SIST INF DERIVADAS TEORIA

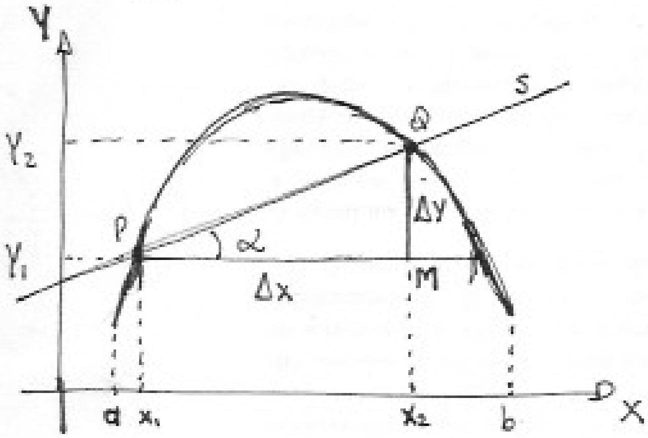
⇒ Revisão de equação da reta, traçando gráfico de uma reta como exemplo

⇒ A derivada representa a inclinação de uma curva num ponto.

A RETA TANGENTE

⇒ Vamos definir a inclinação de uma curva $y=f(x)$ e, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

⇒ Seja $y=f(x)$ uma curva definida no intervalo (a,b), como mostrado na figura abaixo:

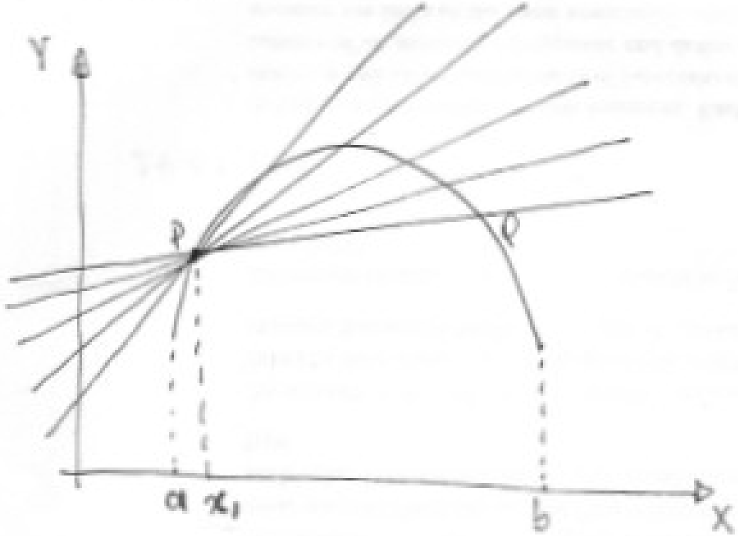


⇒ Sejam $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$ dois pontos distintos da curva $y=f(x)$.

⇒ Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo retângulo PMQ, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é:

$$tg\,\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

⇒ Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Diante disto, a inclinação da reta secante S variará.



⇒ À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante

— " — " —

<u>DEFINIÇÃO</u>: Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

quando o limite existe.

⇒ Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ podemos reescrever o limite na forma:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P.

— " — " —

EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE

⇒ Se a função $f(x)$ é contínua em x_1, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$ é:

(i) A reta que passa por P tendo inclinação

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

, se este limite existe. Neste caso, temos a equação:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

(ii) A reta $x = x_1$ se $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ for infinito.

EXEMPLOS:

① Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então

$$f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1 \quad e$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 2(x_1 + \Delta x) + 1$$

$$= x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1$$

~~Temos~~ que: $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Logo: $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_1^2} + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{2x_1} - 2\Delta x + \cancel{1} - \cancel{x_1^2} + \cancel{2x_1} - \cancel{1}}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x_1 + \Delta x - 2)}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_1 + \Delta x - 2) \Rightarrow m(x_1) = 2x_1 - 2$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) é

$$m(x_1) = 2x_1 - 2$$

② Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2+3$ no ponto cuja abscissa é 2. 7/8/04

⇒ O ponto da curva $y = 2x^2+3$, cuja abscissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = (2, 11)$.

