expressão acima, temos o que chamamos Lógica de Segunda Ordem. Um exemplo importante da Lógica de Segunda Ordem é o Principio de Indução Matemática: "se o numero 1 tiver um predicado, e o fato de n possuir esse predicado implica em que n + 1 também o possua, então o predicado se aplica a todos os números naturais".

Os predicados de primeira ordem são, pois, aqueles que se aplicam a indivíduos; de segunda ordem são aqueles que se aplicam a indivíduos e aos predicados de primeira ordem. A generalização pode prosseguir, considerando–se predicados de terceira ordem, de quarta ordem, e assim por diante, cada um deles aplicando–se aos indivíduos e aos predicados das ordens anteriores.

Em nosso curso vamos nos limitar ao Cálculo Proposicional e ao Cálculo de Predicados de Primeira Ordem.

5. Princípios da Lógica.

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio. São eles:

Principio de Identidade

O que é, é; ou seja, todo objeto é idêntico a si próprio. Isso não é um simples jogo de palavras; na verdade, é possível defender a noção oposta, de que a realidade é fluida, de que nada permanece igual a si próprio, e que qualquer raciocínio sobre objetos é uma ficção.

Princípio da Não Contradição

Um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser. Ou seja, não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo; ou ainda, de duas afirmações contraditórias, uma é necessariamente falsa.

Princípio do Terceiro Excluído

Todo objeto é ou não é. Ou seja, uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.

Sobre esses princípios repousa todo o arcabouço da Lógica Clássica. A negação de um ou mais desses princípios dá origem a outras lógicas, chamadas genericamente de Lógicas Não-Clássicas, cujas principais vertentes são:

- as lógicas modais, que incluem os conceitos de possibilidade e de necessidade, e nas quais o verbo pode ser modificado por um advérbio de modo, como nos enunciados “talvez chova amanhã”, e “certamente João saiu”;

- as lógicas plurivalentes, nas quais o conceito de veracidade deixa de ser binário (verdadeiro e falso) para assumir outros valores, como nas lógicas trivalentes, nas quais as proposições podem ser verdadeiras, falsas e neutras, nas lógicas nebulosas, em que existem gradações de veracidade e nas quais uma proposição pode ser mais verdadeira que outra, e nas lógicas probabilísticas, nas quais existe uma probabilidade de que uma proposição possa ser verdadeira;

- as lógicas fracas, como a intuicionista, que não aceita o Principio do Terceiro Excluído, e, para a qual, a dupla negação não eqüivale à afirmação, o que pode ser exemplificado pelo enunciado “não tenho nada” onde o termo “não” ao invés de se contrapor ao termo “nada” o reforça.

Nos últimos anos as lógicas não clássicas têm sofrido enorme desenvolvimento, em virtude, principalmente, de novas aplicações, algumas das quais na área computacional, como a lógica nebulosa.

6. Raciocínio Lógico.

Antes de iniciarmos o estudo sistemático da Lógica, exercitemos desde já nosso raciocínio, e apelemos ao velho e útil bom senso para resolver os seguintes problemas:

1. Se eu não tenho carro, a afirmação "meu carro não é azul" é verdadeira ou falsa ?

2. Existe um ditado popular que afirma que "toda regra tem exceção". Considerando que essa frase é, por sua vez, também uma regra, podemos garantir que é verdadeira ? Ou que é falsa ?

3. Tenho 9 pérolas idênticas, mas sei que uma delas é falsa, e é mais leve que as outras; como posso identificar a pérola falsa, com apenas duas pesagens em uma balança de dois pratos ?

4. Tenho 12 pérolas idênticas, mas uma delas é falsa e tem peso um pouco diferente das demais, não sei se mais leve ou mais pesada; como posso identificar a pérola falsa, e se ela é mais leve ou mais pesada, com apenas três pesagens em uma balança de dois pratos ?

5. Tenho 10 grupos com 10 moedas cada um; todas as moedas pesam 10 gramas cada uma, exceto as de um grupo, no qual as moedas pesam 9 gramas cada uma; como posso identificar o grupo de moedas mais leves, com apenas uma pesagem em uma balança de um prato ?

6. Durante uma expedição, um explorador encontra uma caverna com três deuses: o deus da sinceridade, que sempre fala a verdade; o deus da diplomacia, que às vezes diz a verdade, às vezes, não; e o deus da falsidade, cujas declarações são sempre mentirosas. O deus A diz: "B é o deus da sinceridade", mas o deus B retruca: "Não, eu sou o deus da diplomacia", e o deus C completa: "Nada disso, B é o deus da mentira". Afinal, quem é quem ?

7. Há muitos anos atrás, vivia em uma pequena cidade, um barbeiro, que ganhava a vida fazendo a barba dos habitantes da região. Um dia, ele ficou muito doente, e, na iminência de morrer, fez uma promessa ao santo de sua devoção: se ficasse bom, faria gratuitamente, uma vez por ano, a barba de todos os homens, e unicamente desses homens, que não fizessem sua própria barba. O barbeiro foi melhorando, melhorando, até que ficou bom; dispôs–se então a cumprir a promessa: na data aprazada, passou todo o dia barbeando os homens que não faziam sua própria barba. À noite, antes de dormir, foi se barbear, e verificou que estava diante de um impasse: se fizesse sua própria barba, estava barbeando um homem que fazia sua própria barba, o que quebrava a promessa; por outro lado, se não fizesse, estaria deixando de fazer a barba de um homem que não fazia sua própria barba, o que tambem quebrava a promessa. Você tem idéia de como sair desse impasse ?

8. Um rei resolveu dar a um prisioneiro a oportunidade de obter a liberdade. Levou–o até uma sala, com duas portas de saída, chamadas A e B, cada uma com um guarda. Disse: "Uma das portas leva à liberdade, enquanto a outra leva à fôrca; alem disso, um dos guardas fala sempre a verdade, enquanto o outro só fala mentiras. Voce pode fazer uma única pergunta a um dos guardas e escolher uma porta para sair." O prisioneiro pensou durante alguns segundos; depois, dirigiu–se a um dos guardas e disse: "Se eu perguntasse a seu companheiro qual a porta que leva à liberdade, o que ele me diria ?". Depois de alguns segundos, o guarda respondeu: "A". "Obrigado", disse o prisioneiro, e passou pela porta B. O prisioneiro obteve a liberdade ou foi para a fôrca ? Como saber ?

9. Um outro rei resolveu dar a três prisioneiros uma oportunidade de obter a liberdade. Mandou vir três chapéus brancos e dois vermelhos, e escolheu um chapéu para cada prisioneiro;

ganharia a liberdade aquele que fosse capaz de dizer a cor de seu próprio chapéu, observando unicamente a cor dos chapéus de seus companheiros. O primeiro prisioneiro observou o chapéu dos outros dois prisioneiros, mas não foi capaz de dizer a cor de seu próprio chapéu e voltou para a prisão; o segundo, à sua vez, após observar os chapéus dos outros prisioneiros também não soube dizer que cor tinha seu chapéu, e também voltou para a prisão. O rei, ao perceber que o terceiro prisioneiro era cego, nem ia se dar ao trabalho de perguntar, mas este insistiu que deveria ter a mesma oportunidade. Inquirido, declarou corretamente a cor de seu chapéu. Qual a cor do chapéu do prisioneiro cego, e como ele chegou à conclusão correta ?

II. CÁLCULO PROPOSICIONAL

1. Proposições Simples.

O primeiro passo na construção de uma linguagem simbólica, mais adequada à formulação dos conceitos da Lógica, é a apresentação do que chamamos proposição simples. Em linhas gerais, uma proposição simples (ou enunciado, ou sentença), é uma declaração que exprime um pensamento com sentido completo.

São exemplos de proposições simples:

A Lua é um satélite da Terra.
Sócrates é um homem.
Eu estudo Lógica.
Todos os homens são mortais.

Em geral, as proposições simples são constituídas por um sujeito, um verbo, e seus complementos. Proposições como “se não chover, vou à praia”, ou “vou aprender a dirigir e comprar um carro” são chamadas proposições compostas, e são o resultado de operações sobre proposições simples, como veremos a seguir.

Alem das proposições, a Lógica dispõe de uma função, chamada “valor lógico” (representada por VL), que associa a cada proposição simples um de dois valores lógicos, chamados “verdadeiro” (representado por V) ou falso (representado por F). Geralmente, o valor lógico V ou F é associado à proposição, em consonância com o significado da proposição no mundo real, embora isso não seja essencial.

Com esse sentido podemos dizer que as proposições

A Lua é o satélite da Terra.
Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil.

são verdadeiras, isto é assumem o valor lógico V, e que as proposições

Dante escreveu Os Lusíadas.
O Brasil é uma monarquia.

são claramente falsas, e portanto assumem o valor lógico F.

O objetivo da Lógica, no entanto, não é verificar se as proposições são verdadeiras ou falsas; ao invés disso, o objeto de estudo da Lógica é examinar o relacionamento entre as proposições, em decorrência dos seus valores lógicos. Dito de outra forma, a Lógica não se interessa pelo significado das proposições, mas apenas por sua forma; no que concerne à Lógica, uma proposição como “A Lua é o satélite da Terra” pode ser tratada como “a proposição p”, não sendo necessário nenhuma referência a conhecimentos de astronomia.

De acordo com os Princípios da Lógica, podemos afirmar que:

Toda proposição é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo outra possibilidade.
Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa simultaneamente.
Toda proposição verdadeira é sempre verdadeira, não podendo ser ora verdadeira ora falsa.

Em linguagem simbólica, costumamos representar as proposições simples pelas letras p, q, r, s, t, etc. Assim, se fizermos as seguintes representações:

p – A Lua é o satélite da Terra.
q – Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil.
r – Dante escreveu Os Lusíadas.
s – O Brasil é uma monarquia.

podemos escrever:

VL [p] = V VL [q] = V VL [r] = F VL [s] = F

2. Proposições Compostas. Conectivos.

As proposições compostas são obtidas combinando proposições simples através de certos termos chamados conectivos. A Lógica dispõe de cinco conectivos: "e", "ou", "não", "se – então", e "se e somente se". Utilizando esses conectivos podemos construir as seguintes proposições compostas:

João é magro e José é alto.
Mário foi ao cinema, João foi ao teatro e Marcelo ficou em casa.
Maria foi à praia ou ao mercado.
Mário foi ao cinema ou Marcelo ficou em casa.
A Lua não é o satélite da Terra.
Se a chuva continuar a cair, então o rio vai transbordar.
Se João estudar, será aprovado.
João será aprovado se e somente se estudar.

Em Lógica Simbólica, a ação de combinar proposições é chamada "operação", e os conectivos são chamados "operadores", e são representados por símbolos específicos; apresentamos abaixo as cinco operações lógicas, com seus respectivos conectivos e símbolos:

Operação	Conectivo	Símbolo
Conjunção	e	$\wedge$
Disjunção	ou	$\vee$
Negação	não	$\neg$ ou ~
Condicional	se ... então	$\rightarrow$
Bicondicional	se e somente se	$\leftrightarrow$

Como podemos determinar o valor lógico de uma proposição composta, em função dos valores lógicos das proposições que a compõe ?

Para responder a essa pergunta, temos que definir as operações, isto é, dar o resultado da operação para cada possível conjunto de valores dos operandos.

Conjunção

Se p e q são proposições, a expressão $p \wedge q$ é chamada conjunção de p e q, e as proposições p e q são chamadas fatores da expressão. Se conhecermos o valor verdade dos fatores de uma conjunção, o que podemos dizer do valor verdade da conjunção ? Ora, a expressão

João é magro e José é alto

será verdadeira unicamente no caso em que os dois fatores forem verdadeiros, isto é, se João for magro e José for alto; se um dos dois fatores (ou ambos) for falso, a conjunção é falsa.

O valor lógico do resultado da operação de conjunção pode ser apresentado através da tabela abaixo, onde p e q são proposições quaisquer:

p	**q**	**$p \wedge q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

Às vezes, a língua portuguesa encerra alguma ambigüidade no uso do conectivo "ou"; a utilização de "ou" entre dois fatos indica que um deles é verdadeiro, mas pode não deixar claro se ambos o são; normalmente, na linguagem natural, procura-se resolver a ambigüidade utilizando-se o contexto. Por exemplo, na frase

Maria foi à praia ou ao mercado

parece que apenas um dos fatos é verdadeiro, pois é difícil alguém ir à praia e ao mercado simultaneamente; no entanto, se não houver exigência se simultaneidade, pode ocorrer que Maria tenha ido à praia e depois ao mercado, e ambos os fatos são verdadeiros.

O outro exemplo,

Mário foi ao cinema ou Marcelo ficou em casa

é ainda pior, pois não há nenhuma indicação se apenas um ou os dois fatos ocorreram. Como na Lógica não são permitidas ambigüidades, foi necessário definir dois conectivos para o termo "ou": o "ou inclusivo", onde se permite que um dos fatos ou ambos ocorram, e o "ou exclusivo" onde um e apenas um dos fatos ocorrem.

Se p e q são proposições, a expressão $p \vee q$ é chamada disjunção inclusiva de p e q; por seu turno, a disjunção exclusiva das expressões p e q é indicada por $p \mid q$; em ambos os casos, as proposições p e q são chamadas parcelas da expressão.

Em que condições a expressão

Maria foi à praia ou ao mercado

é verdadeira ? No conceito inclusivo do conectivo "ou" basta que Maria tenha ido pelo menos um dos lugares; ou seja, para que uma disjunção inclusiva seja verdadeira, basta que uma das parcelas (ou ambas) o seja; unicamente se ambas as parcelas forem falsas, a disjunção inclusiva o será.

Por outro lado, se se tratar de uma disjunção exclusiva, a expressão só será verdadeira se Maria tiver ido a um dos lugares, mas não ao outro. A disjunção exclusiva será verdadeira se uma das parcelas for verdadeira e a outra falsa; se ambas as parcelas tiverem o mesmo valor lógico, a disjunção exclusiva será falsa. Em nosso texto, trataremos unicamente da disjunção inclusiva; isto é, o termo “disjunção” se referirá à disjunção inclusiva; quando se tratar da disjunção exclusiva, isso será expressamente citado.

Abaixo, a tabela que apresenta o resultado da operação de disjunção inclusiva; p e q são proposições quaisquer.

p	**q**	**$p \vee q$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Na forma textual, às vezes escrevemos um “ou” antes da frase, às vezes omitimos parte da expressão, mas isso não altera a forma simbólica; por exemplo, a expressão “Ou Maria foi ao teatro ou foi ao cinema” fica representada por $p \vee q$, onde p representa “Maria foi ao teatro” e q representa “Maria foi ao cinema” .

Negação

Se p é uma proposição, a expressão $\neg$ p é chamada negação de p. Claramente, a negação inverte o valor verdade de uma expressão; se p for verdadeira, $\neg$ p é falsa, enquanto que se p for falsa, $\neg$ p é verdadeira. A tabela da operação de negação é muito simples, e é apresentada abaixo, onde p é uma proposição qualquer.

p	**$\neg p$**
V	F
F	V

Então, se a expressão “Maria foi ao cinema” é representada por p, expressões como “Maria não foi ao cinema” ou “É falso que Maria tenha ido ao cinema” ficam representadas por $\neg$ p.

Condicionamento

Considere a proposição

Se a chuva continuar a cair, então o rio vai transbordar

Esta é uma proposição composta pelas duas proposições “a chuva continuar a cair” e “o rio vai transbordar”, ligadas pelo conectivo “se ... então”. Em Lógica Simbólica este conectivo é chamado “condicional” e representado pelo símbolo $\rightarrow$.

Então, se p e q são proposições, a expressão $p \rightarrow q$ é chamada condicional de p e q; a proposição p é chamada antecedente, e a proposição q conseqüente da condicional. A operação de condicionamento indica que o acontecimento de p é uma condição para que q aconteça. Como podemos estabelecer o valor verdade da proposição condicionada, conhecidos os valores verdade do antecedente e do conseqüente ?

Considere novamente a expressão citada. Suponha que ambas as coisas aconteçam, isto é, que a chuva tenha continuado a cair, e o rio tenha transbordado; nesse caso, a condicional é verdadeira. Suponha, por outro lado, que a chuva tenha continuado a cair, mas que o rio não tenha transbordado; nesse caso, p não foi condição para q, isto é, a condicional é falsa. Finalmente, considere que a chuva não tenha continuado a cair; nesse caso, independentemente do que tenha acontecido com o rio, a condicional é considerada verdadeira.

Por que esse fato ocorre ? Por que motivo, a Lógica considera que se o antecedente for falso, a condicional é verdadeira, qualquer que seja o valor lógico do conseqüente ?

Existem vários motivos para isso, e vamos aqui apresentar o mais simples. Quando o antecedente for falso, temos quatro possibilidades para o valor lógico da condicional:

		Possibilidades da condicional			
		1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**
antecedente F	**conseqüente V**	V	V	F	F
antecedente F	**conseqüente F**	V	F	V	F

Se a Lógica adotasse a segunda possibilidade, a condicional assumiria os mesmos valores lógicos do conseqüente, independentemente do antecedente, o que não parece razoável; se assumisse a terceira, o antecedente e o conseqüente poderiam ser permutados, sem modificar o valor lógico da condicional, o que também não parece ser razoável (se o rio transbordar, a chuva vai continuar caindo).

Finalmente, se a quarta possibilidade fosse adotada, a condicional não se distinguiria da conjunção; resta então a primeira possibilidade, que é a adotada pela Lógica.

Como já dissemos, a Lógica não se preocupa com os significados das expressões, mas somente com sua forma. Podemos então considerar que a operação de condicional foi definida da forma pela qual foi apresentada, sem a preocupação de que o antecedente seja "causa" do conseqüente. Nesse sentido as condicionais

Se Dante escreveu Os Sertões então Cabral descobriu o Brasil
Se Dante escreveu Dom Casmurro então Vasco da Gama descobriu o Brasil

são ambas verdadeiras, pois em ambas o antecedente é falso.

A tabela que indica o resultado da operação de condicionamento é apresentada abaixo.

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

O conectivo "se ... então" tem vários sinônimos; se representarmos por p a frase "a chuva continuar a cair", e por q a frase "o rio vai transbordar", então $p \rightarrow q$ pode representar qualquer das expressões abaixo:

"Se a chuva continuar a cair, então o rio vai transbordar"
"Se a chuva continuar a cair, o rio vai transbordar"
"O rio vai transbordar, se a chuva continuar a cair"

"O fato de a chuva continuar a cair implica em o rio transbordar"
"A chuva continuar a cair é condição suficiente para o rio transbordar".

Bicondicionamento

Finalmente, considere a proposição

João será aprovado se e somente se ele estudar.

Nesse caso, temos duas proposições "João será aprovado" e "ele estudar", ligadas pelo conectivo "se e somente se". Em Lógica Simbólica, essa operação é chamada de "bicondicionamento", e seu conectivo é representado pelo símbolo $\leftrightarrow$.

Então, se p e q são proposições, a expressão $p \leftrightarrow q$ é chamada bicondicional de p e q. Dizemos que a bicondicional é verdadeira quando ambos os termos são verdadeiros ou ambos são falsos; quando um é falso e outro é verdadeiro, a bicondicional é falsa.

Na a expressão citada, o conectivo "se e somente se" indica que se João estudar será aprovado, e que essa é a única possibilidade de João ser aprovado, isto é, se João não estudar, não será aprovado. Os dois acontecimentos serão ambos verdadeiros ou ambos falsos, não existindo possibilidade de uma terceira opção.

A tabela do bicondicionamento é apresentada abaixo.

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Alem do "se e somente se", a operação bicondicional é indicada por termos como "unicamente se", "exceto se" e outras análogas; por exemplo, as expressões

"João será aprovado se e somente se estudar"
"João será aprovado unicamente se estudar"
"João não será aprovado, exceto se estudar"
"João estudar é condição necessária e suficiente para ser aprovado"

todas podem ser representadas por $p \leftrightarrow q$, onde p representa "João será aprovado" e q representa "João estudar".

3. Ordem de precedência das operações. Fórmulas.

Com o auxílio dos conectivos podemos construir proposições compostas mais elaboradas. Por exemplo, considere a seguinte proposição:

Se o deficit persistir e a arrecadação não aumentar, então ou aumentamos os impostos ou haverá inflação

Com a representação:

p – o deficit persistir
q – a arrecadação aumentar
r – aumentamos os impostos
s – haverá inflação

a proposição poderá ser escrita na forma simbólica:

$$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$$

A construção de expressões mais complexas, na forma simbólica, no entanto, apresenta alguns problemas; por exemplo, considere a expressão

Se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa

Sua transcrição em termos lógicos, $p \wedge q \rightarrow r$, onde

p – Mário foi ao cinema
q – João foi ao teatro
r – Marcelo ficou em casa

pode indicar duas expressões distintas:

"se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa" ou "Mário foi ao cinema, e, se João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa"

Para decidir qual proposição está sendo indicada, é necessário saber qual o conectivo que atua primeiro, se o conectivo da conjunção ou da condicional. Por esse motivo é necessário estabelecer uma hierarquia de operação dos conectivos. Tal hierarquia (ou ordem de precedência) é a seguinte:

1. $\neg$
2. $\wedge$, $\vee$
3. $\rightarrow$
4. $\leftrightarrow$

Essa ordem de precedência indica que a operação de negação é a primeira a ser executada; em seguida, as operações de conjunção e disjunção na ordem em que estiverem dispostas; depois deve ser executada a operação de condicionamento, e, por fim, a de bicondicionamento.

Em certas ocasiões, essa ordenação não é única; por exemplo, $p \vee q \rightarrow r \vee s$, tanto podemos executar primeiro a operação $p \vee q$ e, em seguida a operação $r \vee s$, como ao contrário; o resultado seria o mesmo. Mas, para tornar o processo mais determinado, com uma única ordenação, podemos convencionar o seguinte algoritmo, para obter a ordem de execução das operações:

<u>Algoritmo Ordem de Precedência</u>

Passo 1. Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de negação, na ordem em que aparecerem.

Passo 2. Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de conjunção e disjunção, na ordem em que aparecerem.

Passo 3. Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de condicionamento, na ordem em que aparecerem.

Passo 4. Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de bicondicionamento, na ordem em que aparecerem.

Dessa forma, as operações da expressão $p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$ serão executadas na seguinte ordem:

$$\begin{array}{ccccccc} p & \wedge & \neg q & \rightarrow & r & \vee & s \\ & 2 & 1 & 4 & & 3 & \end{array}$$

Um caso especial é a utilização de negações consecutivas; por exemplo, a proposição “é falso que eu não tenha saído” pode ser simbolizada por $\neg \neg p$ (onde p representa “eu tenha saído”); nesse caso, a segunda negação deve ser executada antes.

Para simplificar a determinação do valor lógico de uma expressão proposicional, podemos construir uma pequena tabela, na qual dispomos em colunas os valores lógicos das proposições componentes, e, a seguir, os valores lógicos das operações, na ordem de precedência. Por exemplo, determinar o valor lógico da expressão acima, na qual p e r são falsas, e q e s verdadeiras:

p	**q**	**r**	**s**		**$\neg$ q**	**p $\wedge \neg$ q**	**r $\vee$ s**	**p $\wedge \neg$ q $\rightarrow$ r $\vee$ s**
F	V	F	V		F	F	V	V

Para que a construção da tabela fique unicamente determinada, podemos convencionar que as proposições componentes fiquem dispostas em ordem alfabética.

Quando for necessário modificar a ordem de precedência, podemos utilizar parênteses. Assim, no exemplo dado, a expressão $p \wedge q \rightarrow r$ significa “se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa”, e a expressão $p \wedge (q \rightarrow r)$ significa “Mário foi ao cinema, e, se João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa”.

A utilização dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ pode causar ambigüidade até mesmo em linguagem natural; por exemplo a expressão

Mário foi ao cinema e Marcelo ficou em casa ou Maria foi à praia

representada por $p \wedge q \vee s$, não deixa claro seu significado; tanto pode significar “Mário foi ao cinema e Marcelo ficou em casa, ou então Maria foi à praia”, representada por $(p \wedge q) \vee s$, como pode significar “Mário foi ao cinema e ou Marcelo ficou em casa ou Maria foi à praia”, representada por $p \wedge (q \vee s)$, que são claramente afirmações distintas.

Segundo a ordem de precedência da Lógica, a expressão dada corresponde à primeira forma apresentada, mas, para evitar qualquer mal-entendido, aconselhamos a utilizar parênteses, nesses casos.

Utilizando parênteses e conectivos, as expressões simbólicas podem assumir aspectos ainda mais complexos, como, por exemplo,

$$(p \leftrightarrow q \vee (\neg r \rightarrow s)) \wedge \neg t$$

Para determinar o ordem de execução das operações no caso em que a expressão possui parênteses, podemos utilizar o algoritmo abaixo:

Algoritmo Ordem de Precedência com Parênteses

Passo 1. Percorra a expressão até encontrar o primeiro ")".
Passo 2. Volte até encontrar o "(" correspondente, delimitando assim um trecho da expressão sem parênteses.
Passo 3. Execute o Algoritmo Ordem de Precedência sobre a expressão delimitada.
Passo 4. Elimine o par de parênteses encontrado.
Passo 5. Volte ao Passo 1.

De acordo com esse algoritmo, as operações da expressão anterior seriam executadas na ordem:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (p & \leftrightarrow & q & \vee & (\neg & r & \rightarrow & s)) & \wedge & \neg & t \\ & 4 & & 3 & 1 & & 2 & & 6 & 5 & \end{array}$$

Como vimos, uma proposição composta é portanto formada por conexões de proposições simples. Ou seja, uma proposição composta é uma cadeia constituída pelos símbolos p, q, r, etc, (representando proposições simples), símbolos de conectivos e parênteses. No entanto, nem toda cadeia desses símbolos representa uma proposição composta; por exemplo, a cadeia

$$AB \leftrightarrow)\wedge\wedge\vee(C \rightarrow$$

não tem nenhum significado em Lógica. Temos então o problema de reconhecer quando uma cadeia desses símbolos representa realmente uma proposição composta. As proposições são também conhecidas por "fórmulas bem formadas" (ou, simplesmente, "fórmulas") e possuem uma lei de formação, enunciada abaixo:

1. Proposições simples são fórmulas.
2. Se p e q são fórmulas, então são também fórmulas:
   (p), $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$
3. Nada mais é fórmula

Tanto as proposições simples como as compostas são chamadas expressões proposicionais. No que se segue, por uma questão de simplicidade, utilizaremos o termo proposição para indicar uma expressão proposicional, ou seja, tanto proposições simples como compostas.

4. Construção de Tabelas Verdade.

Vimos que, dada uma expressão proposicional, e dados os valores lógicos das proposições simples que a compõe, podemos, com a ordem de precedência, calcular o valor lógico da expressão dada; no entanto, estaremos interessados, muitas vezes, no conjunto de valores lógicos que a expressão pode assumir, para quaisquer valores lógicos das proposições componentes.

Vejamos um exemplo. Considere a expressão proposicional

$$p \vee q \rightarrow p \wedge q$$

No item anterior, construímos uma pequena tabela para determinar o valor lógico da expressão, a partir dos valores lógicos dos componentes; agora, vamos ampliar aquela tabela, para incluir cada combinação dos valores lógicos dos componentes.

Na expressão, existem apenas duas proposições componentes, p e q; como cada uma pode ser verdadeira ou falsa, temos quatro possibilidades: p e q ambas verdadeiras, p verdadeira e q falsa, p falsa e q verdadeira, ou, finalmente, p e q ambas falsas.

Tendo obtido também a ordem de precedência das operações, nossa tabela assume a forma:

p	**q**		**$p \vee q$**	**$p \wedge q$**	**$p \vee q \rightarrow p \wedge q$**
V	V		V	V	V
V	F		V	F	F
F	V		V	F	F
F	F		F	F	V

Uma tabela como essa, na qual são apresentados todos os valores verdade possíveis de uma proposição composta, para cada combinação dos valores verdade das proposições componentes, é chamada Tabela Verdade da proposição composta.

Cada linha da Tabela corresponde a uma possível combinação dos valores lógicos das proposições componentes; como são dois os valores lógicos, existem, para n componentes, 2^n combinações possíveis. Portanto, a Tabela Verdade de uma expressão proposicional tem 2^n linhas, alem do cabeçalho.

Observe que a Tabela Verdade possui dois tipos de colunas: colunas para as proposições componentes (onde são distribuídos os valores V e F de forma a incluir cada possível combinação) e colunas para as operações (onde os valores V e F são obtidos pela definição das operações); assim, se a expressão possui n componentes e m operações, a Tabela terá m + n colunas.

Para determinar unicamente a Tabela Verdade, podemos estabelecer certas convenções para sua construção:

A. Para as colunas:
   1. Dispor as proposições componentes em ordem alfabética.
   2. Dispor as operações na ordem de precedência determinada pelo Algoritmo Ordem de Precedência (Com Parênteses, se for o caso).

B. Para as linhas
   1. Alternar V e F para a coluna do último componente.
   2. Alternar V V e F F para a coluna do penúltimo componente.
   3. Alternar V V V V e F F F F para a coluna do antepenúltimo componente.
   4. Prosseguir dessa forma, se houver mais componentes, sempre dobrando o numero de V's e F's para cada coluna à esquerda.

Para exemplificar, considere a expressão proposicional,

$$(p \rightarrow q) \vee \neg ((p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg r)$$

A precedência das operações é dada por:

$$(p \to q) \vee \neg ((p \leftrightarrow r) \to \neg r)$$
1 6 5 2 4 3

A Tabela Verdade assume o aspecto:

p	**q**	**r**		**p→q**	**p↔r**	**¬r**	**(p↔r) →¬r**	**¬((p ↔ r)→¬r)**	**(p → q)∨¬ ((p ↔ r) → ¬r)**
V	V	V		V	V	F	F	V	V
V	V	F		V	F	V	V	F	V
V	F	V		F	V	F	F	V	V
V	F	F		F	F	V	V	F	F
F	V	V		V	F	F	V	F	V
F	V	F		V	V	V	V	F	V
F	F	V		V	F	F	V	F	V
F	F	F		V	V	V	V	F	V

A atribuição de valores lógicos aos componentes simples de uma proposição composta é chamada uma interpretação dessa proposição. Assim, uma proposição com n componentes simples distintos admitirá 2^n interpretações.

5. Equivalência Lógica.

De acordo com os valores lógicos que as proposições compostas assumem, em suas possíveis interpretações, elas podem ser classificadas em vários tipos:

- se a expressão assume sempre o valor V, em qualquer interpretação, é chamada uma tautologia, ou uma expressão válida; são exemplos de tautologias:

  $p \vee \neg p$
  $\neg (p \wedge \neg p)$

- se a expressão assume o valor V em alguma interpretação, é dita satisfatível, ou consistente; evidentemente, as tautologias são exemplos de expressões satisfatíveis; outros exemplos são:

  $p \to \neg p$ (assume V quando p é falso)
  $p \vee q$ (assume V quando p ou q for verdadeiro)

- se a expressão assume sempre o valor F, em qualquer interpretação, é chamada uma contradição, ou uma expressão insatisfatível, ou inconsistente. São exemplos de contradições:

  $p \wedge \neg p$
  $\neg (p \vee \neg p)$

- se a expressão assume o valor F em alguma interpretação, é chamada uma expressão inválida; claramente, as contradições são, também, expressões inválidas; outras expressões inválidas são:

  $p \wedge q$ (assume F quando p for falso)
  $\neg p$ (assume F quando p for verdadeiro)

Alguns autores atribuem o nome genérico de contingências, ou expressões contingentes, às expressões satisfatíveis e inválidas.

Uma expressão proposicional da forma bicondicional $p \leftrightarrow q$ que é, também, uma tautologia, é chamada uma equivalência (ou equivalência lógica). As proposições p e q são ditas equivalentes, e escrevemos $p \Leftrightarrow q$.

Por exemplo, a expressão $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ é uma equivalência. Veja sua Tabela Verdade:

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg q$**	**$\neg p$**	**$\neg q \rightarrow \neg p$**	**$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$**
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Escrevemos, então, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Decorre imediatamente da definição que, se duas proposições são equivalentes, então possuem a mesma Tabela Verdade, e, reciprocamente, se duas proposições têm a mesma Tabela Verdade, são equivalentes. De fato, uma bicondicional é V se e somente se seus componentes têm os mesmos valores lógicos; como a expressão também é uma tautologia, é V em todos os casos; isto é, seus componentes têm o mesmo valor lógico em todos os casos, ou seja, têm a mesma Tabela Verdade.

Decorre ainda da definição que todas as tautologias, bem como todas as contradições, são equivalentes entre si.

Podemos mostrar também que a relação de equivalência possui as propriedades:

Reflexiva: $p \Leftrightarrow p$
Simétrica: Se $p \Leftrightarrow q$ então $q \Leftrightarrow p$
Transitiva: Se $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow r$ então $p \Leftrightarrow r$

Listamos abaixo algumas das equivalência mais importantes (e úteis) da Lógica; cada uma delas pode ser provada, simplesmente mostrando que a bicondicional correspondente é uma tautologia, bastando, para isso, construir sua Tabela Verdade.

Em termos textuais, duas proposições são equivalentes quando traduzem a mesma idéia, diferindo apenas a forma de apresentar essa idéia. Apresentamos abaixo algumas das principais eqüivalências da Lógica, exemplificando textualmente algumas:

Leis da Comutatividade
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Exemplo: “Fui ao teatro ou ao cinema” eqüivale a “Fui ao cinema ou ao teatro”

Leis da Associatividade
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Leis da Distributividade
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leis de De Morgan
$\neg (p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$
$\neg (p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$

Exemplo: “É falso que João tenha ido ao cinema e ao teatro” eqüivale a “Ou João não foi ao cinema ou não foi ao teatro”

Leis da Idempotência
$p \land p \Leftrightarrow p$
$p \lor p \Leftrightarrow p$

Lei da Dupla Negação
$\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$

Lei da Condicional
$p \to q \Leftrightarrow \neg p \lor q$

Exemplo: “Se continuar chovendo, o rio vai transbordar” eqüivale a “Ou pára de chover ou o rio vai transbordar”

Lei da Bicondicional
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \land (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$

Exemplo: “Um numero é divisível por 10 se e somente se terminar por zero” eqüivale a “Se um numero terminar por zero, então é múltiplo de 10, e, se for múltiplo de 10, então termina por zero”; também eqüivale a “Ou o número é múltiplo de 10 e termina em zero, ou não é múltiplo de 10 e não termina em zero”

Lei da Contraposição
$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

Exemplo: “Se João estudar, será aprovado” eqüivale a “Se João não estudar, não será aprovado”

Lei da Absorção
$p \to p \land q \Leftrightarrow p \to q$

Lei de Clavius
$\neg p \to p \Leftrightarrow p$

Lei da Refutação por Absurdo
$(p \to q) \land (p \to \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

Lei do Dilema
$(p \to q) \land (\neg p \to q) \Leftrightarrow q$

Exemplo: “Se eu for aprovado, vou viajar, e, se não for, também vou” eqüivale a “vou viajar”

Lei da Demonstração por Absurdo (onde F é uma contradição)
$p \land \neg q \to F \Leftrightarrow p \to q$

Lei de Exportação - Importação
$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r$

O conceito de equivalência nos permite mostrar ainda que são suficientes as operações de negação e uma das duas, conjunção ou disjunção, para representar qualquer expressão proposicional. Para isso, necessitamos das seguintes eqüivalências:

a) Eliminando o bicondicional: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
b) Eliminando o condicional: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
c) Escrevendo a disjunção em termos de conjunção: $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
d) Escrevendo a conjunção em termos de disjunção: $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

Veja o seguinte exemplo: escrever a proposição $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg p$ em termos de negação e disjunção:

Eliminando o condicional:
$\neg(p \leftrightarrow q) \vee \neg p$
Eliminando o bicondicional:
$\neg[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee \neg p$
Escrevendo a conjunção em termos de disjunção:
$\neg[\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)] \vee \neg p$

6. Inferência Lógica.

Uma inferência lógica, ou, simplesmente uma inferência, é uma tautologia da forma $p \rightarrow q$; a proposição p é chamada antecedente, e q, conseqüente da implicação. As inferências lógicas, ou regras de inferência, são representadas por $p \Rightarrow q$.

Da definição decorre imediatamente que $p \Rightarrow q$, se e somente se, o conseqüente q assumir o valor lógico V, sempre que o antecedente p assumir esse valor.

De fato, para que a condicional seja verdadeira, essa condição é necessária, pois, se o conseqüente for falso com o antecedente verdadeiro, a condicional não é verdadeira. Por outro lado, a condição também é suficiente, pois, quando o antecedente é falso, a condicional é verdadeira, não importando o valor lógico do conseqüente.

As regras de inferência são, na verdade, formas válidas de raciocínio, isto é, são formas que nos permitem concluir o conseqüente, uma vez que consideremos o antecedente verdadeiro; em termos textuais, costumamos utilizar o termo "logo" (ou seus sinônimos: portanto, em conseqüência, etc) para caracterizar as Regras de Inferência; a expressão $p \Rightarrow q$ pode então ser lida: p; logo, q.

É possível mostrar que as regras de inferência têm as seguintes propriedades:

Reflexiva: $p \Rightarrow p$
Transitiva: Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$, então $p \Rightarrow r$

Listamos abaixo algumas das regras de inferência mais importantes da Lógica; da mesma forma que no caso das eqüivalências, cada uma delas pode ser provada, bastando para isso construir a Tabela Verdade da condicional correspondente; se a condicional for tautológica, será uma inferência.

Vamos exemplificar com a regra de inferência conhecida por Modus Ponens:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$(p \rightarrow q) \wedge p$**	**$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$**
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

São exemplos de regras de inferência:

Regra da Adição
$p \Rightarrow p \vee q$

Exemplo: “Vou ao cinema; logo vou ao cinema ou ao teatro”

Regra da Simplificação
$p \wedge q \Rightarrow p$

Exemplo: “Fui ao cinema e ao teatro; logo fui ao cinema”

Regra da Simplificação Disjuntiva
$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Rightarrow p$

Exemplo: “Ou estudo ou trabalho; ou estudo ou não trabalho; logo, estudo”

Regra da Absorção
$p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \wedge q)$

Exemplo: “Se trabalho, ganho dinheiro; logo, se trabalho, trabalho e ganho dinheiro”

Regra do Silogismo Hipotético (ou Condicional)
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

Exemplo: “Se trabalho, ganho dinheiro, e, se ganho dinheiro, vou viajar; logo, se trabalho, vou viajar”

Regra do Silogismo Disjuntivo (ou Alternativo)
$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

Exemplo: “Ou trabalho ou estudo; não trabalho; logo, estudo”

Regra do Silogismo Conjuntivo (ou Incompatibilidade)
$\neg (p \wedge q) \wedge q \Rightarrow \neg p$

Exemplo: “É falso que eu estudo e trabalho; eu trabalho; logo, não estudo”

Dilema Construtivo
$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$

Exemplo: “Se vou à festa, fico cansado; se vejo televisão, durmo; ou vou à festa ou fico vendo televisão; logo, ou fico cansado ou durmo”

Dilema Destrutivo
$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \Rightarrow \neg p \vee \neg r$

Exemplo: “Se vou à festa, fico cansado; se vejo televisão, durmo; ou não fico cansado ou não vou dormir; logo, ou não vou à festa ou não vejo televisão”

Regra da Inconsistência (de uma contradição se conclui qualquer proposição)
$(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$

Exemplo: “O avião está voando; o avião não está voando; logo, eu sou o Rei da Inglaterra”

Modus Ponens
$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Exemplo: “Se ganhar na Loteria, fico rico; ganhei na Loteria; logo, fiquei rico”

Modus Tollens
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Exemplo: “Se ganhar na Loteria, fico rico; não fiquei rico; logo não ganhei na Loteria”

Regra da Atenuação
$p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q \vee r$

Exemplo: “Se eu ganhar na Loteria, fico rico; logo, se eu ganhar na Loteria, fico rico e vou viajar”

Regra da Retorsão
$\neg p \rightarrow p \Rightarrow p$

Exemplo: “Se eu não trabalhar, trabalho; logo, trabalho”.

III. DEDUÇÃO NO CÁLCULO PROPOSICIONAL

1. Argumentos.

Chama-se argumento a afirmação de que de um dado conjunto de proposições P_1, P_2, ... P_n chamadas premissas, decorre uma proposição Q, chamada conclusão.

Como foi visto anteriormente, existem, em Lógica, dois tipos de argumentos, dedutivos e indutivos, mas vamos nos limitar, no presente texto, a examinar os argumentos dedutivos.

Eis um exemplo de argumento:

P_1: Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime.
P_2: Se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade.
P_3: O Sr. Krasov não estava na cidade.
Q: Portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu.

O que queremos dizer com a expressão “a conclusão decorre das premissas” ? Basicamente, significa dizer que a veracidade da conclusão está incluída na veracidade das premissas; isto é, significa dizer que se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também o será. Quando a conclusão realmente decorre das premissas, dizemos que o argumento é válido; quando não, dizemos que o argumento é inválido. Os argumentos inválidos são também chamados sofismas.

Abaixo, dois exemplos de argumentos:

Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro.

A conclusão apresentada não decorre das premissas. Portanto o argumento é inválido.

Se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo. Logo, se eu estudar, durmo.

Claramente, a conclusão decorre das premissas, e o argumento é válido.

Na Lógica Simbólica, a estrutura que melhor representa um argumento, é a operação de condicionamento: um argumento é, portanto, uma condicional da forma

$$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$$

A validade do argumento depende exclusivamente do relacionamento lógico entre as premissas e a conclusão; isto é, não é ocupação da Lógica verificar se as premissas são verdadeiras. O objetivo da Lógica é verificar se, , o argumento é estruturado de forma tal que, independentemente dos valores lógicos das proposições simples envolvidas, a veracidade das premissas implica na veracidade da conclusão.

Em termos lógicos, isso significa dizer que se um argumento é válido, então a condicional que o representa é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos das proposições componentes. Em outras palavras, se um argumento é válido, a condicional que o representa é uma tautologia.

A Tabela Verdade é o método mais simples para verificar se uma forma simbólica é ou não uma tautologia, e pode ser utilizado para determinar a validade ou invalidade de um argumento; vejamos os dois exemplos apresentados:

O primeiro argumento, "se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro" pode ser representado por:

$$(p \rightarrow q \vee r) \ \wedge \ (\neg\, p) \ \rightarrow (\neg\, q \vee \neg\, r)$$

onde: p – eu tiver dinheiro
q – vou ao cinema
r – vou ao teatro

Construindo a Tabela Verdade:

p	**q**	**r**	**$q \vee r$**	**$p \rightarrow q \vee r$**	**$\neg p$**	**$\neg q$**	**$\neg r$**	**$\neg q \vee \neg r$**	**$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\neg p)$**	**$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\neg p) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$**
V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

A expressão não é uma tautologia, e, consequentemente, o argumento não é válido.

O argumento "se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo. Logo, se eu estudar, durmo", por sua vez pode ser representado por:

$$(p \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow r) \ \rightarrow \ (p \rightarrow r)$$

onde: p – eu estudar
q – eu ficar cansado
r – eu dormir

A Tabela Verdade:

p	**q**	**r**	**$p \rightarrow q$**	**$q \rightarrow r$**	**$p \rightarrow r$**	**$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$**	**$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$**
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Como a condicional é uma tautologia, o argumento é válido. Não deve ter passado despercebido ao leitor mais atento que esse argumento é, na verdade, a regra de inferência chamada Silogismo Hipotético. Qual a diferença, então, entre os argumentos válidos e as regras de inferência ? Formalmente, nenhuma. Na prática, as condicionais tautológicas com poucos antecedentes e cuja forma já é conhecida, são chamadas regras de inferência, enquanto as condicionais maiores, que ainda devemos mostrar que são tautologias são chamadas argumentos. À propósito, os argumentos com duas premissas são chamados silogismos.

Na Lógica Matemática costumamos representar os argumentos através de uma simbologia adequada; entre as várias notações utilizadas, uma das mais simples é representar as premissas uma em cada linha (ou separadas por vírgulas) e utilizar o símbolo $\vdash$ para indicar a conclusão. Nessa notação, os argumentos apresentados anteriormente assumem a forma:

Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime; se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade; portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu.

Fazendo: p – José pegou as jóias
q – a Sra. Krasov mentiu
r – ocorreu um crime
s – o Sr. Krasov estava na cidade

temos:

$p \vee q \rightarrow r$
$r \rightarrow s$
$\neg s$
$\vdash \neg p \vee \neg q$

Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro.

Com a simbologia descrita, vem:

$p \rightarrow q \vee r$
$\neg p$
$\vdash \neg q \vee \neg r$

Se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo. Logo, se eu estudar, durmo.

Também com a simbologia apresentada, fica:

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
$\vdash p \rightarrow r$

2. Dedução.

Como vimos, então, o método das Tabelas Verdade pode ser utilizado para mostrar que um argumento é válido ou inválido. No entanto, esse método apresenta dois sérios inconvenientes; em primeiro lugar, o número de linhas cresce muito rapidamente, à medida que aumenta o número de proposições simples envolvidas no argumento; com 10 proposições a tabela necessita de 1024 linhas, e com 11, o numero de linhas vai a 2048. Com mais umas poucas proposições, sua construção se torna impraticável.

A segunda restrição é ainda pior; no Cálculo de Predicados, que veremos a seguir, muitas vezes não existe um procedimento que permita estabelecer o valor lógico de uma dada afirmação, o que torna impossível a construção da Tabela Verdade.

Por esse motivo foram desenvolvidos outros métodos para que se possa mostrar a validade de um argumento. Tais métodos são chamados métodos dedutivos, e sua aplicação chama-se dedução. Em termos mais formais, o conceito de dedução pode ser apresentado da seguinte forma:

Dado um argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ chama-se demonstração ou dedução de Q a partir das premissas P_1 , ... P_n, a seqüência finita de proposições X_1, X_2, ... X_k, tal que cada X_i ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da seqüência, e de tal modo que a última proposição X_k seja a conclusão Q do argumento dado.

Cada proposição X_i que incluímos na seqüência deve decorrer logicamente das anteriores; isso significa que deve ser obtida através da atuação de eqüivalências ou inferências sobre uma proposição ou uma conjunção de proposições anteriores.

Se for possível obter a conclusão Q através do procedimento de dedução, o argumento é válido; caso contrário, não é válido.

O processo de dedução consiste basicamente dos seguintes passos:

Dado um argumento

$$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$$

fazemos:

- definimos o conjunto P constituído pelas premissas $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$;
- sobre um ou mais elementos do conjunto fazemos atuar eqüivalências e inferências conhecidas, obtendo novas proposições, e incluindo-as no conjunto P;
- repetimos o passo acima até que a proposição incluída seja o conseqüente Q.

Vamos exemplificar o processo provando o argumento

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

que nada mais é do que a regra de inferência conhecida por Modus Ponens.

Enumerando as proposições do conjunto P, temos:

(1) $p \to q$
(2) p

Como sabemos que $p \to q$ é equivalente a $\neg p \vee q$ (Lei da Condicional), incluímos em P a proposição:

(3) $\neg p \vee q$

A conjunção das expressões (2) e (3) produz a expressão

(4) $p \wedge (\neg p \vee q)$

também incluída em P. Utilizando a Lei de Distributividade nesta expressão obtemos

(5) $(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$

Mas $p \wedge \neg p$ é equivalente a F, uma contradição, e $F \vee (p \wedge q)$ é equivalente a $p \wedge q$; logo, podemos incluir em P a expressão

(6) $p \wedge q$

Finalmente, pela Regra da Simplificação, $p \wedge q \Rightarrow q$, o que nos permite incluir em P a expressão

(7) q

o que completa a demonstração.

Por uma questão de organização, vamos estabelecer em nosso curso uma forma de apresentação para as deduções. Essa forma está exemplificada na tabela abaixo, na qual repetimos a dedução de Modus Ponens, que acabamos de apresentar:

Passo	Como a proposição foi obtida	Proposição
1	Premissa	$p \to q$
2	Premissa	p
3	Lei da Condicional sobre (1)	$\neg p \vee q$
4	Conjunção de (2) e (3)	$p \wedge (\neg p \vee q)$
5	Lei da Distributividade sobre (4)	$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$
6	Definição de contradição em (5)	$F \vee (p \wedge q)$
7	Definição de disjunção em (6)	$p \wedge q$
8	Regra da Simplificação sobre (7)	q

Observe que a dedução é apresentada sob forma de tabela, com três colunas, da seguinte forma:

coluna 1 - os passos dados na dedução; a cada passo obtemos um proposição, é referenciada no restante da dedução por esse número; os primeiros passos são, naturalmente, o estabelecimento das premissas;
coluna 2 - indicação de como foi obtida a proposição naquele passo; normalmente as proposições são obtidas fazendo–se atuar eqüivalências, regras de inferência ou outras propriedades sobre premissas já obtidas em passos anteriores;
coluna 3 - a proposição obtida naquele passo; a última deve ser a conclusão do argumento.

Podemos ver, então, que os métodos dedutivos operam de forma distinta do método da Tabela Verdade; para demonstrar a regra de inferência Modus Ponens tivemos que utilizar várias eqüivalências e regras de inferência sobre proposições obtidas em passos anteriores; por esse motivo, a utilização do método direto de dedução, exige que saibamos, de forma bem clara, quais as eqüivalências e implicações lógicas que podem ser utilizadas.

3. Eqüivalências e Inferências Básicas.

É possível mostrar que todo o corpo da Lógica Matemática pode ser erguido a partir de umas poucas regras de inferência axiomáticas. Nosso objetivo, no entanto, não é alcançar os fundamentos da Lógica, mas tão somente descrever o funcionamento dos métodos de dedução; portanto, vamos estabelecer por princípio, um conjunto fundamental de eqüivalências e regras de inferência, para, a partir destas, mostrar a validade de argumentos mais complexos. Em outras palavras, no decorrer dos processos dedutivos poderemos lançar mão destas, e apenas destas, eqüivalências e regras de inferência, considerando-as já conhecidas.

Eqüivalências

1. Idempotência [ID]

$p \Leftrightarrow p \wedge p$

$p \Leftrightarrow p \vee p$

2. Comutatividade [COM]

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

3. Associatividade [ASSOC]

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

4. Distributividade [DIST]

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5. Dupla Negação [DN]

$p \Leftrightarrow \neg (\neg p)$

6. Leis de De Morgan [DM]

$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

7. Condicional [COND]

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

8. Bicondicional [BICOND]

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

9. Contraposição [CP]

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

10. Exportação – Importação [EI]

$p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Alem dessas eqüivalências, serão úteis também as eqüivalências que tratam com tautologias e contradições:

11. Eqüivalências com tautologias [ET]

$p \vee \neg p \Leftrightarrow V$

$p \wedge V \Leftrightarrow p$

12. Eqüivalências com contradições [EC]

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$

$p \vee F \Leftrightarrow p$

Finalmente, podemos utilizar o recurso de compor, na mesma proposição, uma conjunção de proposições anteriores; por exemplo, se, durante a dedução, foram obtidas as proposições p e q, podemos incluir $p \wedge q$ no conjunto de proposições; temos então:

13. Conjunção [CPNJ}

$p , q \Leftrightarrow p \wedge q$

Regras de Inferência

1. Adição [AD]

$p \Rightarrow p \vee q$

2. Simplificação [SIMP]

$p \wedge q \Rightarrow p$

3. Simplificação Disjuntiva [SIMPD]

$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Rightarrow p$

4. Absorção [ABS]

$p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow p \wedge q$

5. Modus Ponens [MP]

$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$

6. Modus Tollens [MT]

$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

7. Silogismo disjuntivo [SD]

$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

8. Silogismo Hipotético [SH]

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

9. Dilema Construtivo [DC]

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$$

10. Dilema Destrutivo [DD]

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \Rightarrow \neg p \vee \neg r$$

4. Simplificação da Conclusão.

Formalmente, o método de dedução que apresentamos é suficiente para obter a conclusão de qualquer argumento válido; no entanto, muitas vezes, quando a conclusão é uma proposição composta, envolvendo uma ou mais operações lógicas, a dedução torna–se mais difícil. Nesses casos, costuma–se simplificar a conclusão, de forma a facilitar a dedução.

Conclusão da forma $p \wedge q$

Quando a conclusão é uma conjunção, devemos obter, independentemente, as parcelas p e q, e a seguir, obter $p \wedge q$, por CONJ.

Exemplo

Se a procura do produto aumentar, seu preço subirá; se o preço subir, o produto não será exportado; se não houver importação ou se a produto for exportado, o produto escasseará. A procura do produto aumentou e não haverá importação. Logo, o produto não será exportado e escasseará.

Fazendo: p – a procura aumentar
q – o preço subir
r – o produto ser exportado
s – haver importação
t – o produto escassear

temos o argumento na forma simbólica e sua dedução:

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow \neg r$
$\neg s \vee r \rightarrow t$
$p \wedge \neg s$
$\vdash \neg r \wedge t$

1	premissa 1	$p \rightarrow q$
2	premissa 2	$q \rightarrow \neg r$
3	premissa 3	$\neg s \vee r \rightarrow t$
4	premissa 4	$p \wedge \neg s$
5	4, SIMP	p
6	1, 2, SH	$p \rightarrow \neg r$
7	5, 6, MP	$\neg r$
8	4, SIMP	$\neg s$
9	8, AD	$\neg s \vee r$
10	3, 9, MP	t
11	7, 10, CONJ	$\neg r \wedge t$

Conclusão da forma $q \to r$

Suponha que o argumento tenha a forma

$$P \to (q \to r)$$

onde P é a conjunção de premissas. Ora, sabemos que, por EI,

$$p \wedge q \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$$

o que permite escrever o argumento dado na forma

$$P \wedge q \to r$$

Portanto, para deduzirmos um argumento cuja conclusão é da forma $q \to r$, incluímos q no conjunto de premissas, e procuramos deduzir r. Este artifício é conhecido como Dedução da Condicional.

Exemplo

Se a casa ficar vazia ou eu conseguir o empréstimo então pago a dívida e me mudo. Se eu me mudar ou Pedro ficar em São Paulo então volto a estudar. Logo, se a casa ficar vazia, volto a estudar.

Fazendo p – a casa ficar vazia
q – eu conseguir o empréstimo
r – eu pagar a dívida
s – me mudar
t – Pedro ficar em São Paulo
u – voltar a estudar

temos o argumento $p \vee q \to r \wedge s$
$s \vee t \to u$
$\vdash p \to u$

Utilizando Dedução da Condicional, incluo “p” nas premissas e a conclusão se reduz a “u”:

$p \vee q \to r \wedge s$
$s \vee t \to u$
p
$\vdash u$

1	premissa 1	$p \vee q \to r \wedge s$
2	premissa 2	$s \vee t \to u$
3	premissa 3	p
4	3, AD	$p \vee q$
5	4, 1, MP	$r \wedge s$
6	5, SIMP	s
7	6, AD	$s \vee t$
8	7, 2, MP	u

Conclusão da forma $p \vee q$

Sabemos que, por COND, que

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$$

Portanto, se a conclusão do argumento tem a forma $p \vee q$, podemos substituí–la por $\neg p \rightarrow q$, e, utilizando Dedução da Condicional, incluir $\neg p$ nas premissas e deduzir q.

Exemplo

Ou pagamos a dívida ou o déficit aumenta; se as exportações crescerem, o déficit não aumenta. Logo, ou pagamos a dívida ou as exportações não crescem.

Fazendo p – pagar a dívida
q – o déficit aumentar
r – as exportações crescerem

temos o argumento

$p \vee q$
$r \rightarrow \neg q$
$\vdash p \vee \neg r$

Como a conclusão $p \vee \neg r$ é equivalente a $\neg p \rightarrow r$; então, pela Dedução da Condicional, o argumento assume a forma abaixo, com a dedução a seguir:

$p \vee q$
$r \rightarrow \neg q$
$\neg p$
$\vdash \neg r$

1	premissa 1	$p \vee q$
2	premissa 2	$r \rightarrow \neg q$
3	premissa 3	$\neg p$
4	1, 3, SD	q
5	2, 4, MT	$\neg r$

Uma outra forma de deduzir uma disjunção, é obter um dos disjuntos, e, por adição, incluir o outro.

Exemplo

Considere o argumento, já na forma simbólica:

$(\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$
$\neg q$
$\vdash \neg p \vee s$

Como a conclusão é $\neg p \vee s$, podemos deduzir $\neg p$, e, por adição, $\neg p \vee s$, ou deduzir s, e, por adição, $\neg p \vee s$.

1	premissa 1	$(\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$
2	premissa 2	$\neg q$
3	1, SIMP	$\neg p \vee q$
4	2, 3, SD	$\neg p$
5	4, AD	$\neg p \vee s$

Conclusão da forma $p \leftrightarrow q$

Sabemos, por BICOND, que

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Então, se a conclusão tem a forma $p \leftrightarrow q$, podemos substituí–la por $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, o que indica que temos que deduzir, independentemente, $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$. Utilizando Dedução da Condicional, podemos, na dedução de $p \rightarrow q$, incluir $\neg p$ nas premissas e deduzir q, e, na dedução de $q \rightarrow p$, incluir $\neg q$ nas premissas e deduzir p.

Exemplo

Considere o argumento

$p \wedge q \rightarrow r$
$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$
$s \rightarrow q$
p
$\vdash r \leftrightarrow s$

Temos então que fazer duas deduções, uma para $r \rightarrow s$, para a qual incluímos r nas premissas e deduzimos s, e outra para $s \rightarrow r$, na qual incluímos s nas premissas e deduzimos r. As duas deduções devem ser realizadas em separado, pois os resultados intermediários de uma não podem ser utilizados na outra.

1	premissa 1	$p \wedge q \rightarrow r$
2	premissa 2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$
3	premissa 3	$s \rightarrow q$
4	premissa 4	p
5	premissa 5	r
6	5, AD	$r \vee q$
7	2, 5, MP	$\neg p \vee s$
8	4, 7, SD	s

1	premissa 1	$p \wedge q \rightarrow r$
2	premissa 2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$
3	premissa 3	$s \rightarrow q$
4	premissa 4	p
5	premissa 5	s
6	3, 5, MP	q
7	4, 6, CONJ	$p \wedge q$
8	1, 7, MP	r

Alternativamente, poderíamos, na dedução da bicondicional, utilizar a outra equivalência BICOND,

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Nesse caso, bastaria deduzir $p \wedge q$, ou deduzir $\neg p \wedge \neg q$, e incluir o outro disjunto por Adição.

Exemplo

$p \wedge q$
$p \rightarrow [q \rightarrow (s \wedge t)]$
$\vdash s \leftrightarrow t$

1	premissa 1	$p \wedge q$
2	premissa 2	$p \rightarrow [q \rightarrow (s \wedge t)]$
3	2, EI	$p \wedge q \rightarrow s \wedge t$
4	1, 3. MP	$s \wedge t$
5	4, AD	$(s \wedge t) \vee (\neg s \wedge \neg t)$
6	5, BICOND	$s \leftrightarrow t$

Dedução por Absurdo

Considere o argumento $P \rightarrow Q$, onde P é a conjunção de premissas, e Q é a conclusão. Então, se o argumento for válido, isto é, se $P \rightarrow Q$ for uma tautologia, $\neg P \vee Q$ também o será, pela equivalência COND; consequentemente, sua negação, $\neg (\neg P \vee Q)$, que, por De Morgan, é equivalente a $P \wedge \neg Q$, será uma contradição.

Então, para mostrarmos que o argumento $P \rightarrow Q$ é válido, é suficiente mostrar que $P \wedge \neg Q$ é uma contradição. Ou seja, para mostrarmos que um argumento é válido, podemos negar a conclusão, incluí–la nas premissas e deduzir F, que representa uma contradição. Essa forma de deduzir um argumento é conhecida por Dedução por Absurdo.

Exemplo

Considere o argumento

$p \rightarrow q \vee r$
$q \rightarrow \neg p$
$s \rightarrow \neg r$
$\vdash \neg (p \wedge s)$

Utilizando Demonstração por absurdo, incluímos $p \wedge s$ nas premissas e deduzimos uma contradição:

$p \rightarrow q \vee r$
$q \rightarrow \neg p$
$s \rightarrow \neg r$
$p \wedge s$
$\vdash F$

1	premissa 1	$p \rightarrow q \vee r$
2	premissa 2	$q \rightarrow \neg p$
3	premissa 3	$s \rightarrow \neg r$
4	premissa 4	$p \wedge s$
5	4, SIMP	p
6	4, SIMP	s

7	5, 1, MP	$q \vee r$
8	6, 3, MP	$\neg r$
9	7,8, SD	q
10	9, 2, MP	$\neg p$
11	10, 5 CONJ	$p \wedge \neg p$
12	11, EC	F

5. Validade e Invalidade.

Os métodos de dedução que examinamos são capazes de mostrar a validade de um argumento, através de uma seqüência de eqüivalências e inferências, que, a partir das premissas, produz uma série de conclusões parciais, até chegar à conclusão final do argumento.

Esse processo, no entanto, não serve para provar a invalidade de um argumento; de fato, se, durante o processo de dedução, não conseguirmos chegar à conclusão, não podemos inferir que não é possível obter tal conclusão; talvez apenas não saibamos como chegar a ela.

Portanto, para mostrar a invalidade de um argumento, necessitamos de um outro método. Um argumento é, na verdade, uma operação de condicionamento. Se o argumento for válido, essa condicional é tautológica, isto é, é verdadeira para qualquer combinação possível de valores lógicos das proposições que constituem o argumento; se, no entanto, existir pelo menos uma combinação de valores lógicos das proposições que torne a condicional falsa, o argumento é inválido.

Ora, em que condições uma condicional é falsa ? Só existe uma possibilidade: quando o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso. Mas, em um argumento, o antecedente é uma conjunção de premissas, e o conseqüente é a conclusão; então, para que o antecedente seja verdadeiro, é necessário que todas as premissas sejam verdadeiras, e para que o conseqüente seja falso, é necessário que a conclusão seja falsa.

Então, para mostrar que um argumento é inválido, é suficiente encontrar uma combinação de valores lógicos para as proposições simples envolvidas, de forma que torne cada premissa verdadeira, e a conclusão falsa.

Considere o seguinte argumento:
Se José comprar ações e o mercado baixar, ele perderá seu dinheiro. O mercado não vai baixar.
Logo, ou José compra ações ou perderá seu dinheiro.

Simbolicamente, o argumento fica representado por

$p \wedge q \rightarrow r$
$\neg q$
$\vdash \; p \vee r$

onde: p – José comprar ações
q – o mercado baixar
r – José perder dinheiro

Para mostrar sua invalidade devemos fazer as premissas verdadeiras e a conclusão falsa; isto é:

a) VL $[p \wedge q \rightarrow r] = V$
b) VL $[\neg q] = V$
c) VL $[p \vee r] = F$

De (b) vem VL [q] = F; substituindo em (a), temos:

d) VL $[p \wedge F \rightarrow r] = V$

e) VL [$p \vee r$] = F
Como VL [$p \wedge F$] = F qualquer que seja p, de (d), vem VL [r] = F; substituindo em (e), vem:

f) VL [$p \vee F$] = F

O que implica em VL [p] = F

Temos então que, para o conjunto de valores lógicos

VL [p] = F
VL [q] = F
VL [r] = F

a condicional é falsa, o que significa que o argumento é inválido.

Um outro exemplo; considere o argumento

Ou estudo ou trabalho ou vou à praia; se estudo sou aprovado; não trabalho. Logo, sou aprovado.

Se fizermos: p – estudo
q – trabalho
r – vou à praia
s – sou aprovado

o argumento fica representado simbolicamente por

$p \vee q \vee r$
$p \rightarrow s$
$\neg q$
$\vdash s$

Para que o argumento seja inválido é necessário:

a) VL [$p \vee q \vee r$] = V
b) VL [$p \rightarrow s$] = V
c) VL [$\neg q$] = V
d) VL [s] = F

De (c) e (d) vem, imediatamente, VL [q] = F e VL [s] = F; substituindo em (a) e (b), vem

e) VL [$p \vee F \vee r$] = V
f) VL [$p \rightarrow F$] = V

De (f), vem VL [p] = F; substituindo em (e), vem VL [r] = V.

Encontramos uma combinação de valores que satisfazem a condição de invalidade. O argumento é, portanto, inválido.

Se não for possível atribuir valores verdade aos enunciados simples dos componentes de argumento, de modo que suas premissas se tornem verdadeiras e sua conclusão falsa, então o argumento é válido. Embora isso decorra da própria definição de validade, tem conseqüências curiosas. Observe o seguinte argumento:

Se eu for aprovado, vou para os Estados Unidos; se não, vou ficar aqui. Não fui para os Estados Unidos nem fiquei aqui. Logo, fui para a Argentina.

Simbolicamente
$p \to q$
$\neg p \to r$
$\neg q \wedge \neg r$
$\vdash s$

onde: p – ser aprovado
q – ir para os Estados Unidos
r – ficar aqui
s – ir para a Argentina

Temos então

a) VL [$p \to q$] = V
b) VL [$\neg p \to r$] = V
c) VL [$\neg q \wedge \neg r$] = V
d) VL [s] = F

De (c), vem VL [q] = F e VL [r] = F; substituindo em (a) e (b), vem:

e) VL [$p \to F$] = V
f) VL [$\neg p \to F$] = V

De (e) vem VL [p] = F, e de (f), vem VL [p] = V, o que caracteriza uma contradição. O que está ocorrendo ?

Ora, não é possível fazer as premissas verdadeiras, independentemente da conclusão, porque as premissas são incoerentes entre si, o que torna sua conjunção contraditória. Portanto, o argumento é válido, pois não há possibilidade de atribuirmos o valor F á condicional que o representa.

Embora o argumento seja válido, não é possível (nem necessário) deduzir sua conclusão a partir das premissas, porque a conclusão nada tem a ver com as premissas. Podemos chamar esse tipo de validade de Validade por Contradição de Premissas.

Mas esse não é o único caso estranho. Observe o argumento:

Se eu for a festa, não chego cedo no trabalho. Se eu for ao cinema, não vou à festa. Não vou ao cinema. Logo, ou eu chego cedo ao trabalho ou não chego cedo ao trabalho.

Fazendo p – vou à festa
q – chego cedo ao trabalho
r – vou ao cinema

temos a seguinte forma para o argumento:

$p \rightarrow \neg q$
$r \rightarrow \neg p$
$\neg r$
$\vdash q \vee \neg q$

Observe que a conclusão tem a forma $q \vee \neg q$, que é uma tautologia. Então, não é possível fazer a conclusão falsa, e o argumento é válido. Também nesse caso, não é possível deduzir a conclusão a partir das premissas (a menos que a conjunção de premissas também forme uma tautologia). Podemos chamar esse caso de validade de Validade por Tautologia da Conclusão.

Resumindo, temos as seguintes situações na dedução de um argumento:

Um argumento é válido quando:

- o conjunto de premissas é contraditório.
- a conclusão é uma tautologia.
- a conclusão pode ser deduzida das premissas.

Um argumento é inválido quando:

- existe pelo menos um conjunto de valores para as proposições simples que tornam as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

Portanto, dado um argumento, para provar a sua validade ou invalidade, devemos chegar a uma das conclusões acima.

IV. CÁLCULO DE PREDICADOS

1. Predicados e Variáveis.

Nos capítulos anteriores examinamos uma parte da Lógica chamada Lógica das Proposições, ou Cálculo Proposicional, na qual aprendemos técnicas que nos permitiram verificar se um determinado tipo de argumento é válido ou inválido. Nos argumentos estudados, os enunciados simples eram combinados através dos conectivos, formando enunciados compostos, e a validade desses argumentos dependia, essencialmente, da forma pela qual os enunciados compostos se apresentavam.

Não é difícil, no entanto, encontrar argumentos de um tipo distinto; por exemplo, o argumento

Todos os humanos são mortais
Sócrates é um humano
Logo, Sócrates é mortal

é claramente válido, mas sua validade não depende da forma pela qual os enunciados simples se compõem, uma vez que, neste argumento, não há enunciados compostos. Pode−se perceber que sua validade depende, na verdade, da estrutura interna dos enunciados que constituem o argumento. A construção de métodos para analisar argumentos como esse vai, portanto, exigir a criação de técnicas para descrever e simbolizar a estrutura interna dos enunciados.

Considere a premissa "Sócrates é humano". Esse enunciado é uma declaração de que determinado indivíduo (Sócrates) possui uma propriedade específica (é humano). Na linguagem natural, o indivíduo que possui a propriedade é chamado sujeito, enquanto a propriedade descrita é chamada predicado.

O predicado, na verdade, explicita certas qualidades que o sujeito possui e que permite incluí-lo em uma categoria; por exemplo, quando dizemos "Sócrates é humano" queremos dizer que o objeto chamado "Sócrates" possui certas características que permitem incluí-lo no conceito que fazemos daquilo que chamamos "humano".

Em Lógica Simbólica, representamos o predicado por sua inicial maiúscula, e o sujeito a seguir, entre parênteses; assim, "Sócrates é humano" fica representado por

H (Sócrates)

A linguagem natural permite ainda a construção de um outro tipo de sentença, como "ele foi presidente do Brasil" na qual o sujeito não é um substantivo, mas um pronome, isto é, um termo que fica no lugar do nome.

Em Lógica Simbólica, também existem termos que ocupam o lugar dos nomes; são chamados variáveis, e costumam ser representados, como na Matemática, pelas últimas letras do alfabeto, em minúsculas: x, y, w, z, etc. Utilizando a variável x no lugar de "ele", a sentença assume a forma

x foi presidente do Brasil

Em Lógica Simbólica, representando o predicado "foi presidente do Brasil" por P, e levando em conta que x é sujeito, teríamos a representação

$$P\,(x)$$

Para simplificar a notação, podemos convencionar que não utilizaremos parênteses para as variáveis; a notação se tornaria então

$$Px$$

Em Lógica, portanto, um enunciado singular fica simbolizado pelo predicado, representado por uma única letra maiúscula, seguido pelo sujeito, uma constante entre parênteses ou uma variável.

Uma frase na qual o sujeito é uma constante, como "Sócrates é humano", pode ser verdadeira ou falsa; mas se o sujeito for uma variável, como em "ele foi presidente do Brasil", ela não é verdadeira nem falsa, dependendo de nome que assuma o lugar do pronome. Uma frase como essa não é, portanto, um enunciado.

Os enunciados são chamadas sentenças fechadas, ou simplesmente, fechados, enquanto que frases como "x foi presidente do Brasil" , "y escreveu Os Lusíadas" e "z viajou para os Estados Unidos" são chamadas sentenças abertas, ou, simplesmente, abertos.

Os abertos não são verdadeiros nem falsos; podemos dizer apenas que são satisfeitos para certos valores das variáveis, e não satisfeitos para outros. A substituição das variáveis de um aberto por constantes chama-se instanciação ou especificação; a instanciação transforma um aberto em um enunciado, que, este sim, pode ser verdadeiro ou falso.

Chama-se Universo de uma variável o conjunto de valores que ela pode assumir. Na linguagem corrente, o Universo (às vezes chamado Universo do Discurso) não é, muitas vezes, explicitado; intuitivamente, incluímos os objetos que podem substituir o pronome e descartamos aqueles objetos que sabemos que não podem; por exemplo, na frase

isto está verde

sabemos que "isto" pode ser uma fruta, ou uma parede, ou o mar, mas que dificilmente será um ser humano.

Em Lógica, o Universo do Discurso, quando não for explicitado, é definido pelo próprio contexto. Muitas vezes, a definição do Universo pode afetar a satisfatoriedade do aberto; por exemplo, o aberto

x é feroz

pode ser satisfazível se o universo for o conjunto de animais, e não satisfazível se o universo for o conjunto de disciplinas de um curso.

Chama–se Conjunto–Verdade (V_P) de um aberto Px o conjunto de elementos do Universo que, quando instanciam a variável, satisfazem (tornam verdadeiro) o enunciado; ou seja

$$V_P = \{ a \in U \mid VL [P (a)] = V \}$$

Por exemplo, seja $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ e a expressão "x é primo" representada por Px. Temos então $V_P = \{ 2, 3, 5, 7 \}$.

Os predicados podem ser monádicos (de um só termo), diádicos (de dois termos), triádicos (de três termos) ou poliádicos (de quatro ou mais termos). Muitos autores no entanto, preferem o chamar os predicados de dois ou mais termos de "relação", reservando o nome predicado para os predicados monádicos.

Eis alguns exemplos de relações, e uma sugestão de forma simbólica:

x gosta de y	Gxy
João é casado com Maria	C (João, Maria)
x está entre y e z	Exyz
Camões é o autor de Os Lusíadas	A (Camões, Os Lusíadas)

Nas relações, a ordem das variáveis é importante; no exemplo dado, Gxy significa "x gosta de y" mas não significa "y gosta de x". Esse fato deve ser levado em conta mesmo em predicados que sabemos ser comutativos; no exemplo, C (João, Maria) significa "João é casado com Maria" mas não significa "Maria é casada com João" . O motivo para isso é que a Lógica Formal leva em conta apenas a forma das expressões, e não seu significado.

Na instanciação, variáveis iguais devem ser substituídas por nomes iguais; variáveis distintas, no entanto, podem ser substituídas por nomes iguais ou distintos. Por exemplo, o aberto

x é maior ou igual a y

permite tanto a instanciação "7 é maior ou igual a 3" como a instanciação "7 é maior ou igual a 7".

Em relações com duas variáveis, o Conjunto Universo é constituído pelo produto cartesiano dos Universos das variáveis; o Conjunto−Verdade é constituído pelos pares ordenados dos valores que satisfazem a relação.

Por exemplo, considere o aberto Mxy representando "x é metade de y", onde Ux = {1, 2, 3} e Uy = { 4, 5 , 6 }. Então $V_M = \{ (2, 4), (3, 6) \}$.

2. Operações Lógicas.

Também no Cálculo de Predicados podemos definir as operações de conjunção, disjunção, negação, condicional e bicondicional, sobre enunciados e/ou abertos.

Considere, por exemplo, os abertos "x é médico", representado por Mx, e "x é professor", representado por Px; podemos então representar "x é médico e professor" por $Mx \wedge Px$.

Seja U o conjunto Universo de x; os valores de U que satisfazem $Mx \wedge Px$ devem satisfazer simultaneamente Mx e Px; consequentemente,

$$V_{M\wedge P} = V_M \cap V_P$$

Da mesma forma, podemos representar "x é médico ou professor" por $Mx \vee Px$. Este aberto é satisfeito por todos os elementos que são médicos e por todos que são professores; portanto,

$$V_{M\vee P} = V_M \cup V_P$$

Na operação de negação, podemos representar "x não é médico" por $\neg$ Mx, e seu Conjunto–Verdade será constituído por todos os elementos do Universo que não satisfazem Mx, isto é, o complemento de V_M :

$$V_{\neg M} = U - V_M$$

Uma notação de uso generalizado para o complemento de V_M é V'_M.

Considere a expressão "se x trabalha, então x fica cansado"; representando "x trabalha" por Tx, e "x fica cansado" por Cx, temos que a expressão dada fica representada por Tx $\rightarrow$ Cx. Seu Conjunto–Verdade é constituído por duas classes de elementos: pelos que trabalham e ficam cansados e pelos que não trabalham (uma vez que quando o antecedente é falso, a condicional é verdadeira).

Temos então que

$V_{T\rightarrow C} = (V_T \cap V_C) \cup V_{\neg T}$;	utilizando a propriedade distributiva, vem:
$V_{T\rightarrow C} = (V_T \cup V_{\neg T}) \cap (V_{\neg T} \cup V_C)$;	mas $V_T \cup V_{\neg T} = U$
$V_{T\rightarrow C} = U \cap (V_{\neg T} \cup V_C)$	ou seja,
$V_{T\rightarrow C} = V_{\neg T} \cup V_C$	ou, ainda,

$$V_{T\rightarrow C} = V'_T \cup V_C$$

Para a operação bicondicional, considere a expressão "x trabalha se e somente se ganha dinheiro"; representando "x trabalha" por Tx, e "x ganha dinheiro" por Gx, temos Tx $\leftrightarrow$ Gx. O conjunto de elementos que satisfazem a essa expressão é constituído pela união entre os conjuntos daqueles que trabalham e ganham dinheiro e daqueles que não trabalham e não ganham dinheiro; assim,

$$V_{T\leftrightarrow G} = (V_T \cap V_C) \cup (V'_T \cap V'_C)$$

Obter a forma simbólica de uma expressão em linguagem textual não é difícil, mas enquanto não se adquire uma certa habilidade, dá algum trabalho; muitas vezes, para facilitar, construímos uma forma intermediária, chamada forma lógica, obtida apenas por introdução de variáveis na forma textual.

Vamos ver alguns exemplos, obtendo a forma lógica e simbólica de expressões textuais, utilizando os predicados definidos:

Gatos caçam ratos (Gx – x é um gato; Rx – x caça ratos)
    Forma lógica: se x é um gato, x caça ratos
    Forma simbólica: Gx $\rightarrow$ Rx

Chineses velhos são sábios (Cx – x é chinês; Vx – x é velho; Sx – x é sábio)
    Forma lógica: se x é chinês e x é velho, então x é sábio
    Forma simbólica: Cx $\wedge$ Vx $\rightarrow$ Sx

Abacates são deliciosos e nutritivos (Ax – x é um abacate; Dx – x é delicioso; Nx – x é nutritivo)
    Forma lógica: se x é um abacate, então x é delicioso e x é nutritivo
    Forma simbólica: Ax $\rightarrow$ Dx $\wedge$ Nx

Abacates e laranjas são deliciosos e nutritivos (Ax – x é um abacate; Lx – x é uma laranja; Dx – x é delicioso; Nx – x é nutritivo)

Forma lógica: se x é um abacate ou x é uma laranja, então x é delicioso e x é nutritivo
Forma simbólica: $Ax \vee Lx \rightarrow Dx \wedge Nx$

São raros os políticos que não mentem (Rx – x é raro; Px – x é político; Mx – x mente)

Forma lógica: se x é político e x não mente, então x é raro
Forma simbólica: $Px \wedge \neg Mx \rightarrow Rx$

Carros só se locomovem com gasolina (Cx – x é um carro; Lx – x se locomove; Gx – x tem gasolina)

Forma lógica: se x é um carro, então x se locomove se e somente se x tem gasolina
Forma simbólica: $Cx \rightarrow (Lx \leftrightarrow Gx)$

Estradas de terra são trafegáveis unicamente quando secas (Ex – x é uma estrada de terra; Tx – x é trafegável; Sx – x está seca)

Forma lógica: se x é uma estrada de terra, então x é trafegável se e somente se x está seca
Forma simbólica: $Ex \rightarrow (Tx \leftrightarrow Sx)$

Homens só se casam com mulheres (Hx – x é homem; Cxy – x é casado com y; My – y é mulher)

Forma lógica: se x é homem, e x é casado com y, então y é mulher
Forma simbólica: $Hx \wedge Cxy \rightarrow My$

Gatos pretos são melhores caçadores que outros gatos (Gx – x é um gato; Px – x é preto; Cxy – x é melhor caçador que y)

Forma lógica: se x é um gato e x é preto e y é um gato e y não é preto, então x é melhor caçador que y
Forma simbólica: $Gx \wedge Px \wedge Gy \wedge \neg Py \rightarrow Cxy$

3. Quantificadores.

Dado um aberto Px em um universo U, pode ocorrer:

- todos os x em U satisfazem P; isto é, $V_P = U$
- alguns x em U satisfazem P, isto é, $V_P \neq \varnothing$
- nenhum x em U satisfaz P, isto é, $V_P = \varnothing$

Considere, por exemplo, U = { 2, 4, 6, 8 }. Se fizermos Px representar "x é par", temos o primeiro caso: todos os elementos satisfazem P, e $V_P = U$. Para Px representando "x é múltiplo de 3", temos apenas um elemento que satisfaz P, e $V_P = \{ 6 \}$. Finalmente, se Px representar "x é maior que 10", nenhum elemento de U satisfaz P, e, portanto, $V_P = \varnothing$.

No primeiro caso, dizemos que "para todo x em U, Px é verdadeiro", ou, simbolicamente,

$$(\forall x \in U)\ (Px)$$

Às vezes, simplifica–se a notação, omitindo–se o domínio e/ou os parênteses; escrevemos

$$(\forall x\ )\ (Px) \text{ ou } \forall x\ Px$$

Px é um aberto, mas $\forall x\ Px$ é um enunciado, e pode ser verdadeiro ou falso. A inserção do símbolo $\forall$ em um aberto chama−se "quantificação universal" e o símbolo $\forall$, "quantificador universal". Às vezes, na linguagem textual, são utilizados sinônimos para a expressão "para todo x": "qualquer que seja x", "cada x", etc. e todos são representados por $\forall x$.

A expressão $\forall x\ Px$ afirma que Px é verdadeiro para cada $x \in U$; então, se $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, temos que a conjunção $Pu_1 \wedge Pu_2 \wedge ... \wedge Pu_n$ é verdadeira.

Consideremos agora um aberto Px sobre U, para o qual $V_P \neq \emptyset$. Então existe pelo menos um x para o qual Px é verdadeiro. Representamos tal fato por "existe um x em U tal que Px é verdadeiro", ou, simbolicamente,

$$(\exists x \in U)\ (Px)$$

Simplificando a notação, omitindo o domínio e/ou os parênteses, temos

$$(\exists x)\ (Px) \text{ ou } \exists x\ Px$$

Da mesma forma que no caso anterior, $\exists x\ Px$ é um enunciado, e pode assumir os valores verdadeiro ou falso. A inserção do símbolo $\exists$ em um aberto chama−se "quantificação existencial" e o símbolo $\exists$, "quantificador existencial". A linguagem textual, possui alguns sinônimos para a expressão "existe um x": "existe pelo menos um x", "algum (ou alguns) x", "para algum x", etc. e todos são representados por $\exists x$.

A expressão $\exists x\ Px$ afirma que Px é verdadeiro para pelo menos um $x \in U$; então, se $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, temos que a disjunção $Pu_1 \vee Pu_2 \vee ... \vee Pu_n$ é verdadeira.

Muitas vezes, precisaremos representar, simbolicamente, a negação de uma expressão quantificada, mas que, com os cuidados apropriados, não apresentará dificuldades. Seja por exemplo, a expressão "todos são alunos". Se representarmos "x é um aluno" por Ax, temos que "todos são alunos" pode ser escrito

$$\forall x\ Ax$$

Claramente, a negação de "todos são alunos" é "nem todos são alunos" (e não "nenhum é aluno", como pode parecer à primeira vista), ou, simbolicamente,

$$\neg \forall x\ Ax$$

Mas dizer que "nem todos são alunos" é o mesmo que dizer que "existe alguém que não é aluno", ou seja, "existe um x tal que x não é um aluno", ou, simbolicamente,

$$\exists x\ \neg Ax$$

Concluímos então que as expressões $\neg \forall x\ Ax$ e $\exists x\ \neg Ax$ são equivalentes.

Da mesma forma, como podemos afirmar que as expressões "não existem alunos" e "todos não são alunos" descrevem o mesmo fato, podemos concluir que suas representações simbólicas $\neg \exists x\ Ax$ e $\forall x\ \neg Ax$ são equivalentes.

Esses fatos são decorrência imediata das leis de De Morgan:

$$\neg \forall x\, Ax \;\Leftrightarrow\; \neg (Au_1 \wedge Au_2 \wedge ... \wedge Au_n) \;\Leftrightarrow \neg Au_1 \vee \neg Au_2 \vee ... \vee \neg Au_n \;\Leftrightarrow\; \exists x \neg Ax$$

$$\neg \exists x\, Ax \;\Leftrightarrow\; \neg (Au_1 \vee Au_2 \vee ... \vee Au_n) \;\Leftrightarrow \neg Au_1 \wedge \neg Au_2 \wedge ... \wedge \neg Au_n \;\Leftrightarrow\; \forall x \neg Ax$$

Dessas eqüivalências decorre que para mostrar que uma expressão do tipo $\forall x$ Px é falsa, basta mostrar que sua negação $\exists x \neg$ Px é verdadeira, ou seja, exibir um elemento k tal que Pk seja falsa.

Por esse motivo, de uma proposição do tipo $\forall x$ Px não decorre que exista um x para o qual Px seja verdadeiro. Por exemplo, se não existem marcianos, então a expressão

Todos os marcianos têm olhos verdes

é verdadeira, pois, para que fosse falsa, seria necessário exibir um marciano que não tivesse olhos verdes.

Se uma expressão possuir mais de uma variável, pode ocorrer que nem todas estejam quantificadas; nesse caso, a expressão é um aberto. As variáveis quantificadas recebem o nome de variáveis aparentes ou mudas, enquanto as não quantificadas são chamadas variáveis livres.

Por exemplo, considere o aberto Pxy = $(\exists x)$ (x + y < 10), sobre o universo U = { 3, 5, 7, 9 }. Seu conjunto verdade é formado por todos os valores de U que podem substituir y, e para o qual existe pelo menos um x que satisfaz a desigualdade. Então, V_P = { 3, 5 }. A variável x é aparente, enquanto y é livre.

Quantificar uma sentença leva, da mesma forma que a instanciação, a um enunciado, a uma frase que pode ser verdadeira ou falsa. Costumamos chamar esses enunciados de proposições gerais, em contraposição às proposições singulares, pois não contêm nomes. Assim, o enunciado “Maria foi à praia” é uma proposição singular, enquanto “Todos foram à praia” é uma proposição geral.

Vejamos um exemplo: considere os conjuntos

H = { Carlos, Pedro, Mário } e M = { Claudia, Lilian }

e o predicado Ixy = “x é irmão de y”, onde H é o universo de x, e M o universo de y. Suponha que Carlos e Pedro sejam irmãos de Claudia, e que Mário seja irmão de Lilian. Examine a validade dos seguintes enunciados:

a) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in M)$ (Ixy)
b) $(\exists x \in H)\ (\forall y \in M)$ (Ixy)
c) $(\forall x \in H)\ (\forall y \in M)$ (Ixy)
d) $(\exists x \in H)\ (\exists y \in M)$ (Ixy)

É fácil perceber que o primeiro e o último são verdadeiros, e os demais, falsos.

Quando se obtém a forma simbólica de uma expressão, a ordem dos quantificadores pode ser importante; por exemplo, trocando a ordem dos enunciados do exemplo anterior, temos:

a) $(\exists y \in M)\ (\forall x \in H)\ (Ixy)$
b) $(\forall y \in M)\ (\exists x \in H)\ (Ixy)$
c) $(\forall y \in M)\ (\forall x \in H)\ (Ixy)$
d) $(\exists y \in M)\ (\exists x \in H)\ (Ixy)$

Agora, o segundo e o quarto enunciados são verdadeiros, enquanto o primeiro e o terceiro são falsos; observe que apenas os dois primeiros enunciados, nos quais os quantificadores são distintos, trocaram a validade. É possível mostrar que quantificadores de mesma espécie podem ser permutados, enquanto que, em geral, quantificadores de espécies distintas, não podem.

A negação de enunciados com mais de um quantificador pode ser obtido pela aplicação sucessiva das leis de De Morgan; por exemplo,

$\neg \forall x\ \forall y\ Pxy \iff \exists x \neg \forall y\ Pxy \iff \exists x\ \exists y \neg Pxy$
$\neg \exists x\ \exists y\ Pxy \iff \forall x \neg \exists y\ Pxy \iff \forall x\ \forall y \neg Pxy$
$\neg \forall x\ \exists y\ Pxy \iff \exists x \neg \exists y\ Pxy \iff \exists x\ \forall y \neg Pxy$
$\neg \exists x\ \forall y\ Pxy \iff \forall x \neg \forall y\ Pxy \iff \forall x\ \exists y \neg Pxy$

Chama-se escopo de um quantificador a parte da frase sobre a qual ele atua; em geral o escopo de um quantificador é indicado pelos parênteses que o seguem. Se não houver parênteses, o escopo do quantificador é limitado ao predicado que o segue. Veja os exemplos abaixo:

$\exists x\ (Px \vee Qx)$	escopo de $\exists x$: $Px \vee Qx$	
$\exists x\ Px \vee Qx$	escopo de $\exists x$: Px	
$\exists y\ (Pxy \wedge \forall x\ Qx)$	escopo de $\exists y$: $Pxy \wedge \forall x\ Qx$	escopo de $\forall x$: Qx

Podemos agora voltar ao problema de construir as formas simbólicas, desta vez com a utilização de quantificadores; tal como fizemos anteriormente, vamos exemplificar o processo, obtendo a forma lógica e simbólica de expressões textuais, utilizando os predicados definidos.

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Existem sábios (Sx – x é sábio)
existe um x tal que x é sábio
$\exists x\ Sx$

Todos são sábios (Sx – x é sábio)
para todo x, x é sábio
$\forall x\ Sx$

Não existem marcianos (Mx – x é marciano)
não existe x tal que x seja um marciano ou para todo x, x não é um marciano
$\neg \exists x\ Mx$ $\forall x\ (\neg Mx)$

Nem todos são sábios (Sx – x é sábio)
para nem todo x, x é sábio ou existe um x tal que x não é sábio
$\neg \forall x\ Sx$ $\exists x\ (\neg Sx)$

Algumas senhoras estão presente (Sx – x é uma senhora; Px – x está presente)
existe um x tal que x é uma senhora e x está presente
$\exists x\ (Sx \wedge Px)$

Os morcegos são mamíferos (Cx – x é morcego; Mx – x é um mamífero)
para todo x, se x é um morcego, x é um mamífero
$\forall x\ (Cx \rightarrow Mx)$

Existe um mamífero que voa (Mx – x é mamífero; Vx – x voa)
existe um x tal que x é mamífero e x voa
$\exists x\ (Mx \wedge Vx)$

Todo livro deve ser lido (Lx – x é um livro; Dx – x deve ser lido)
para todo x, se x é um livro, x deve ser lido
$\forall x\ (Lx \rightarrow Dx)$

Os cavalheiros não são sempre ricos (Cx – x é um cavalheiro; Rx – x é rico)
para nem todo x, se x é um cavalheiro então x é rico
$\neg \forall x\ (Cx \rightarrow Rx)$
ou, equivalentemente,
existe um x tal que x é um cavalheiro e x não é rico
$\exists x\ (Cx \wedge \neg Rx)$

Somente os médicos podem cobrar por tratamento clínico (Mx – x é médico; Cx – x pode cobrar por tratamento clínico)
para todo x, se x pode cobrar por tratamento clínico, então x é médico
$\forall x\ (Cx \rightarrow Mx)$

Ninguém, senão os corajosos, merece medalha (Cx – x é corajoso; Mx – x merece medalha)
para todo x, se x merece medalha, então x é corajoso
$\forall x\ (Mx \rightarrow Cx)$

Nenhum carro é seguro, a menos que tenha bons freios (Cx – x é um carro; Sx – x é seguro; Fx – x tem bons freios)
para todo x, se x é um carro, então x é seguro se e somente se tiver bons freios
$\forall x\ [\ Cx \rightarrow (Sx \leftrightarrow Fx)\ ]$

B. Expressões com mais de um quantificador e predicados monádicos; nessas expressões, por questão de simplicidade, utilizamos uma variável distinta para cada quantificador.

Se existem marcianos, existem não terráqueos (Mx – x é marciano; Tx – x é terráqueo)
se existe x tal que x seja marciano , então existe y tal que y não é terráqueo
$\exists x\ Mx \rightarrow \exists y\ (\neg Ty)$

Alguns são espertos, outros não (Ex – x é esperto)
existe x tal que x é esperto, e existe y tal que y não é esperto
$\exists x\ Ex \wedge \exists y\ (\neg Ey)$

Existem políticos honestos e desonestos (Px – x é político; Hx – x é honesto)
existe x tal que x é político e x é honesto, e existe y tal que y é político e y não é honesto
$\exists x\ (Px \wedge Hx) \wedge \exists y\ (Py \wedge \neg\ Hy)$

C. Expressões com relações

João é casado com alguém (Cxy – x é casado com y)
existe x tal que João é casado com x
$\exists x\ C\ (João, x)$

Todos têm pai (Pxy – x é pai de y)
para todo x existe y tal que y é pai de x
$\forall x\ \exists y\ Pyx$

Todas as pessoas têm pai (Px – x é uma pessoa; Fxy – x é pai de y)
para todo x, se x é uma pessoa, existe y tal que y é pai de x
$\forall x\ (Px \rightarrow \exists y\ Fxy)$

Existe um ancestral comum a todas as pessoas (Px – x é uma pessoa; Axy – x é ancestral de y)
existe um x tal que para todo y, se y é uma pessoa, x é ancestral de y
$\exists x\ \forall y\ (Py \rightarrow Axy)$
ou, equivalentemente,
para todo y, se y é uma pessoa, existe um x tal que x é ancestral de y
$\forall y\ (Py \rightarrow \exists x\ Axy)$

Um bom exercício para a construção de relações é o estabelecimento de formas de parentesco em uma família; excetuando-se o parentesco de pai, mãe, e filho, que são biológicos, todos os demais são estabelecidos através de uma ou mais pessoas. Podemos exemplificar com um parentesco simples, o de genro: se x é casado com a filha de y, então x é genro de y; ou, mais precisamente: se existir z tal que x seja casado com z, e z seja filha de y, então x é genro de y. Como o relacionamento é válido para todo x e para todo y, a forma simbólica ficaria

$$\forall x\ \forall y\ [\ \exists z\ (Cxz \wedge Fzy) \rightarrow Gxy\ ]$$

onde Cxz – x é casado com z, Fzy – z é filha de y, e Gxy – x é genro de y. Observe que o predicado "filha" exige que z seja do sexo feminino; se utilizássemos o predicado Pyz (y é pai de z), ao invés de Fzy, a forma simbólica incluiria a construção do relacionamento "nora".

Veja, nos exemplos abaixo, a construção de outras formas de parentesco:

Avô – se x é pai do pai de y, então x é avô de y (Pxy – x é pai de y; Axy – x é avô de y)
$\forall x\ \forall y\ [\ \exists z\ (Pxz \wedge Pzy) \rightarrow Axy\ ]$

Observe que a expressão acima não define o parentesco "avô", pois, para isso, deveria incluir a possibilidade de x ser pai da mãe de y; também por esse motivo, não podemos utilizar a operação bicondicional. O mesmo ocorre com os demais parentescos.

Irmão – se o pai de x for também pai de y, x é irmão de y (Pxy – x é pai de y; Ixy – x é irmão de y)
$\forall x\ \forall y\ [\ \exists z\ (Pzx \wedge Pzy) \rightarrow Ixy\ ]$

Primo – se o pai de x for tio de y, então x é primo de y (Pxy – x é pai de y; Txy – x é tio de y; Rxy – x é primo de y)

$\forall x \, \forall y \, [\, \exists z \, (Fzx \wedge Tzy) \rightarrow Pxy \,]$

Madrasta – se x for casada com o pai de y e não for mãe de y, então x é madrasta de y (Cxy – x é casada com y; Pxy – x é pai de y; Mxy – x é mãe de y; Dxy – x é madrasta de y)

$\forall x \, \forall y \, [\, \exists z \, (Cxz \wedge Pzy) \wedge \neg \, Mxy \rightarrow Dxy \,]$

Vimos, então, que a linguagem do Cálculo de Predicados utiliza, para representar frases de uma linguagem natural, constantes e variáveis, predicados, símbolos de conectivos, quantificadores e parênteses. No entanto, da mesma forma que no Cálculo Proposicional, nem toda seqüência constituída por esses elementos é válida, isto é, representa uma frase da linguagem natural; as seqüências válidas são chamadas fórmulas bem formadas (wff - well formed formulas), ou, simplesmente, fórmulas.

Em Lógica, a expressão simbólica constituída por um predicado e seus termos chama-se expressão atômica. Utilizamos o conceito de expressão atômica para definir, de maneira mais precisa, o conceito de fórmula:

- expressões atômicas são fórmulas;
- se φ e θ são fórmulas, então também são fórmulas $\neg \varphi$, $\varphi \wedge \theta$, $\varphi \vee \theta$, $\varphi \rightarrow \theta$, $\varphi \leftrightarrow \theta$, (φ);
- se x é uma variável e φ é uma fórmula, então também são fórmulas $\forall x \, \varphi$ e $\exists x \, \varphi$;
- nada mais é fórmula.

4. Silogismos Categóricos.

Da mesma forma que no Cálculo Proposicional, estaremos interessados, no Cálculo de Predicados, em examinar a validade de argumentos, isto é, em que condições uma dada afirmação se segue logicamente de fatos conhecidos.

Em Cálculo de Predicados, os argumentos são, evidentemente, mais complexos que no Cálculo Proposicional, principalmente pela presença de quantificadores e variáveis. No entanto, existe uma classe de argumentos, no Cálculo de Predicados, na qual as provas de validade e invalidade são extremamente simples. São os chamados Silogismos Categóricos. Por esse motivo, vamos tratar, neste capítulo, dos Silogismos Categóricos, deixando a abordagem dos argumentos em geral, do Cálculo de Predicados para o próximo capítulo.

Chamamos de proposições categóricas afirmações sobre conjuntos (ou classes, ou categorias) de elementos, afirmando ou negando que uma classe esteja contida na outra, no todo ou em parte.

Há quatro formas típicas de proposições categóricas, exemplificadas abaixo:

Todo gato é um felino
Nenhum político é desonesto
Alguns felinos são ferozes
Alguns políticos não são desonestos

Essas formas recebem os nomes, em Lógica Formal, de A, E, I, e O, respectivamente; as formas A e I são ditas formas afirmativas, e as formas E e I, negativas.

A primeira proposição categórica típica é chamada Proposição Universal Afirmativa. Tem a forma geral

Todo S é P

e indica que todos os elementos da classe S estão contidos na classe P. Sua forma simbólica é

$$\forall x\ (Sx \rightarrow Px).$$

A segunda é chamada Proposição Universal Negativa; tem a forma geral

Nenhum S é P

e indica que as classes S e P não possuem elementos comuns. Sua forma simbólica é

$$\forall x\ (Sx \rightarrow \neg\, Px)$$

A terceira proposição é chamada Proposição Particular Afirmativa; tem a forma geral

Algum S é P

e indica que alguns membros da classe S pertencem também à classe P. Observe que a proposição nada informa sobre a totalidade dos membros de S: tanto pode ocorrer que todos os elementos de S pertençam a P, como pode ocorrer que algum elemento de S não está em P. Sua forma simbólica é

$$\exists x\ (Sx \wedge Px)$$

A quarta e última proposição categórica típica é chamada Proposição Particular Negativa; tem a forma geral

Algum S não é P

e indica que existem elementos de S que não estão contidos em P. Da mesma forma que a anterior, esta proposição nada fala sobre a totalidade dos elementos de S. Tanto pode ocorrer que todos os elementos de S não estejam em P, como ocorrer que alguns estejam em P. Sua forma simbólica é

$$\exists x\ (Sx \wedge \neg\, Px)$$

Um silogismo é um argumento em que uma conclusão é inferida de duas premissas. Um silogismo categórico é um argumento que consiste em três proposições categóricas, que contêm exatamente três predicados, cada um dos quais ocorre exatamente em duas das proposições constituintes.

Um silogismo categórico é da forma típica quando suas premissas e a conclusão são todas proposições categóricas de forma típica.

Veja alguns exemplos de silogismos categóricos de forma típica:

Todos os artistas são vaidosos
Alguns artistas são pobres
Logo, todos os pobres são vaidosos

Todos os gregos são humanos
Todos os atenienses são gregos
Logo, todos os atenienses são humanos

Todos os coelhos são velozes
Alguns cavalos não são velozes
Logo, alguns cavalos não são coelhos

Alguns políticos são honestos
Nenhum estudante é político
Logo, nenhum estudante é honesto

Evidentemente, nem todas a proposições são de forma típica, ou podem ser escritas nessa forma. No entanto, muitas vezes é possível reescrever a proposição na forma típica, embora isso, às vezes, não seja evidente.

Portanto, dado um argumento cujas proposições não estejam na forma típica, é necessário algum esforço no sentido de tentar reduzir suas proposições à forma típica, para colocá–lo na forma de silogismo categórico típico.

No caso geral, não há como saber se uma proposição pode ou não ser escrita na forma típica. Apresentamos, abaixo, algumas sugestões nesse sentido.

As proposições singulares, tais como "Sócrates é humano", "Rex é feroz", "esse carro não tem gasolina" podem ser facilmente escritas na forma Universal Afirmativa ou Negativa:

Todas as coisas que são Sócrates, são humanas
Todas as coisas que são Rex, são ferozes
Todas os coisas que são esse carro, são coisas que não têm gasolina

Essa modificação é tão comum, que as proposições singulares são consideradas Universais, sem que haja necessidade de reescrevê–las.

Algumas proposições cujo verbo principal não é uma forma do verbo "ser" podem ser reescritas na forma típica; por exemplo:

"Todos os homens ambicionam o poder" por "Todos os homens são ambiciosos de poder"
"Alguns homens bebem" por "Alguns homens são bebedores"
"Um morcego entrou pela janela" por "Alguns morcegos são coisas que entraram pela janela"
"Um elefante fugiu" por "Alguns elefantes são objetos que fugiram"

As proposições que envolvem os termos "somente", "apenas", ou "ninguém senão" costumam ser designadas como "exclusivas" porque o predicado se aplica exclusivamente ao sujeito nomeado. Muitas delas podem ser escritas na forma típica:

"Somente os cidadãos podem votar" por "Todos os que podem votar são cidadãos"
"Ninguém, senão os corajosos, merece medalha" por "Todos os que merecem medalha são os corajosos"

Algumas proposições não contem nenhuma palavra que indique o quantificador; nesse caso, devemos examinar o contexto, embora, normalmente, a quantificação seja universal. Por exemplo, "os cães são carnívoros" quer dizer que "todos os cães são carnívoros"; "as crianças estão presentes" provavelmente quer dizer que "todas as crianças estão presentes"

Algumas proposições são ditas "exceptivas", pois explicitam algum tipo de exceção. Quase sempre essas proposições fazem duas assertivas, e não podem ser colocada na forma típica; essas proposições são indicadas pelos termos "quase todos", "todos, exceto", etc. Eis alguns exemplos:

"Todos são elegíveis, exceto os empregados" eqüivale a "Todos os não–empregados são elegíveis e nenhum empregado é elegível"

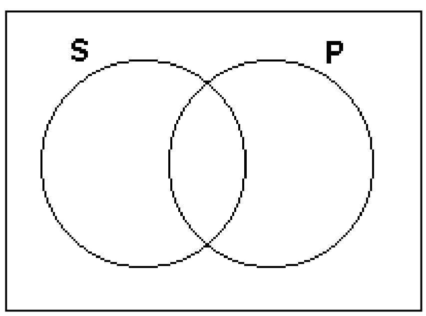
"Quase todos os estudantes estavam no baile" eqüivale a "Alguns estudantes estavam no baile e alguns estudantes não estavam no baile"

5. Diagramas de Venn.

As proposições categóricas podem ser representadas graficamente, através de um esquema conhecido por Diagramas de Venn, utilizado pela primeira vez pelo matemático inglês John Venn, que viveu no século XIX.

Nos diagramas de Venn, cada classe é representada por um círculo, rotulada com o nome da classe; para representar a proposição que afirma que a classe não possui elementos, sombreamos o interior do círculo; para indicar que a classe possui pelo menos um elemento, incluímos um X no círculo.

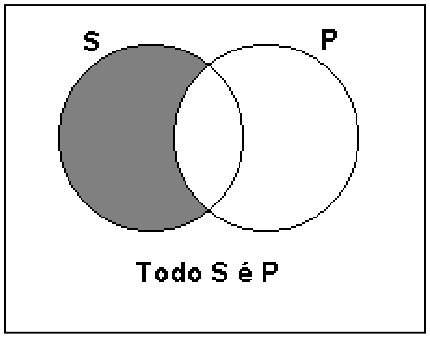
Para diagramar uma proposição categórica, necessitamos de dois círculos, pois uma proposição categórica faz referência a duas classes. Então, para representar uma proposição que referencia dois predicados, chamados S e P, desenhamos dois círculos que se interceptam, chamados S e P, como na figura abaixo:

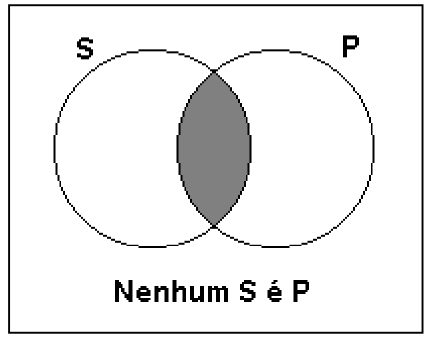


Agora, podemos indicar a forma de representação, segundo os diagramas de Venn, de cada uma das proposições categóricas:

A Proposição Universal Afirmativa "Todo S é P", com a forma simbólica $\forall x\ (Sx \rightarrow Px)$, é representada pelo primeiro diagrama abaixo; o sombreado em S indica que todos os elementos em S estão concentrados na interseção com P.

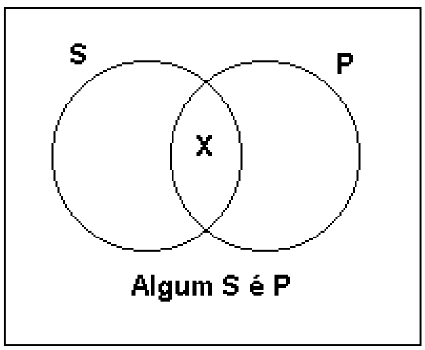
O segundo diagrama representa a Proposição Universal Negativa, "Nenhum S é P", ou, simbolicamente, $\forall x\ (Sx \rightarrow \neg\ Px)$. Observe que a interseção é sombreada, indicando que não existem elementos comuns entre S e P.

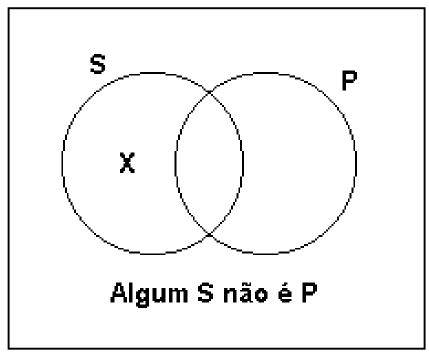




A terceira forma, a Proposição Particular Afirmativa, “Algum S é P”, ou $\exists x\ (Sx \wedge Px)$, é representada pelo primeiro diagrama abaixo, no qual o X na interseção das classes indica o elemento que tanto está em S como em P.

O último diagrama representa a quarta forma, a Proposição Particular Negativa, “Algum S não é P”, cuja forma simbólica é $\exists x\ (Sx \wedge \neg Px)$; observe o elemento X, incluído em S, mas exterior à classe P.



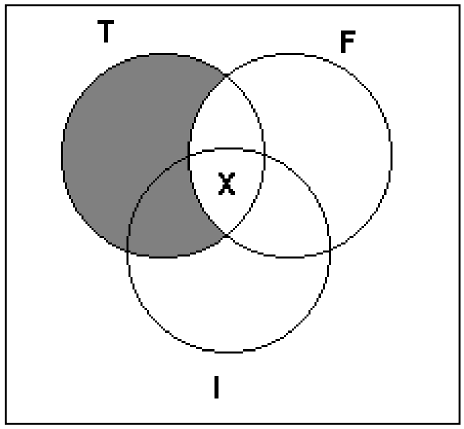


Para provar a validade ou a invalidade de um silogismo categórico, utilizando os diagramas de Venn, devemos representar ambas as premissas em um único diagrama; nesse caso são requeridos três círculos que se interceptam, pois as duas premissas do silogismo incluem três predicados, ou três classes. O silogismo será válido se, e unicamente se, as duas premissas afirmarem em conjunto, o que é dito pela conclusão. Isto é, basta representar através de um diagrama de Venn as duas premissas; se o que se afirma na conclusão ficar também diagramado, o silogismo é válido; caso contrário, será inválido.

Veja os seguintes exemplos:

Tigres são animais ferozes
Alguns tigres vivem na Índia
Logo, alguns animais ferozes vivem na Índia

Temos então três círculos, T para “tigres”, F para “animais ferozes”, e I para “vivem na Índia”; a primeira premissa é da forma Todo T é F, e a segunda, Algum T é I; representando as duas premissas, vem:

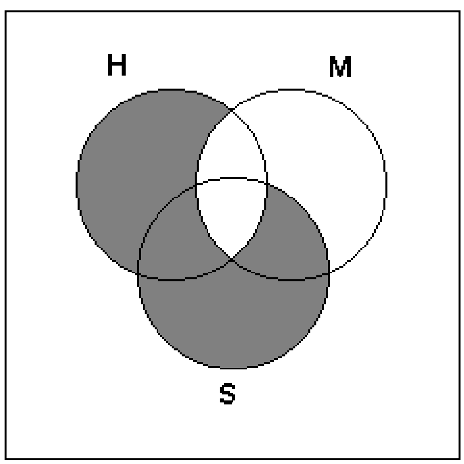


A única possibilidade para incluir o X na interseção de T e I é incluí–lo também em F, o que representa "Algum F é I", que é o que afirma a conclusão, mostrando a validade do silogismo.

Um outro exemplo:

Todos os humanos são mortais
Sócrates é humano
Logo, Sócrates é mortal

Representando "humano", "mortal" e "Sócrates" por H, M e S, respectivamente, e levando em conta que a premissa "Sócrates é humano" pode ser reescrita como "Todo Sócrates é humano", isto é, escrevendo–a na forma Todo S é H, vem:

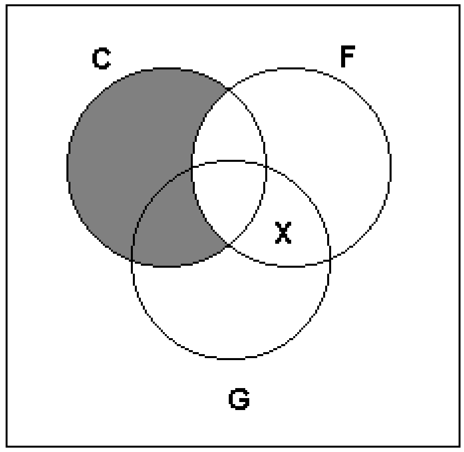


Observe que a única parte da classe S que não é vazia está incluída na classe M, afirmando que Todo S é M, isto é, Sócrates é mortal, indicando que o argumento é válido.

Para terminar, vejamos um argumento inválido:

Todos os cães são ferozes
Alguns gatos são ferozes
Logo, alguns gatos são cães

Representando “cães”, “ferozes”, e “gatos” respectivamente por C, F e G, temos o seguinte diagrama:



Para representar a segunda premissa, “alguns gatos são ferozes”, devemos incluir um X na interseção entre G e F. Essa interseção tem duas regiões, uma interna a C e outra externa, e nada nos obriga a inserir o X dentro de C. Inserindo X na região externa à C, deixamos claro que é possível atender às duas premissas sem atender à conclusão. O argumento é inválido, portanto.

V. DEDUÇÃO NO CÁLCULO DE PREDICADOS

1. Eliminação e Inserção de Quantificadores.

No Cálculo Proposicional podíamos decidir, pelo menos teoricamente, a validade ou invalidade de um argumento, utilizando-se Tabelas Verdade; mas para o Cálculo de Predicados, o matemático e lógico americano A. Church mostrou, em 1936, que quando são envolvidas nas premissas expressões como “Pxy”, “Qxyz”, etc., não existe nenhum processo sistemático para estabelecer a validade dos argumentos.

Os conceitos de argumento, regra de inferência, dedução, etc., permanecem válidos no Cálculo de Predicados, mas a presença de quantificadores, variáveis e predicados nos enunciados, no entanto, traz complicações adicionais.

Uma das formas de se contornar esse problema é definir regras adicionais de inferência, que permitam inserir e/ou eliminar os quantificadores das premissas. Vamos definir quatro novas regras de inferência, duas para eliminar os quantificadores, transformando as expressões em enunciados do Cálculo Proposicional, de forma que possamos utilizar as eqüivalências e inferências já conhecidas, e duas para inserir novamente os quantificadores. Dessa forma, temos um método geral para deduzir os argumentos do Cálculo de Predicados:

1. Elimine os quantificadores das premissas.
2. Deduza a conclusão com as eqüivalências e inferências do Cálculo Proposicional.
3. Insira (se for o caso) os quantificadores na conclusão.

Essas quatro regras são descritas a seguir.

Instanciação Universal

A primeira regra de inferência é chamada Instanciação Universal (abreviada como IU), e pode ser enunciada da seguinte forma:

“Se todos os objetos de um dado universo possuem uma dada propriedade, então um objeto particular desse universo também possui essa propriedade.”

Em outras palavras, estamos dizendo que

$$\forall u\ \theta \rightarrow \varphi$$

onde φ é uma fórmula que resulta de θ pela substituição de cada ocorrência da variável livre u por um termo t, é uma regra de inferência, ou seja, é uma implicação tautológica

Dependendo de θ, a regra de inferência pode assumir muitas formas; veja abaixo algumas delas:

Se $\forall x\ Fx$	então	Fx
Se $\forall x\ Fx$	então	Fy
Se $\forall x\ Fx$	então	Fa
Se $\forall y\ (Fy \vee Gb)$	então	$Fx \vee Gb$
Se $\forall y\ (Fy \vee Gb)$	então	$Fa \vee Gb$
Se $\forall z\ (Fz \vee Gb)$	então	$Fb \vee Gb$

Se $\forall x\ (Fx \wedge \exists x\ (Gx \wedge Hy))$	então	$Fb \wedge \exists x\ (Gx \wedge Hy)$
Se $\forall x\ Gx$	então	Gy
Se $\forall x\ (Gx \rightarrow Hx)$	então	$Gz \rightarrow Hz$
Se $\forall x\ (Fx \wedge Gx)$	então	$Fy \wedge Hy$
Se $\forall x\ (Fx \wedge Gx)$	então	$Fx \wedge Hx$

A aplicação dessa regra pode ser exemplificada no seguinte argumento

Todos os homens são mortais
Sócrates é um homem
Logo, Sócrates é mortal

Representando simbolicamente:

$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$
H (Sócrates)
$\vdash$ M (Sócrates)

Com a dedução:

1	Premissa 1	$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$
2	Premissa 2	H (Sócrates)
3	1, IU	H (Sócrates) $\rightarrow$ M (Sócrates)
4	2, 3, MP	M (Sócrates)

No passo 3, a Instanciação Universal consistiu em substituir, na premissa 1, x por Sócrates.

Generalização Universal

A segunda regra de inferência, Generalização Universal (GU), tem o seguinte enunciado:

"Se um objeto, arbitrariamente escolhido dentre um universo, tiver uma certa propriedade, todos os objetos desse universo terão essa propriedade."

Em termos simbólicos, podemos escrever que

$$\varphi\ u \rightarrow \forall w\ (\varphi\ w)$$

onde φ é uma fórmula e w um objeto arbitrariamente escolhido, é uma regra de inferência.

Qual o significado desta regra ? Como podemos garantir que todos os elementos de um universo possuem dada propriedade ? A resposta está na expressão *arbitrariamente escolhido*. Suponha que um matemático queira provar certa propriedade a respeito dos triângulos; digamos que ele inicia pela frase "seja um triângulo ABC" e prove a propriedade para o triângulo ABC. Se ele não tiver feito nenhuma outra suposição sobre ABC, exceto que se trata de um triângulo, então ABC foi *arbitrariamente escolhido*, e pode ser qualquer triângulo; se a propriedade vale para qualquer triângulo, vale para todos os triângulos.

Eis alguns exemplos dessa regra de inferência:

Se Fx então $\forall x$ Fx
Se Fx então $\forall y$ Fy

Podemos ilustrar a aplicação da regra GU através do seguinte argumento:

Todos os humanos são mortais
Todos os gregos são humanos
Logo, todos os gregos são mortais

Em termos simbólicos:

$\forall x\ (Hx \to Mx)$
$\forall x\ (Gx \to Hx)$
$\vdash\ \forall x\ (Gx \to Mx)$

A dedução:

1	Premissa 1	$\forall x\ (Hx \to Mx)$
2	Premissa 2	$\forall x\ (Gx \to Hx)$
3	1, IU	$Hk \to Mk$
4	2, IU	$Gk \to Hk$
5	2, 3, SH	$Gk \to Mk$
6	5, GU	$\forall x\ (Gx \to Mx)$

Nos passos 3 e 4, a Instanciação Universal consistiu em substituir x pelo mesmo elemento k; como as premissas são verdadeiras "para todo x', são verdadeiras para x = k.

No passo 5, $Gk \to Mk$ diz que "se determinado k é grego, então k é mortal". Mas esse k é qualquer objeto do universo; não houve nenhuma imposição sobre sua escolha; a regra Generalização Universal, aplicada no passo 6 diz então que podemos afirmar "se qualquer objeto do universo é grego, então esse objeto é mortal", que é a conclusão que procurávamos.

Generalização Existencial

A terceira regra de inferência, Generalização Existencial (GE), afirma que:

"O que é verdadeiro para um dado objeto, é verdadeiro para algum objeto."

Em formulação simbólica, a Generalização Existencial pode ser escrita:

$$\varphi w \ \to\ \exists u\ \varphi u$$

onde w é constante ou variável, u é variável, e φw resulta de φu pela substituição das ocorrências livres de u por w; se w for uma variável, deve ocorrer livre em φw nos locais em que u ocorrer livre em φu.

Exemplos de aplicação desta regra de inferência:

Se Fx	então	$\exists y\ Fy$
Se Fa	então	$\exists x\ Fx$
Se Fa	então	$\exists y\ Fy$
Se $Fa \lor Gb$	então	$\exists x\ (Fx \lor Gb)$
Se $Fa \rightarrow Gb$	então	$\exists y\ (Fy \rightarrow Gb)$
Se $Fx \rightarrow Gy$	então	$\exists z\ (Fx \rightarrow Gz)$
Se $Fx \land Gx$	então	$\exists y\ (Fy \land Gy)$
Se $Fx \rightarrow Gx$	então	$\exists y\ (Fy \rightarrow Gy)$

Vamos exemplificar a utilização da regra GE através da dedução do argumento abaixo:

Todos os tigres são animais ferozes
Sheeta é um tigre
Logo, existem animais ferozes

Na forma simbólica

$\forall x\ (Tx \rightarrow Fx)$
$T\ (Sheeta)$
$\vdash \exists x\ Fx$

Com a seguinte dedução:

1	Premissa 1	$\forall x\ (Tx \rightarrow Fx)$
2	Premissa 2	T (Sheeta)
3	1, IU	T (Sheeta) $\rightarrow$ F (Sheeta)
4	2, 3, MP	F (Sheeta)
5	4, GE	$\exists x\ Fx$

No passo 5, a Generalização Existencial afirma que já que Sheeta é um animal feroz, obtido no passo 4, então existe pelo menos um animal feroz (Sheeta, por exemplo).

Instanciação Existencial

Finalmente, a quarta regra de inferência, Instanciação Existencial (IE), tem o seguinte enunciado:

"O que é verdadeiro para algum objeto, é verdadeiro para um dado objeto, desde que esse objeto não tenha sido utilizado anteriormente na dedução."

Em notação simbólica

$$\exists u\ \varphi u \rightarrow \varphi w$$

onde φ é uma fórmula, e desde que w seja variável livre nos locais em que u ocorria livre em φu, e que w não tenha ocorrência livre anterior.

Veja dois exemplos da utilização dessa regra:

Se $\exists x\ Fx$ então Fx
Se $\exists x\ Fx$ então Fy

Vamos exemplificar a aplicação dessa regra, construindo a dedução do seguinte argumento:

Todos os tigres são ferozes
Alguns animais são tigres
Logo, alguns animais são ferozes

Na forma simbólica:

$\forall x\ (Tx \rightarrow Fx)$
$\exists x\ (Ax \wedge Tx)$
$\vdash\ \exists x\ (Ax \wedge Fx)$

1	Premissa 1	$\forall x\ (Tx \rightarrow Fx)$
2	Premissa 2	$\exists x\ (Ax \wedge Tx)$
3	2, IE	$Ak \wedge Tk$
4	1, IU	$Tk \rightarrow Fk$
5	3, SIMP	Ak
6	3, SIMP	Tk
7	4, 6, MP	Fk
8	5, 7, CONJ	$Ak \wedge Fk$
9	8, GE	$\exists x\ (Ax \wedge Fx)$

A premissa 2 diz que "existe um x que é animal e é tigre"; a Instanciação Existencial, no passo 3, consiste em nomear esse elemento como k; como a premissa 1 afirma que a propriedade $Tx \rightarrow Fx$ vale para todo x, a Instanciação Universal, no passo 4, consiste em dizer que essa propriedade vale também para $x = k$.

A aplicação dessas regras de inferência exige certos cuidados, sem os quais podemos obter resultados absurdos.

O primeiro cuidado é o seguinte: ao aplicar a Instanciação Existencial, certifique-se que o termo a ser utilizado não tenha sido utilizado anteriormente na dedução; observe o argumento abaixo:

Alguns cães são ferozes
Alguns gatos são ferozes
Logo, alguns cães são gatos

com a seguinte representação simbólica:

$\exists x\ (Cx \wedge Fx)$
$\exists x\ (Gx \wedge Fx)$
$\vdash\ \exists x\ (Cx \wedge Gx)$

Poderíamos construir, então, a seguinte dedução:

1	Premissa 1	$\exists x\ (Cx \wedge Fx)$
2	Premissa 2	$\exists x\ (Gx \wedge Fx)$
3	1, IE	$Ck \wedge Fk$
4	2, IE	$Gk \wedge Fk$
5	3, SIMP	Ck
6	4, SIMP	Gk
7	3, 4, CONJ	$Ck \wedge Gk$
8	7, GE	$\exists x\ (Cx \wedge Gx)$

Na dedução acima, utilizamos, no passo 3, o termo k na Instanciação Existencial da premissa 1, ou seja, k é o nome do cão feroz; em seguida utilizamos o mesmo k na Instanciação Existencial da premissa 2, isto é, demos o mesmo nome k ao gato feroz. Daí decorre a conclusão de que existe alguém que é, simultaneamente, cão e gato.

Também são necessários alguns cuidados na aplicação da Generalização Existencial. Observe o argumento abaixo:

Para todo animal feroz existe um não feroz
Logo, existe um animal feroz e não feroz.

Em termos simbólicos

$\forall x\ \ Fx \rightarrow \exists y \neg Fy$
$\vdash \exists x\ (Fx \rightarrow \neg Fx)$

Com a seguinte dedução

1	Premissa 1	$\forall x\ Fx \rightarrow \exists y \neg Fy$
2	1, IU	$Fk \rightarrow \exists y \neg Fy$
3	2, IE	$Fk \rightarrow \neg Fj$
4	3, GE	$\exists x\ (Fx \rightarrow \neg Fx)$

Onde está o erro ? A expressão obtida em 3 diz que “se existe um animal feroz (k) existe um não feroz (j)”; o passo seguinte, a Generalização Existencial, substituiu ambos por x, o que não deve ser feito; a forma de se evitar isso, é observar a possibilidade de volta da Generalização Existencial, a Instanciação Existencial. No exemplo, a aplicação de IE sobre a expressão obtida em 4 nunca poderia produzir a obtida no passo 3, pois ambas as ocorrências de x deveriam ser substituídas pelo mesmo termo.

Um terceiro cuidado a ser tomado em uma inferência é não aplicar Generalização Universal às variáveis introduzidas por Instanciação Existencial. Isso decorre do fato de que não se pode generalizar um fato verdadeiro apenas para algum elemento; isto é, de $\exists x\ Fx$ não podemos inferir $\forall x\ Fx$.

2. Eqüivalências e Inferências.

As eqüivalências e inferências definidas para o Cálculo Proposicional estão se mostrando muito úteis na dedução de argumentos no Cálculo de Predicados; mas podemos utilizá–los também para obter eqüivalências e inferências entre expressões com quantificadores e variáveis, o que irá ampliar significativamente sua utilização. Para isso, no entanto, precisamos apresentar alguns conceitos novos.

O primeiro conceito é o de validade lógica, análogo ao conceito de tautologia no Cálculo Proposicional. Dizemos que uma sentença fechada é logicamente válida, se e somente se, qualquer instanciação da sentença em qualquer universo não vazio for uma sentença verdadeira. Em palavras mais simples, uma sentença fechada é dita válida quando sua veracidade não depender da instanciação das variáveis; por exemplo, a sentença

$$\forall x\ Px \rightarrow \exists x\ Px$$

diz que "se todos os elementos x possuírem o predicado P, então existe um x que possui o predicado P", o que verdadeiro, independentemente de quem seja x (desde que o Universo não seja vazio). São exemplos de instanciações dessa sentença: "se todos estão alegres, então existe alguém alegre", e "se todos são números inteiros, então existe um número inteiro".

Dizemos que uma sentença aberta é logicamente válida, se e somente se, qualquer instanciação da sentença em qualquer universo não vazio for satisfeita para todos os objetos. De forma mais simples, um aberto é válido quando seu conjunto verdade for o próprio universo. Por exemplo, o aberto

$$Py \rightarrow \exists x\ Px$$

afirma que "se y possui a propriedade P, então existe um x que possui a propriedade P", o que é satisfeito por todos os objetos de qualquer universo. São exemplos de instanciações dessa sentença: "se y é sábio, então existe um x tal que x é sábio" e "se y é mortal, então existe um x tal que x é mortal".

No Cálculo de Predicados não existe um procedimento sistemático que mostre a validade lógica de um esquema sentencial, como a Tabela Verdade do Cálculo Proposicional. No entanto, é possível mostrar que se um esquema sentencial tiver a forma de um enunciado logicamente válido (uma tautologia) do Cálculo Proposicional, então ele também será logicamente válido.

Esse resultado é extremamente útil, pois permite a construção de um grande número de esquemas sentenciais abertos e fechados logicamente válidos. Eis alguns exemplos de sentenças válidas, por possuírem a forma de tautologias:

Sentenças	**Tautologia**
$Px \vee \neg Px$	$p \vee \neg p$
$\exists x\ Px \vee \neg \exists x\ Px$	$p \vee \neg p$
$\forall x\ Px \vee \neg \forall x\ Px$	$p \vee \neg p$
$\neg [\ \forall x\ Px \wedge \neg \forall x\ Px\ ]$	$\neg (p \wedge \neg p)$
$\exists x\ Px \wedge \exists x\ Qx \rightarrow \exists x\ Px$	$p \wedge q \rightarrow p$
$Px \rightarrow (Px \vee \forall x\ Qx)$	$p \rightarrow p \vee q$

Podemos agora apresentar o conceito de equivalência no Cálculo de Predicados. Dizemos que duas sentenças S_1 e S_2 são equivalentes, e escrevemos $S_1 \Leftrightarrow S_2$, se e somente se $S_1 \leftrightarrow S_2$ for um esquema logicamente válido.

Para obter eqüivalências no Cálculo de Predicados, podemos lançar mão desse mesmo resultado: se uma sentença do Cálculo de Predicados tiver a forma de uma equivalência do Cálculo Proposicional, então também será uma equivalência. Eis alguns exemplos:

Equivalência	**Padrão correspondente**
$\neg (\forall x\, Px \wedge \forall x\, Qx) \Leftrightarrow \neg \forall x\, Px \wedge \neg \forall x\, Qx$	$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
$Py \rightarrow \exists x\, Qx \Leftrightarrow \neg Py \vee \exists x\, Px$	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
$Py \rightarrow \forall x\, Px \Leftrightarrow \neg \forall x\, Px \rightarrow \neg Py$	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Da mesma forma que no Cálculo Proposicional, se duas sentenças S_1 e S_2, do Cálculo de Predicados, diferirem por partes equivalentes, elas são equivalentes; por exemplo, temos que

$$\neg (Py \vee \exists x\, Qx) \rightarrow Rx \text{ é equivalente a } \neg Py \wedge \neg \exists x\, Qx \rightarrow Rx$$

pois $\neg (Py \vee \exists x\, Qx)$ é equivalente a $\neg Py \wedge \neg \exists x\, Qx$.

Em resumo, podemos dizer que:

i) padrões sentenciais, cuja forma é a de padrões sentenciais equivalentes, são equivalentes.
ii) padrões sentenciais que difiram pela ocorrência de partes equivalentes, são equivalentes.

Existem, no entanto, esquemas sentenciais do Cálculo de Predicados que são equivalentes, mas que não têm a forma de enunciados equivalentes. Eis alguns exemplos, rotulados EQ01 a EQ04:

$\neg \forall x\, Px \Leftrightarrow \exists x\, \neg Px$ [EQ01]
$\neg \exists x\, Px \Leftrightarrow \forall x \neg Px$ [EQ02]
$\forall x\, (Px \wedge Qx) \Leftrightarrow \forall x\, Px \wedge \forall x\, Qx$ [EQ03]
$\exists x\, (Px \vee Qx) \Leftrightarrow \exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$ [EQ04]

Da mesma forma que para as eqüivalências, podemos definir inferências no Cálculo de Predicados: dizemos que da sentença S_1 inferimos S_2, e escrevemos $S_1 \Rightarrow S_2$, se e somente se $S_1 \rightarrow S_2$ for um esquema logicamente válido.

Também nesse caso, as inferências do Cálculo Proposicional podem ser utilizados como padrões para inferências no Cálculo de Predicados; eis alguns exemplos:

Inferência	**Padrão correspondente**
$\exists x\, Px \wedge \exists x\, Qx \Rightarrow \exists x\, Px$	$p \wedge q \Rightarrow p$
$\exists x\, Px \Rightarrow \exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$	$p \Rightarrow p \vee q$
$(\exists x\, Px \rightarrow \forall y\, Gy) \wedge (\forall y\, Gy \rightarrow Hz) \Rightarrow \exists x\, Px \rightarrow Hz$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

Como ocorreu com as eqüivalências, o Cálculo de Predicados possui outras inferências, que não correspondem a padrões de inferência nos enunciados. Listamos abaixo algumas delas, rotuladas por INF01 a INF04

$\forall x\ Px \Rightarrow \exists x\ Px$ [INF01]
$\exists x\ (Px \wedge Qx) \Rightarrow \exists x\ Px \wedge \exists x\ Qx$ [INF02]
$\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx \Rightarrow \forall x\ (Px \vee Qx)$ [INF03]
$\forall x\ (Px \rightarrow Qx) \Rightarrow \forall x\ Px \rightarrow \forall x\ Qx$ [INF04]

Essas eqüivalências e inferências nos serão extremamente úteis na dedução de argumentos na Cálculo de Predicados; aquelas que possuem a forma de enunciados tautológicos têm, por esse motivo, sua validade lógica assegurada; mas as demais, que receberam os rótulos EQ01 a EQ04 e INF01 a INF04 necessitam de uma demonstração formal.

Para demonstrar as eqüivalências e inferências, faremos uso da mesma técnica já utilizada para a dedução de argumentos. Para as inferências, essa técnica é adequada, pois as inferências são, na verdade, argumentos nos quais o antecedente é a premissa, e o conseqüente a conclusão. A utilização dessa técnica para a prova de eqüivalências é um pouco mais trabalhosa, pois a equivalência corresponde a duas inferências; isto é, se quisermos mostrar que $S_1 \Leftrightarrow S_2$, devemos mostrar, separadamente, $S_1 \Rightarrow S_2$ e $S_2 \Rightarrow S_1$.

Para iniciar nossas demonstrações, contamos apenas com as eqüivalências e inferências do Cálculo Proposicional, e as quatro regras de inferência IU, GU, IE e GE, para o tratamento de quantificadores; mas, à medida que completarmos nossas demonstrações, cada equivalência e inferência provada amplia nosso repertório, e pode ser utilizada em novas provas.

Ao término, disporemos de um conjunto de eqüivalências e regras de inferência que permitirão deduzir argumentos no Cálculo de Predicados.

Prova de EQ01 e EQ02

As eqüivalências EQ01 e EQ02 correspondem à negação de expressões quantificadas, e já foram provadas, para o caso de universos finitos; mas elas são válidas mesmo para o caso de universos com número infinito de elementos.

Para a equivalência EQ01, $\neg \forall x\ Px \Leftrightarrow \exists x\ \neg Px$, devemos provar os argumentos

$\neg \forall x\ Px$
$\vdash \exists x\ \neg Px$

e

$\exists x\ \neg Px$
$\vdash \neg \forall x\ Px$

Temos, então, para o primeiro:

1	Premissa 1	$\neg \forall x\ Px$
2	1, IU	$\neg Pa$
3	2, GE	$\exists x\ \neg Px$

O segundo será provado por absurdo, isto é, mostraremos

$\exists x \neg Px$
$\forall x\ Px$
$\vdash F$

1	Premissa 1	$\exists x \neg Px$
2	Premissa 2	$\forall x\ Px$
3	1, IE	$\neg Pa$
4	2, IU	Pa
5	3, 4, CONJ	$\neg Pa \wedge Pa$
6	5, EC	F

Tendo provado EQ01, a prova de EQ02 torna–se mais simples. Introduzindo o sinal de negação de ambos os lados, vem:

$$\neg \neg \forall x\ Px \Leftrightarrow \neg \exists x \neg Px$$

Ou seja, levando em conta a equivalência Dupla Negação:

$$\forall x\ Px \Leftrightarrow \neg \exists x \neg Px$$

Finalmente, como Px é qualquer predicado, podemos escrevê–lo como $\neg Px$. Temos então EQ02:

$$\forall x \neg Px \Leftrightarrow \neg \exists x\ Px$$

Prova de EQ03

Em termos textuais, a equivalência EQ03, $\forall x\ (Px \wedge Qx) \Leftrightarrow \forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx$, pode ser ilustrada por "dizer que todos são ricos e famosos eqüivale a dizer que todos são ricos e todos são famosos", o que, intuitivamente, é verdade. Em termos formais, para provar EQ03, devemos provar dois argumentos; eis o primeiro, com sua dedução:

$\forall x\ (Px \wedge Qx)$
$\vdash \forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx$

1	Premissa 1	$\forall x\ (Px \wedge Qx)$
2	1, IU	$Pa \wedge Qa$
3	2, SIMP	Pa
4	3, GU	$\forall x\ Px$
5	2, SIMP	Qa
6	5, GU	$\forall x\ Qx$
7	6, CONJ	$\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx$

Agora, o segundo, com sua dedução

$\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx$
$\vdash \forall x\ (Px \wedge Qx)$

1	Premissa 1	$\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx$
2	1, SIMP	$\forall x\ Px$
3	2, IU	Pa
4	1, SIMP	$\forall x\ Qx$
5	4, IU	Qa
6	3, 5, CONJ	$Pa \wedge Qa$
7	6, GU	$\forall x\ (Px \wedge Qx)$

Prova de EQ04

Em termos textuais, a equivalência EQ04, $\exists x\ (Px \vee Qx) \Leftrightarrow \exists x\ Px \vee \exists x\ Qx$, afirma que "dizer que existem cães ou gatos eqüivale a dizer que existem cães ou existem gatos". Da mesma forma que no caso anterior, essa afirmativa é intuitivamente verdadeira, mas deve ser provada formalmente e sua prova consiste em deduzir os dois argumentos abaixo.

No primeiro argumento,

$\exists x\ (Px \vee Qx)$
$\vdash \exists x\ Px \vee \exists x\ Qx$

a conclusão eqüivale a $\neg \exists x\ Px \rightarrow \exists x\ Qx$, e, utilizando Demonstração Condicional, modifica o argumento para a forma

$\exists x\ (Px \vee Qx)$
$\neg \exists x\ Px$
$\vdash \exists x\ Qx$

cuja dedução é:

1	Premissa 1	$\exists x\ (Px \vee Qx)$
2	Premissa 2	$\neg \exists x\ Px$
3	1, IE	$Pa \vee Qa$
4	2, EQ02	$\forall x\ \neg Px$
5	4, IU	$\neg Pa$
6	3, 5, SD	Qa
7	6, GE	$\exists x\ Qx$

No segundo argumento,

$\exists x\ Px \vee \exists x\ Qx$
$\vdash \exists x\ (Px \vee Qx)$

Podemos utilizar Dedução por absurdo, e o argumento toma a forma:

$\exists x\ Px \vee \exists x\ Qx$
$\neg \exists x\ (Px \vee Qx)$
$\vdash F$

Sua dedução fica:

1	Premissa 1	$\exists x\, Px \vee \exists x\, Qx$
2	Premissa 2	$\neg \exists x\, (Px \vee Qx)$
3	1, IE	$Pa \vee Qa$
4	2, EQ02	$\forall x\, \neg (Px \vee Qx)$
5	4, IU	$\neg (Pa \vee Qa)$
6	3, 6, CONJ	$(Pa \vee Qa) \wedge \neg (Pa \vee Qa)$
7	6, EC	F

Prova de INF01

A inferência INF01, $\forall x\, Px \Rightarrow \exists x\, Px$, pode ser ilustrada por “se todos estão felizes, então alguém está feliz” e corresponde ao argumento

$\forall x\, Px$
$\vdash \exists x\, Px$

tem demonstração imediata:

1	Premissa 1	$\forall x\, Px$
2	1, IU	Pa
3	2, GE	$\exists x\, Px$

Prova de INF02

A inferência INF02, $\exists x\, (Px \wedge Qx) \Rightarrow \exists x\, Px \wedge \exists x\, Qx$, pode ser exemplificada pela frase “se existem bailarinos espanhóis, existem bailarinos e existem espanhóis”. Corresponde ao argumento

$\exists x\, (Px \wedge Qx)$
$\vdash \exists x\, Px \wedge \exists x\, Qx$

e tem a seguinte dedução:

1	Premissa 1	$\exists x\, (Px \wedge Qx)$
2	1, IE	$Pa \wedge Qa$
3	2, SIMP	Pa
4	2, SIMP	Qa
5	3, GE	$\exists x\, Px$
6	4, GE	$\exists x\, Qx$
7	6, CONJ	$\exists x\, Px \wedge \exists x\, Qx$

Prova de INF03

A inferência INF03, $\forall x\, Px \vee \forall x\, Qx \Rightarrow \forall x\, (Px \vee Qx)$ tem como exemplo a frase “se todos são velhos ou todos são crianças, então todos são velhos ou crianças”, cuja validade é intuitiva. Seu argumento correspondente é:

$\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx$
$\vdash\ \forall x\ (Px \vee Qx)$

Utilizando Demonstração por Absurdo, temos o argumento:

$\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx$
$\neg\ \forall x\ (Px \vee Qx)$
$\vdash$ F

com a seguinte demonstração:

1	Premissa 1	$\forall x\ Px \vee \forall x\ Qx$
2	Premissa 2	$\neg\ \forall x\ (Px \vee Qx)$
3	2, EQ01	$\exists x\ \neg\ (Px \vee Qx)$
4	3, IE	$\neg\ (Pa \vee Qa)$
5	1, IU	$Pa \vee Qa$
6	4, 5, CONJ	$\neg\ (Pa \vee Qa) \wedge (Pa \vee Qa)$
7	6, EC	F

Prova de INF04

A última inferência, $\forall x\ (Px \rightarrow Qx) \Rightarrow \forall x\ Px \rightarrow \forall x\ Qx$, tem como exemplo a frase "se todos os humanos são mortais, então, se todos são humanos, todos são mortais", que é, como as anteriores, de validade intuitiva. Seu argumento,

$\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$
$\vdash\ \forall x\ Px \rightarrow Ax\ Qx$

tem um condicional como conclusão; utilizando então Demonstração Condicional, assume a forma

$\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$
$\forall x\ Px$
$\vdash\ \forall x\ Qx$

e sua dedução fica:

1	Premissa 1	$\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$
2	Premissa 2	$\forall x\ Px$
3	1, IU	$Pa \rightarrow Qa$
4	2, IU	Pa
5	3, 4, MP	Qa
6	5, GU	$\forall x\ Qx$

3. Dedução.

Tal como no Cálculo Proposicional, um argumento no Cálculo de Predicados é a afirmação que, dado um conjunto de esquemas sentenciais, um deles, chamado conclusão, decorre logicamente dos demais, chamados premissas; se essa decorrência de fato se verificar, o argumento é dito válido, e, caso contrário, inválido.

Deduzir um argumento, é, pois, obter uma seqüência de esquemas sentenciais φ_1, φ_2, ..., φ_n, onde cada φ_i ou é uma premissa ou resulta das anteriores mediante o uso de eqüivalências e regras de inferência.

Na verdade, quando definimos as quatro regras de inferência IU, GU, IE e GE, e quando validamos as equivalência e inferências EQ01 a EQ04 e INF01 a INF04, já apresentamos deduções, com suas premissas e suas conclusões. Agora, vamos tratar os argumentos do Cálculo de Predicados de uma forma mais ampla.

Infelizmente, não existe um procedimento sistemático que nos permita obter a dedução de um argumento; no máximo, podemos indicar algumas linhas gerais, quando as premissas e a conclusão já estiverem escritas na forma simbólica:

- utilizar as eqüivalências e inferências do Cálculo de Predicados; são elas os esquemas sentenciais cuja forma corresponda a eqüivalências e inferências do Cálculo Proposicional, e aquelas rotuladas EQ01 a EQ04 e INF01 a INF04;

- utilizar as inferências IU e IE, visando eliminar os quantificadores;

- utilizar as eqüivalências e inferências do Cálculo Proposicional, visando chegar à conclusão;

- utilizar as inferências GE e GU, visando reintroduzir os quantificadores na conclusão, se for necessário.

Vamos, então, apresentar uma série de exemplos. Alguns deles são Silogismos Categóricos, que poderiam ter sua validade lógica provada pelos Diagramas de Venn; foram incluídos aqui apenas para exemplificar, de modo simples, o processo de dedução.

Nenhum atleta é apegado aos livros. Carlos é apegado aos livros. Portanto, Carlos não é um atleta.

$\forall x\ (Ax \rightarrow \neg\ Lx)$
L (Carlos)
$\vdash \neg$ A (Carlos)

1	Premissa 1	$\forall x\ (Ax \rightarrow \neg\ Lx)$
2	Premissa 2	L (Carlos)
3	1, IU	A (Carlos) $\rightarrow \neg$ L(Carlos)
4	2, 3, MT	$\neg$ A (Carlos)

Ácidos e bases são químicos. O vinagre é um ácido. Logo, o vinagre é um químico.

$\forall x\ (Ax \vee Bx \rightarrow Qx)$
A (vinagre)
$\vdash$ Q (vinagre)

1	Premissa 1	$\forall x\ (Ax \lor Bx \to Qx)$
2	Premissa 2	A (vinagre)
3	1, IU	A (vinagre) $\lor$ B (vinagre) $\to$ Q (vinagre)
4	2, AD	A (vinagre) $\lor$ B (vinagre)
5	3, 4, MP	Q (vinagre)

Todos os cidadãos que não são traidores estão presentes. Todos os oficiais são cidadãos. Alguns oficiais não estão presentes. Logo, há traidores.

$\forall x\ (Cx \land \neg Tx \to Px)$
$\forall x\ (Ox \to Cx)$
$\exists x\ (Ox \land \neg Px)$
$\vdash \exists x\ Tx$

1	Premissa 1	$\forall x\ (Cx \land \neg Tx \to Px)$
2	Premissa 2	$\forall x\ (Ox \to Cx)$
3	Premissa 3	$\exists x\ (Ox \land \neg Px)$
4	3, IE	$Ok \land \neg Pk$
5	4, SIMP	Ok
6	4, SIMP	$\neg Pk$
7	2, IU	$Ok \to Ck$
8	5,7, MP	Ck
9	6, 8, CONJ	$Ck \land \neg Pk$
10	1, IU	$Ck \land \neg Tk \to Pk$
11	10, COND	$\neg (Ck \land \neg Tk) \lor Pk$
12	11, DM	$\neg Ck \lor Tk \lor Pk$
13	12, COM	$\neg Ck \lor Pk \lor Tk$
14	13, DM	$\neg (Ck \land \neg Pk) \lor Tk$
15	14, COND	$Ck \land \neg Pk \to Tk$
16	9, 15, MP	Tk
17	16, GE	$\exists x\ Tx$

Se alguém cometer um erro e ninguém se acusar, todos serão punidos. Todos cometeram erros. Logo, se alguém não foi punido, alguém se acusou.

$\exists x\ Ex \land \forall x \neg Ax \to \forall x\ Px$
$\forall x\ Ex$
$\vdash \exists x \neg Px \to \exists x\ Ax$

Utilizando Demonstração por Condicional:

$\exists x\ Ex \land \forall x \neg Ax \to \forall x\ Px$
$\forall x\ Ex$
$\exists x\ \neg Px$
$\vdash \exists x\ Ax$

1	Premissa 1	$\exists x\ Ex \wedge \forall x \neg Ax \rightarrow \forall x\ Px$
2	Premissa 2	$\forall x\ Ex$
3	Premissa 3	$\exists x \neg Px$
4	2, INF01	$\exists x\ Ex$
5	3, EQ01	$\neg \forall x\ Px$
6	1, COND	$\neg (\exists x\ Ex \wedge \forall x \neg Ax) \vee \forall x\ Px$
7	5, 6, SD	$\neg (\exists x\ Ex \wedge \forall x \neg Ax)$
8	7, DM	$\neg \exists x\ Ex \vee \neg \forall x \neg Ax$
9	4, 8, SD	$\neg \forall x \neg Ax$
10	9, EQ01	$\exists x \neg\neg Ax$
11	10, DN	$\exists x\ Ax$

4. Invalidade.

Em Cálculo Proposicional, um método que procurava indicar a invalidade de um argumento consistia em atribuir valores verdade aos enunciados simples componentes das proposições, de forma a tornar as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Esse método pode ser adaptado aos argumentos que incluem quantificadores, mas essa adaptação envolve a suposição de que exista pelo menos um indivíduo no universo.

É claro que podem existir um, dois, três ou mais indivíduos no universo; o argumento será válido se for válido com um indivíduo, com dois indivíduos, com três indivíduos, e assim por diante. Isto é, um argumento que envolve quantificadores será válido se e somente se for válido independentemente do número de indivíduos do universo, desde que exista pelo menos um.

Veja, como exemplo, o seguinte argumento:

Todos os mercenários são violentos
Nenhum guerrilheiro é mercenário
Logo, nenhum guerrilheiro é violento

que, em termos simbólicos, assume a forma:
$\forall x\ (Mx \rightarrow Vx)$
$\forall x\ (Gx \rightarrow \neg Mx)$
$\vdash \forall x\ (Gx \rightarrow \neg Vx)$

Suponha que exista apenas um indivíduo no universo, digamos a; o argumento assume a forma:

$Ma \rightarrow Va$
$Ga \rightarrow \neg Ma$
$\vdash Ga \rightarrow \neg Va$

Para que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa, temos:

a) VL $[Ma \rightarrow Va] = V$
b) VL $[Ga \rightarrow \neg Ma] = V$
c) VL $[Ga \rightarrow \neg Va] = F$

De (c) vem: VL [Ga] = V e VL [Va] = V. Substituindo em (a) e (b), temos:

d) VL [Ma $\rightarrow$ V] = V
e) VL [V $\rightarrow \neg$ Ma] = V

Fazendo VL [Ma] = F, as duas condições ficam satisfeitas, o que mostra a invalidade do argumento.

Vejamos outro exemplo; considere o argumento

Todos os perdigueiros são afetuosos
Alguns perdigueiros são cães de guarda
Logo, todos os cães de guarda são afetuosos

Simbolicamente:

$\forall$x (Px $\rightarrow$ Ax)
$\exists$x (Px $\wedge$ Gx)
$\vdash$ $\forall$x (Gx $\rightarrow$ Ax)

Se existir apenas um perdigueiro no universo, ele será afetuoso (pela premissa 1) e será cão de guarda (pela premissa 2). Portanto, a conclusão “todo cão de guarda é afetuoso” fica satisfeita.

Mas se considerarmos a existência de dois indivíduos, um perdigueiro (chamado Rex, por exemplo) e um cão de guarda (chamado Fido, digamos) que não seja perdigueiro, a situação se modifica. De fato, como Rex é o único perdigueiro, será afetuoso (pela premissa 1) e cão de guarda (pela premissa 2); mas as premissas não fazem nenhuma exigência sobre Fido, que é um cão de guarda, mas pode não ser afetuoso, e a conclusão “todo cão de guarda é afetuoso” não se verifica, e o argumento mostra-se inválido.

Em termos formais, com um único indivíduo chamado a no Universo, teríamos:

Pa $\rightarrow$ Aa
Pa $\wedge$ Ga
$\vdash$ Ga $\rightarrow$ Aa
Então:

a) VL [Pa $\rightarrow$ Aa] = V
b) VL [Pa $\wedge$ Ga] = V
c) VL [Ga $\rightarrow$ Aa] = F

De (c), vem: VL [Ga] = V e VL [Aa] = F; substituindo em (a) e (b):

d) VL [Pa $\rightarrow$ F] = V
e) VL [Pa $\wedge$ V] = V

De (d), VL [Pa] = V, e de (e), VL [Pa] = F o que indica que as condições de invalidade não podem ser satisfeitas, para um único indivíduo no Universo, como esperávamos.

No entanto, considerando que existam dois elementos, a e b, no Universo, o argumento assume a forma:

$(Pa \rightarrow Aa) \wedge (Pb \rightarrow Ab)$
$(Pa \wedge Ga) \vee (Pb \wedge Gb)$
$\vdash (Ga \rightarrow Aa) \wedge (Gb \rightarrow Ab)$

Portanto, fazemos:

a) $VL [(Pa \rightarrow Aa) \wedge (Pb \rightarrow Ab)] = V$
b) $VL [(Pa \wedge Ga) \vee (Pb \wedge Gb)] = V$
c) $VL [(Ga \rightarrow Aa) \wedge (Gb \rightarrow Ab)] = F$

Quando consideramos o Universo com um único elemento, vimos que se $VL [Pa \rightarrow Aa] = V$ e $VL [Pa \wedge Ga] = V$ então $VL [Ga \rightarrow Aa] = V$. Substituindo esses valores no sistema vem:

d) $VL [V \wedge (Pb \rightarrow Ab)] = V$
e) $VL [V \vee (Pb \wedge Gb)] = V$
f) $VL [V \wedge (Gb \rightarrow Ab)] = F$

A igualdade (e) pode ser abandonada, pois quaisquer valores satisfazem; de (d) e de (f), vem:

g) $VL [Pb \rightarrow Ab] = V$
h) $VL [Gb \rightarrow Ab] = F$

Se fizermos $VL [Gb] = V$, $VL [Ab] = F$ e $VL [Pb] = F$, as condições ficam satisfeitas, mostrando que o argumento é inválido.

5. Subargumentos.

À medida que o número de premissas e/ou o número de predicados envolvidos em um argumento assume proporções maiores, a dificuldade em deduzir a conclusão ou de provar a invalidade do argumento cresce significativamente. Nessa situação podemos utilizar um método muito simples, e que consiste basicamente em:

- escolher uma ou mais premissas no argumento dado;
- obter uma conclusão com essas premissas, construindo um subargumento válido;
- incluir a conclusão obtida como mais uma premissa no argumento original.

Repetir o processo até obter a conclusão do argumento original, ou ficar convencido que isso não será possível.

Usualmente, as premissas utilizadas podem ser desconsideradas, pois é pouco provável que sejam necessárias em outro subargumento; dessa forma, o número de premissas do argumento original vai sendo reduzido.

O argumento original é então transformado em uma cadeia de subargumentos, onde a conclusão de cada um deles é utilizada como premissa de um subargumento subsequente, exceto o último, que terá a conclusão do argumento original. Se todos os subargumentos forem válidos, o argumento original também o será.

Esse processo pode ser considerado tambem como o estabelecimento de um roteiro para a dedução do argumento original. As conclusões dos subargumentos podem ser consideradas como submetas no processo de dedução.

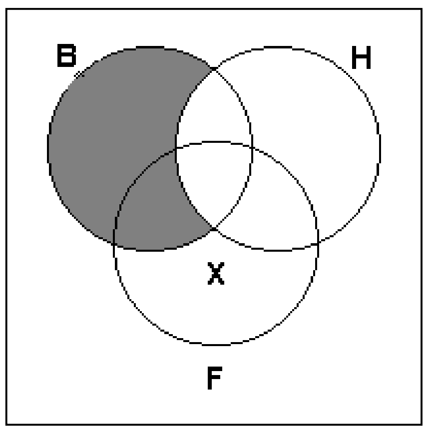
Vamos apresentar alguns exemplos, para ilustrar a apresentação do processo.

Alguns fotógrafos são habilidosos.
Só artistas são fotógrafos.
Os fotógrafos não são todos habilidosos.
Todo biscateiro é habilidoso.
Logo, alguns artistas não são biscateiros.

Escolhendo a terceira e quarta premissa, e escrevendo–as na forma típica:

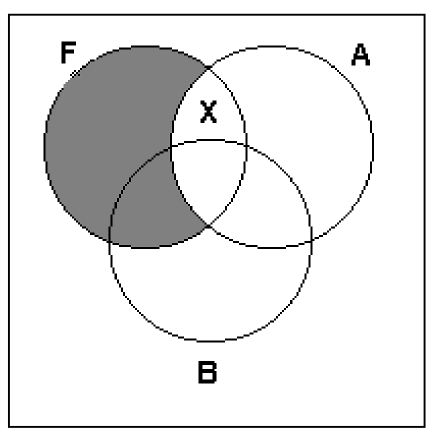
Todo biscateiro é habilidoso
Alguns fotógrafos não são habilidosos
Logo, alguns fotógrafos não são biscateiros

Este argumento é um silogismo categórico, e sua validade pode ser provada pelo Diagrama de Venn, abaixo; observe que as proposições gerais devem ser colocadas antes das particulares.



Substituindo as duas premissas utilizadas pela conclusão obtida, e escrevendo a outra premissa na forma típica, temos outro silogismo categórico, cuja validade pode ser provada pelo Diagrama de Venn:

Todos os fotógrafos são artistas.
Alguns fotógrafos não são biscateiros.
Logo, alguns artistas não são biscateiros.



Um argumento como esse, em que as premissas e a conclusão podem ser escritas na forma típica, recebe o nome de Sorites.

Vejamos outro exemplo:

Se qualquer comida não tem sabor, algum cozinheiro é negligente.
Todos os cozinheiros são pessoas.
Toda pessoa negligente é incompetente.
Nenhuma comida sem sal tem sabor.
Logo, se não há pessoas incompetentes, alguma comida tem sal

Utilizando Demonstração Condicional:

Se qualquer comida não tem sabor, algum cozinheiro é negligente.
Todos os cozinheiros são pessoas.
Toda pessoa negligente é incompetente.
Nenhuma comida sem sal tem sabor.
Não há pessoas incompetentes.
Logo, alguma comida tem sal.

Escolhendo a terceira e quinta premissas:

Toda pessoa negligente é incompetente
Não há pessoas incompetentes.
Logo, não há pessoas negligentes.

Na forma simbólica:

$\forall x\ (Px \wedge Nx \to Ix)$
$\neg \exists x\ (Px \wedge Ix)$
$\vdash \neg \exists x\ (Px \wedge Nx)$

1	Premissa 1	$\forall x\ (Px \wedge Nx \to Ix)$
2	Premissa 2	$\neg \exists x\ (Px \wedge Ix)$
3	2, EQ02	$\forall x \neg (Px \wedge Ix)$
4	3, DM	$\forall x\ (\neg Px \vee \neg Ix)$
5	4, COM	$\forall x\ (\neg Ix \vee \neg Px)$
6	5, COND	$\forall x\ (Ix \to \neg Px)$
7	1, 6, CONJ	$\forall x\ (Px \wedge Nx \to Ix) \wedge \forall x\ (Ix \to \neg Px)$
8	7, EQ03	$\forall x\ [(Px \wedge Nx \to Ix) \wedge (Ix \to \neg Px)]$
9	8, SH	$\forall x\ (Px \wedge Nx \to \neg Px)$
10	9, COND	$\forall x\ (\neg (Px \wedge Nx) \vee \neg Px)$
11	10, DM	$\forall x\ (\neg Px \vee \neg Nx \vee \neg Px)$
12	11, ID	$\forall x\ (\neg Px \vee \neg Nx)$
13	12, DM	$\forall x\ \neg (Px \wedge Nx)$
14	13, EQ02	$\neg \exists x\ (Px \wedge Nx)$

A demonstração da validade deste argumento ficaria enormemente reduzida, se considerássemos a primeira premissa, como “toda pessoa negligente é uma pessoa incompetente”; nesse caso não haveria necessidade de considerar “pessoa” como um predicado à parte (os predicados seriam “pessoa negligente” e “pessoa incompetente”). Em termos estritamente formais, no entanto, considerar “pessoa incompetente” como predicado, ao invés de “incompetente” representa uma modificação no texto do argumento.

Retirando as premissas e incluindo a conclusão desse subargumento, o argumento original se torna:

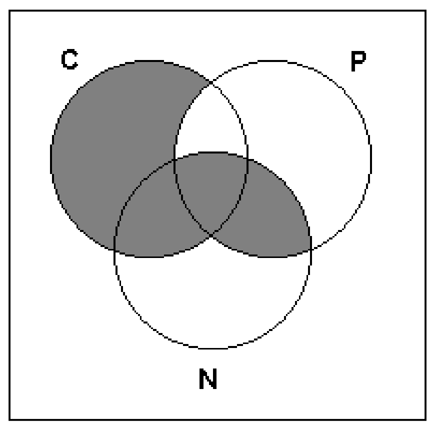
Se qualquer comida não tem sabor, algum cozinheiro é negligente.
Todos os cozinheiros são pessoas.
Nenhuma comida sem sal tem sabor.
Não há pessoas negligentes.
Logo, alguma comida tem sal.

Podemos então fazer:

Todos os cozinheiros são pessoas.
Não há pessoas negligentes.
Logo, não há cozinheiros negligentes.

Este é um silogismo categórico e pode ser escrito na forma típica e provado como abaixo:

Todos os cozinheiros são pessoas.
Nenhuma pessoa é negligente.
Logo, nenhum cozinheiro é negligente.



Agora, o argumento original assume a forma:

Se qualquer comida não tem sabor, algum cozinheiro é negligente.
Nenhum cozinheiro é negligente.
Nenhuma comida sem sal tem sabor.
Logo, alguma comida tem sal.

Escolhendo as duas primeiras premissas, temos:

Se qualquer comida não tem sabor, algum cozinheiro é negligente.
Nenhum cozinheiro é negligente.
Logo, alguma comida tem sabor

Na forma simbólica, utilizando M para “comida” e B para “sabor”:

$\forall x\ (Mx \rightarrow \neg\ Bx) \rightarrow \exists x\ (Cx \wedge Nx)$
$\neg\ \exists x\ (Cx \wedge Nx)$
$\vdash\ \exists x\ (Mx \wedge Bx)$

1	Premissa 1	$\forall x\ (Mx \rightarrow \neg\ Bx) \rightarrow \exists x\ (Cx \wedge Nx)$
2	Premissa 2	$\neg\ \exists x\ (Cx \wedge Nx)$
3	1, 2, MT	$\neg\ \forall x\ (Mx \rightarrow \neg\ Bx)$
4	3, COND	$\neg\ \forall x\ (\neg\ Mx \vee \neg\ Bx)$
5	4, DM	$\neg\ \forall x\ \neg\ (Mx \wedge Bx)$
6	5, EQ01	$\exists x\ \neg\ \neg\ (Mx \wedge Bx)$
7	6, DN	$\exists x\ (Mx \wedge Bx)$

Finalmente, o argumento original fica reduzido a

Alguma comida tem sabor
Nenhuma comida sem sal tem sabor.
Logo, alguma comida tem sal.

com a seguinte forma simbólica:

$\exists x\ (Cx \wedge Bx)$
$\neg\ \exists x\ (Cx \wedge \neg\ Sx \wedge Bx)$
$\vdash\ \exists x\ (Cx \wedge Sx)$

1	Premissa 1	$\exists x\ (Cx \wedge Bx)$
2	Premissa 2	$\neg\ \exists x\ (Cx \wedge \neg\ Sx \wedge Bx)$
3	1, IE	$Ck \wedge Bk$
4	3, SIMP	Ck
5	2, EQ02	$\forall x\ \neg\ (Cx \wedge \neg\ Sx \wedge Bx)$
6	5, IU	$\neg\ (Ck \wedge Bk \wedge \neg\ Sk)$
7	6, DM	$\neg\ (Ck \wedge Bk) \vee Sk$
8	3, 7, SD	Sk
9	4, 8, CONJ	$Ck \wedge Sk$
10	9, GE	$\exists x\ (Cx \wedge Sx)$

Quando esta cadeia de subargumentos como essa não puder ser construida, o argumento original é inválido. E como sabemos que a cadeia não pode ser construida ? Observe que o processo consiste em construir $n - 1$ subargumentos válidos, utilizando as premissas; o útimo subargumento deve ter as premissas que ainda restam e a conclusão do argumento original. Se este último for inválido, o argumento original tambem o será.

Vamos ver um último exemplo, com um argumento inválido:

Todas as crianças doentes foram medicadas.
Todos os que se expuseram à radiação e não estavam protegidos ficaram doente.
Todos são crianças.
Alguém não foi medicado.
Logo, nem todos se expuseram à radiação.

Convencionando: Cx – x é criança Dx – x é doente Mx – x foi medicado
Rx – x se expôs à radiação Px – x estva protegido

o argumento assume a forma:

$\forall x\ (Cx \wedge Dx \rightarrow Mx)$
$\forall x\ (Rx \wedge \neg\ Px \rightarrow Dx)$
$\forall x\ Cx$
$\exists x \neg\ Mx$
$\vdash \neg\ \forall x\ Rx$

Utilizando a primeira e terceira premissas:

Todas as crianças doentes foram medicadas
Todas eram crianças
Logo, todos os que estavam doente foram medicados

Ou, em termos simbólicos:

$\forall x\ (Cx \wedge Dx \rightarrow Mx)$
$\forall x\ Cx$
$\vdash\ \forall x\ (Dx \rightarrow Mx)$

A demonstração é simples, e é deixada ao leitor.

O segundo argumento utiliza a conclusão obtida e a quarta premissa:

Todos os que estavam doente foram medicados
Alguém não foi medicado
Logo, alguém não estava doente.

Este argumento também é claramente válido, e deixamos ao leitor a tarefa de obter a forma simbólica e provar a validade.

Resta uma única premissa ainda não utilizada; para que o argumento original fosse válido, seria necessário que este último subargumento fosse válido:

Todos os que receberam a radiação e não estavam protegidos ficaram doente.
Alguém não ficou doente.
Logo, nem todos receberam radiação.

Em termos simbólicos:

$\forall x\ (Rx \wedge \neg\ Px \rightarrow Dx)$
$\exists x \neg\ Dx$
$\vdash \neg\forall x\ Rx$

Com um único elemento k no Universo, o argumento assume a forma

$Rk \land \neg Pk \rightarrow Dk$
$\neg Dk$
$\vdash \neg Rk$

Fazendo VL [Rk] = V, VL [Dk] = F e VL [Pk] = V, as premissas tornam-se verdadeiras e a conclusão falsa, o que mostra que o argumento é inválido. Para provar que o argumento original é inválido, temos que obter os valores dos outros predicados para o elemento k. Considerando um único elemento k no argumento original, e estabelecendo a condição de invalidade, vem:

VL [$Ck \land Dk \rightarrow Mk$] = V
VL [$Rk \land \neg Pk \rightarrow Dk$] = V
VL [Ck] = V
VL [$\neg$ Mk] = V
VL [$\neg$ Rk] = F

Substituindo os valores já obtidos

VL [$Ck \land F \rightarrow Mk$] = V
VL [$V \land \neg V \rightarrow F$] = V
VL [Ck] = V
VL [$\neg$ Mk] = V
VL [$\neg$ V] = F

o que fornece VL [Ck] = V e VL [Mk] = F.

Bibliografia

[1] - Alencar Filho, Edgard, Iniciação à Lógica Matemática, Ed. Nobel, São Paulo, SP, 1995.

[2] - Copy, Irving M., Introdução à Lógica, Ed. Mestre Jou , São Paulo, SP, 1974.

[3] - Gersting, Judith L., Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação, 3ª edição, Livros Técnicos e Científicos Ed. Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 1995.

[4] - Hegenberg, Leônidas, Lógica Simbólica, Ed. Herder, São Paulo, SP, 1966.

[5] - Hegenberg, Leônidas, Lógica: o Cálculo de Predicados. Ed. Herder, São Paulo, SP, 1973.

[6] - Hegenberg, Leônidas, Lógica: Simbolização e Dedução, Ed. Pedagógica e Universitária, São Paulo, SP, 1975.

[7] - Mates, Benson, Lógica Elementar, Cia. Editora Naional, São Paulo, SP, 1968.

[8] - Stolyar, A. S., Introduction to Elementary Mathematical Logic, Dover Publs. Inc.., NY, USA, 1970.