⇒ Vamos encontrar a inclinação da curva $y = 2x^2+3$ no ponto P. Para isso, precisamos encontrar, primeiro, a inclinação da curva no ponto (x_1, y_1). Logo, temos:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1+\Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2+3)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x_1^2} + 4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2 \cancel{+3} \cancel{-2x_1^2} \cancel{-3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x_1 + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow$$

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} (4x_1 + 2\Delta x) = 4x_1 \therefore m(x_1) = 4x_1$$

⇒ Como $m(x_1) = 4x_1$, então $m(2) = 4(2) = 8$.

⇒ Temos que: $y - f(x_1) = m(x - x_1)$

Logo: $y - 11 = 8(x-2)$, ou ainda,

$$y - 11 = 8x - 16 \Rightarrow y = 8x - 16 + 11 = 8x - 5 \therefore y = 8x - 5$$

③ Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$, que seja paralela à reta $8x - 4y + 1 = 0$.

obs: retas paralelas ⇒ coeficientes angulares iguais.

⇒ Vamos primeiro encontrar a inclinação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ num ponto (x_1, y_1). Temos:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1}}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}{\Delta x (\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_1} + \cancel{\Delta x} - \cancel{x_1}}{\cancel{\Delta x} (\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})} \Rightarrow$$

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \therefore m(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

⇒ Como a reta que queremos deve ser paralela a $8x - 4y + 1 = 0$, vamos calcular este coeficiente angular e igualá-lo a $m(x_1)$.

Logo, temos que:

$$4y = 8x + 1 \Rightarrow y = \frac{8x + 1}{4} = 2x + 1/4 \therefore y = 2x + 1/4 \Rightarrow m = 2.$$

Logo, podemos escrever que:

$$m(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = 2 \Rightarrow 1 = 4\sqrt{x_1} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \therefore x_1 = 1/16$$

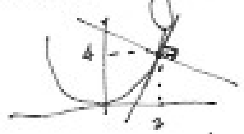
⇒ Portanto, a reta que queremos é a reta tangente à curva $y=\sqrt{x}$ no ponto $(1/16, f(1/16))$, ou seja, no ponto $(1/16, 1/4)$. Logo, temos que:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1/4 = 2(x - 1/16) \Rightarrow 16y - 4 = 32x - 2 \Rightarrow$$

$$16y = 32x + 2 \Rightarrow y = 2x + 1/8$$

═══ " ═══ " ═══

④ Encontre a equação para a reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$.



obs: lembrar que a reta normal a uma curva num ponto dado é a reta perpendicular à reta tangente neste ponto.

Duas retas t e n são perpendiculares se

$m_t \cdot m_n = -1$

onde m_t e m_n são as inclinações das retas t e n, respectivamente, num dado ponto P.

═══ " ═══ " ═══

Vamos então calcular a inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2,4)$. Temos:

$$m_t(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$m_t(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_1^2} + 2x_1 \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x_1^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x_1 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x_1 \therefore m_t(x_1) = 2x_1$$

⇒ Quando $x_1 = 2$, temos $m_t(2) = 2 \cdot 2 = 4$

⇒ Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto P(2,4

⇒ Como o produto da inclinação de duas retas perpendiculares é ig

a -1, a inclinação da reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$

dada por:

$m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow 4 m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{4}$ → inclinação da reta normal à curva $y = x^2$ no ponto P(2,

⇒ Aplicando os dados à equação da reta, temos:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow 4y - 16 = -x + 2 \Rightarrow$$

$4y = -x - 18 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{2}$ → reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2,4)$.

⇒ Graficamente, este exemplo é ilustrado abaixo: