Uma palavra aos alunos e professores

O Banco de Questões foi concebido por solicitação de alunos e professores que têm participado da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Com o objetivo de facilitar e motivar a preparação dos alunos para as provas, o Banco de Questões inspirou a criação de diversos clubes de matemática nas escolas para trabalhar com esse material.

Nesses 3 anos temos recebido, com muita alegria, mensagens de alunos e professores informando-nos sobre incorreções no Banco de Questões, tais como erros de digitação, trocas de resposta, e alguns também nos oferecem outras soluções de alguns problemas. Essa troca tem propiciado um diálogo interessante e um maior conhecimento recíproco entre a equipe da OBMEP e a rede pública escolar. Aproveitamos para agradecer essa colaboração.

Os alunos e professores que têm usado o Banco de Questões nesses 3 anos de existência da OBMEP vão reparar que ele não segue um modelo rígido, a cada ano mudamos o seu formato, a quantidade e a dificuldade dos problemas. Esperamos dessa forma contribuir para dar aos alunos e professores uma visão bem abrangente do mundo fascinante que é o dos problemas de matemática.

Parte dos problemas aqui apresentados fazem parte de provas de olimpíadas nacionais e internacionais. Dessa forma pretendemos colocar os alunos da rede pública em contato com o mesmo tipo de preparação que têm seus colegas em diversos países.

Os problemas estão agrupados nos 3 níveis por questão de organização; no entanto aconselhamos todos os alunos a "passearem" também em outros níveis diferentes do seu, e lembrem-se que é absolutamente natural encontrar dificuldades em alguns problemas - elas devem ser vistas como desafios e não como motivo de desânimo.

Desejamos que esse Banco de Questões torne o estudo da Matemática em sua escola mais motivante e instigador.

Direção Acadêmica
da OBMEP

Organizado por:

- Suely Druck (UFF)
- Maria Elasir Seabra Gomes (UFMG)

Com a colaboração de:

- Ana Lúcia da Silva (UEL)
- Edson Roberto Abe (Colégio Objetivo)
- Fábio Brochero (UFMG)
- Francisco Dutenhefner (UFMG)

Conteúdo

Uma palavra aos alunos e professores **i**

Nível 1 **1**

Lista 1 1
Lista 2 3
Lista 3 5
Lista 4 7
Lista 5 9
Lista 6 10

Nível 2 **11**

Lista 1 11
Lista 2 13
Lista 3 14
Lista 4 15
Lista 5 17
Lista 6 18

Nível 3 **19**

Lista 1 19
Lista 2 21
Lista 3 23
Lista 4 25
Lista 5 27
Lista 6 29

Soluções do Nível 1 **31**

Lista 1 31
Lista 2 35
Lista 3 39
Lista 4 43
Lista 5 45
Lista 6 48

Soluções do Nível 2 **51**

Lista 1 51
Lista 2 55
Lista 3 59
Lista 4 63
Lista 5 67
Lista 6 70

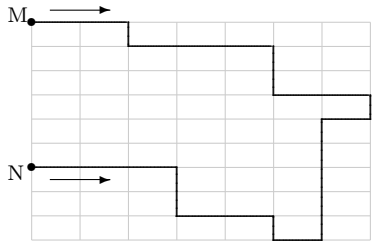
Soluções do Nível 3 **73**

Lista 1 73
Lista 2 77
Lista 3 82
Lista 4 88
Lista 5 92
Lista 6 97

Nível 1

Lista 1

1. ***O trajeto das formiguinhas -*** As formiguinhas Maricota e Nandinha passeiam numa varanda cujo chão é formado por lajotas retangulares de $4\,cm$ de largura por $6\,cm$ de comprimento. Maricota parte do ponto M e Nandinha do N, andando ambas apenas pelos lados dos retângulos, percorrendo o trajeto no sentido indicado na figura.



   (a) As duas se encontram depois de andarem a mesma distância. Qual foi essa distância?

   (b) Aonde elas se encontraram?

2. ***A soma é 100 -*** A soma de 3 números é 100, dois são primos e um é a soma dos outros dois.

   (a) Qual é o maior dos 3 números?

   (b) Dê um exemplo desses 3 números.

   (c) Quantas soluções existem para esse problema?

3. ***Código de barras -*** Um serviço postal usa barras curtas e barras longas para representar o Código de Endereçamento Postal - CEP. A barra curta corresponde ao zero e a longa ao 1. A primeira e a última barra não fazem parte do código. A tabela de conversão do código é mostrada abaixo.

$11000 = 0$	$01100 = 5$
$00011 = 1$	$10100 = 6$
$01010 = 2$	$00001 = 7$
$00101 = 3$	$10001 = 8$
$00110 = 4$	$10010 = 9$

   (a) Escreva os CEP 36470130 na forma de código de barras.

   (b) Identifique o CEP que representa o código de barras abaixo:

4. ***Atletas da escola -*** Numa escola, um quarto dos alunos joga somente vôlei, um terço joga somente futebol, 300 praticam os dois esportes e 1/12 nenhum deles.

   (a) Quantos alunos tem a escola?

   (b) Quantos alunos jogam somente futebol?

   (c) Quantos alunos jogam futebol?

   (d) Quantos alunos praticam um dos 2 esportes?

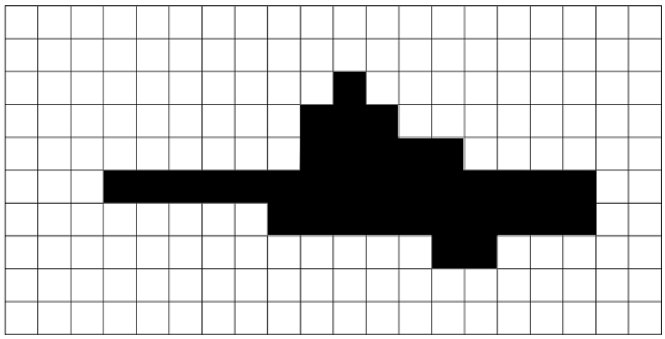
5. ***Dízima periódica -*** Qual é o algarismo da 1997ª casa decimal de:

   (a) $\frac{1}{22}$ (b) $\frac{1}{27}$

Lista 2

1. ***Ana na corrida -*** Para ganhar uma corrida, Ana deve completar os últimos $5\,km$ em menos de 20 minutos. Qual deve ser sua velocidade em km/h?

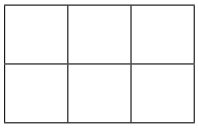
2. ***Quadradinhos e o buraco -*** Quantos quadradinhos foram retirados do tabuleiro 10x20? Se o lado de cada quadradinho mede $1\,cm$, qual é a área e o perímetro do "buraco"?



3. ***Quadrados perfeitos no retângulo -*** Complete as seis casas da tabela, colocando um algarismo em cada uma, de modo que os dois números de três algarismos formados na horizontal e os três números de dois algarismos formados na vertical sejam quadrados perfeitos.

   (a) Quais são os números?

   (b) Quantas soluções existem?



4. ***Aula de divisão -*** Na aula sobre divisão a professora pediu que seus alunos colocassem números no lugar das estrelas. Quais são esses números?

$$\begin{array}{r|l} 38 & \bigstar \\ \hline 4 & \star \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 12 \\ \hline \bigstar & \star \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \star & 3 \\ \hline \bigstar & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & \star \\ \hline \bigstar & 5 \end{array}$$

5. ***A festa de Rosa -*** Os convidados para festa de aniversário de Rosa começaram a chegar a partir das 18 horas. Maria chegou na meia hora depois de Cecília, mas meia hora antes de Alice. Rosa soprou as velinhas às 21 horas e apenas Cecília não estava, ela tinha outra festa e já tinha ido embora. Alice foi a última convidada a ir embora, às 23h15min. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

   (a) Cecília ficou menos do que 3 horas na festa.

   (b) Cecília ficou menos tempo na festa do que Maria.

   (c) Alice ficou mais tempo na festa do que Maria.

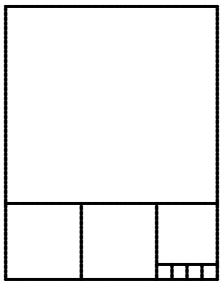
Lista 3

1. ***Linhas de ônibus -*** No ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, existem duas linhas de ônibus que ele pode usar para ir a escola: uma passa de 15 em 15 minutos e a outra de 25 em 25 minutos.

   (a) Se os dois ônibus passaram juntos às $7\,h\,30\,min$, a que horas passarão juntos novamente?

   (b) De $7\,h\,30\,min$ até meia noite, quais os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto perto da casa de Quinzinho?

2. ***Quadrados dentro de um retângulo -*** O retângulo da figura está dividido em 8 quadrados. O menor quadrado tem lado $1cm$ e o maior $14cm$.



   (a) Determine o lado dos outros quadrados.

   (b) Qual é o perímetro do retângulo?

3. ***Festa na escola -*** A professora Ana foi comprar pão de queijo para homenagear os alunos premiados na OBMEP e deparou-se com a seguinte questão:

   - cada 100 gramas de pão de queijo custam $R\$\,3,20$ e correspondem a 10 pães de queijo;
   - cada pessoa come, em média, 5 pães de queijo.

   A professora tem 16 alunos, um monitor e 5 pais de alunos. A precisão da balança da padaria é de 100 gramas.

   (a) Quantos gramas de pão de queijo ela deve comprar para que cada pessoa coma pelo menos 5 pães?

   (b) Quanto a professora gastará?

   (c) Se cada pessoa comer 5 pães de queijo, sobrará algum pão de queijo?

4. ***Ai que fome -*** Observe a tabela abaixo:

Salgados	**Bebidas**	**Doces**
Empada: $R\$\,3,90$	Refrigerante: $R\$\,1,90$	Sorvete: $R\$\,1,00$
Sanduíche: $R\$\,2,20$	Refresco: $R\$\,1,20$	Cocada: $R\$\,0,40$
Pastel: $R\$\,2,00$	Água: $R\$\,1,00$	Bombom: $R\$\,0,50$

Maria deseja fazer um lanche contendo um salgado, uma bebida e um doce. Ela possui 5 moedas de $R\$\,0,50$ centavos, 7 moedas de $R\$\,0,25$ centavos, 4 moedas de $R\$\,0,10$ centavos e 5 moedas de $R\$\,0,05$ centavos.

(a) Quantos reais Maria possui?

(b) Se o valor da passagem de ônibus é $R\$\,0,90$ centavos, com essa quantia quais as possíveis combinações que ela pode fazer?

5. ***Advinhe -*** Tenho números naturais primos entre si. Se eu somar 50 a cada um deles encontro números de dois algarismos. Se eu subtrair 32 de cada um deles também encontro números naturais de 2 algarismos. Quais são os números?

Lista 4

1. ***Produto de consecutivos -*** Dentre os números 712, 548, e 1680 qual é o único que pode ser escrito como um produto de quatro números naturais consecutivos?

2. ***Palíndromos -*** O ano 2002 é *palíndromo* porque é o mesmo quando lido da direita para a esquerda.

   373 e 1221
   foram anos palíndromos.

   (a) Qual será o próximo ano palíndromo depois de 2002?

   (b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

   (c) O último ano palíndromo primo ocorreu há mais de 1000 anos, em 929. Quando ocorrerá o próximo ano palíndromo primo?

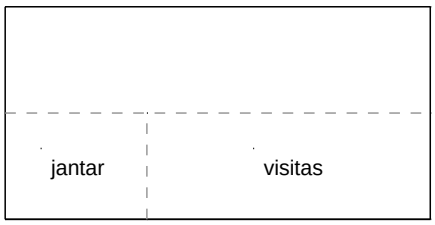
3. ***O maior mdc -*** Quais são os seis números de dois algarismos cujo máximo divisor comum é o maior possível?

4. ***Quantidade de água na terra -*** A Terra tem aproximadamente o volume de $1\,360\,000\,000\ km^3$ de água que se distribuem nos oceanos, mares, geleiras, regiões subterrâneas (aqüíferos), lagos, rios e atmosfera. Somente a água encontrada nos três últimos itens tem fácil acesso ao consumo humano. Com estes dados complete a tabela a seguir:

Especificações	Volume de água em km^3	Percentual	Forma decimal do percentual
Água salgada		97%	
Água doce	40 000 000		
Gelo		1,8%	
Água subterrânea			0,0096
Lagos e rios	250 000		
Vapor de água			0,00001

5. ***Salas -*** Maria e João querem dividir uma área retangular de $10\,m$ por $20\,m$. Eles querem ter uma sala de jantar quadrada, ao lado de uma sala de visitas, como mostra a planta ao lado. Eles precisam que a sala de visitas tenha mais de $20\,m^2$ e menos de $25\,m^2$, e que a de visitas tenha $30\,m^2$.

   Quais as dimensões que cada sala pode ter para que a sala de jantar tenha a menor área possível? Dê a resposta com aproximação de uma casa decimal.



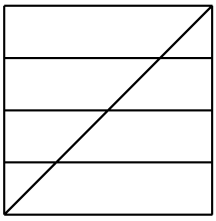
Lista 6

1. ***Sem 1's -*** Roberto quer escrever o número 111 111 como um produto de dois números, nenhum deles terminado em 1. Isso é possível? Por quê?

2. ***Números equilibrados -*** Um número é dito *equilibrado* se um dos seus algarismos é a média aritmética dos outros. Por exemplo, 132, 246 e 777 são equilibrados. Quantos números equilibrados de 3 algarismos existem?

3. ***Números primos -*** Quais os números entre 70 e 110, cujos triplos somados mais um dão um número primo?

4. ***Quadro moderno -*** Para fazer um quadro bem moderno para sua escola, Roberto divide uma tela quadrada em 8 partes com 4 faixas de mesma largura e a diagonal, como na figura. Ele pinta o quadro de azul e verde, de modo que duas partes vizinhas tenham cores diferentes. No final, ele repara que usou mais verde do que azul. Que fração do quadro foi pintada de azul?



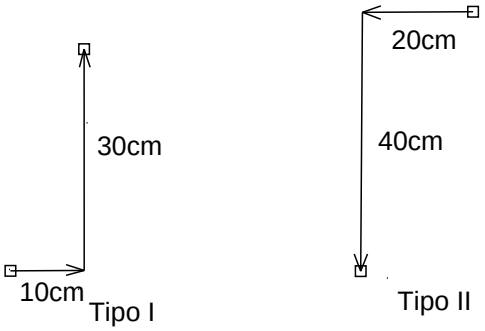
Nível 2

Lista 1

1. ***Sapo Cururu -*** Cururu é um sapo estranho, ele se desloca apenas com dois tipos de saltos, veja a seguir :

   Salto tipo I: $10\,cm$ para Leste e $30\,cm$ para Norte;

   Salto tipo II: $20\,cm$ para Oeste e $40\,cm$ para Sul.



   (a) Como Cururu pode chegar a um ponto situado a $190\,cm$ para Leste e $950\,cm$ para Norte de sua casa?

   (b) É possível Cururu chegar a um ponto situado a $180\,cm$ a Leste e $950\,cm$ ao Norte de sua casa?

2. ***Distribuindo algarismos em linhas -*** Joana escreveu uma seqüência em 10 linhas usando os algarismos de 0 a 9, seguindo o padrão:

$$\begin{array}{l} 0 \\ 1\ \ 1\ \ 0 \\ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0 \\ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0 \\ \vdots \end{array}$$

Qual o algarismo mais usado? Quantas vezes esse algarismo foi utilizado?

3. ***Será que existe? -*** Existe um número inteiro N tal que $2008 \times N = 222\ldots2$?

4. ***Limite de uma soma -*** É verdade que $\dfrac{1}{4^3} + \dfrac{1}{5^3} + \dfrac{1}{6^3} < \dfrac{1}{12}$?

5. ***Parte inteira -*** A parte inteira de um número inteiro x é o maior inteiro que é menor ou igual a x. Vamos denotá-lo por $[x]$. Por exemplo: $[2,9] = 2$, $[0,88] = 0$ e $[-1,7] = -1$. Calcule:

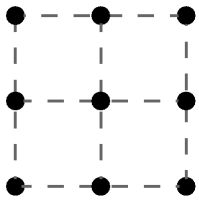
(a) $[\sqrt{12}]$ (b) $\left[\dfrac{28756}{12777}\right]$ (c) $\left[-\dfrac{2007}{2008}\right]$ (d) $[\sqrt[3]{-111}]$

Lista 2

1. ***Soma nove -*** Quantos números inteiros entre 10 e 999 têm a soma de seus algarismos igual a 9?

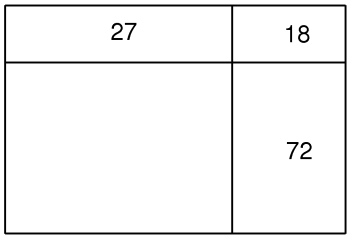
2. ***Retângulos -*** As medidas dos lados de um retângulo são números pares. Quantos desses retângulos existem com área igual a 96?

3. ***Número de retas -*** Sabemos que dois pontos distintos em um plano determinam uma e somente uma reta. Quantas retas são determinadas pelos pontos marcados no quadriculado ao lado?



4. ***Cubo -*** Pedro quer pintar uma caixa na forma de um cubo de tal maneira que as faces que têm uma aresta em comum são pintadas em cores diferentes. Calcule o número mínimo de cores necessárias para pintar o cubo.

5. ***Área -*** Um terreno retangular foi divido em 4 terrenos, também retangulares. As áreas de 3 deles estão dadas na figura em km^2. Qual é a área do terreno que foi dividido?



Lista 3

1. ***Inteiro mais próximo -*** Determine o número inteiro mais próximo de:
   (a) $\frac{19}{15}+\frac{19}{3}$ (b) $\frac{85}{42}+\frac{43}{21}+\frac{29}{14}+\frac{15}{7}$ (c) $-\frac{11}{10}-\frac{1}{2}-\frac{7}{5}+\frac{2}{3}$

2. ***Brincando com números ímpares -*** Beatriz adora números ímpares. Quantos números entre 0 e 1000 ela pode escreve usando apenas algarismos ímpares?

3. ***Água no jarro -*** João e Maria têm um jarro grande, cada, com um litro de água em cada um. No primeiro dia, João coloca $1\,ml$ da água do seu jarro no jarro da Maria. No segundo dia, Maria coloca $2\,ml$ da água do seu jarro no jarro do João. No terceiro dia, João coloca $3\,ml$ da água do seu jarro no jarro da Maria, e assim por diante. Depois de 200 dias, quantos mililitros de água tem no jarro de Maria?

4. ***Formiga no cubo -*** Uma formiga parte de um vértice de um cubo andando somente sobre as arestas até voltar ao vértice inicial. Ela não passa duas vezes por nenhum vértice. Qual é o passeio de maior comprimento que a formiga pode fazer?

5. ***Promoção -*** Em uma promoção, Joana comprou blusas de $R\$15,00$ cada e calças de $R\$17,00$ cada, gastando ao todo $R\$143,00$. Quantas blusas e calças Joana comprou?

Lista 4

1. ***Soma de cubos -*** Se $x + y = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$, calcule $x^3 + y^3$.

2. ***O revezamento em uma corrida -*** Numa competição de revezamento, cada equipe tem dois atletas que têm que correr $21\,km$ cada um. O segundo atleta só inicia a corrida quando o primeiro atleta termina a sua parte e lhe passa o bastão. O recorde dessa competição é de 2 horas e 48 minutos. Na equipe de João e Carlos, João inicia a corrida e corre a sua parte com uma velocidade de $12\,km/h$. Para bater o recorde, qual deve ser a velocidade de Carlos?

3. ***Produtos consecutivos -*** Divida os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 em dois grupos de tal forma que multiplicando todos os números de um grupo e todos do outro encontramos números consecutivos.

4. ***Distraindo na fila -*** Vivi, Tânia e Rosa estão em fila, não necessariamente nessa ordem e gritam, cada uma sucessivamente, um múltiplo de 3:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & , & 6 & , & 9 & , \\ 12 & , & 15 & , & 18 & , \\ \vdots & , & \vdots & , & \vdots & , \end{array}$$

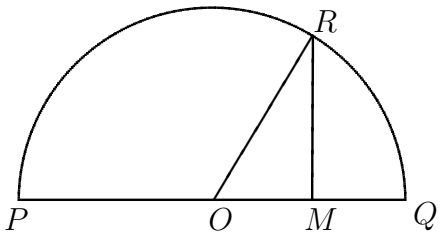
   Vivi foi a primeira a gritar um número maior que 2003 e Rosa a primeira a gritar um número de 4 algarismos. Quem gritou o número 666? E o 888?

5. ***Número e o dobro -*** Um número menor do que 200 é formado por 3 algarismos diferentes, e o dobro desse número também tem todos os algarismos diferentes. Ainda, o número e seu dobro não têm algarismos em comum. Qual é esse número? Quantas soluções têm esse problema?

Lista 5

1. **Invertendo os algarismos -** Quantos números entre 10 e 99 existem tais que invertendo a ordem de seus algarismos, obtemos um número maior que o número original?

2. ***Razão entre segmentos* -** Na figura, O é o centro do semi-círculo de diâmetro PQ, e RM é perpendicular a PQ. Se o arco $\overset{\frown}{PR}$ é o dobro do arco $\overset{\frown}{RQ}$, qual é a razão entre PM e MQ?



3. ***Triângulos* -** Quais os triângulos cujas medidas dos lados são números inteiros e com perímetro $15\,cm$?

4. ***Número interessante* -** O número 119 é muito interessante porque dividido por 2 deixa resto 1, dividido por 3 deixa resto 2, dividido por 4 deixa resto 3, dividido por 5 deixa resto 4 e finalmente dividido por 6 deixa resto 5. Existem outros números de três algarismos com esta mesma propriedade?

5. ***Time vencedor* -** Um time de futebol ganhou 60% das 45 partidas realizadas. Qual é o número mínimo de partidas que ele precisa jogar para atingir a porcentagem de 75% de vitórias?

Lista 6

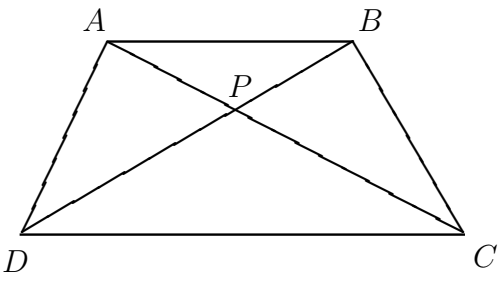
1. ***Brincando com dados -*** Dois dados são lançados. Qual é o percentual do produto dos números obtidos nos 2 dados ser divisível por 6?

2. ***Contando soluções -*** Quantos são os pares de números inteiros positivos $(x,\ y)$ tais que $\dfrac{xy}{x+y} = 144$?

3. ***Círculos tangentes -*** Os vértices de um triângulo de lados $3\,cm$, $4\,cm$ e $5\,cm$ são centros de três círculos dois a dois tangentes . Qual é a soma das áreas destes três círculos?

4. ***Grupo de amigos -*** João, Jorge, José e Jan são bons amigos. João não tem dinheiro, mas seus amigos têm. Jorge deu a João um quinto de seu dinheiro, José deu um quarto de seu dinheiro e Jan deu um terço de seu dinheiro. Se todos eles deram para João a mesma quantidade de dinheiro, que fração do dinheiro do grupo ficou com João?

5. ***Um trapézio isósceles -*** Na figura, o trapézio $ABCD$ é isósceles, AB é paralelo a CD e as diagonais AC e BD cortam-se no ponto P. Se as áreas dos triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle PCD$ são $4\,cm^2$ e $9\,cm^2$, respectivamente, qual é a área do triângulo $\triangle PBC$?

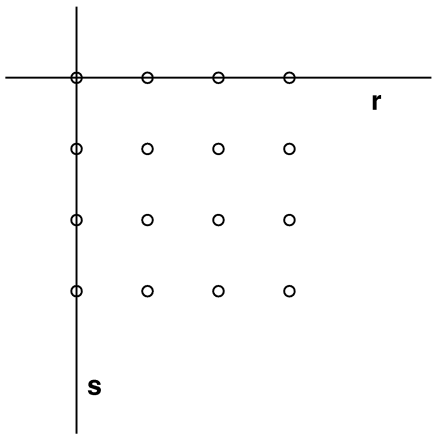


Nível 3

Lista 1

1. ***Problema de nota -*** Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que lhe atribuirá cinco pontos por problema resolvido corretamente e lhe retirará três pontos por problema não resolvido ou resolvido incorretamente. No final o aluno tinha oito pontos. Quantos problemas ele resolveu corretamente?

2. ***Quadrados e triângulos -*** Na figura tem-se 16 pontos formando um reticulado quadrado e duas retas, r e s, perpendiculares entre si.

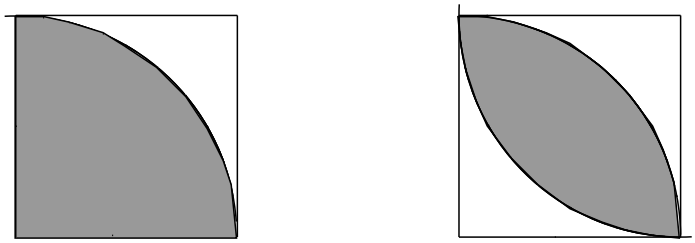


   (a) Quantos quadrados podemos construir, de tal maneira que seus vértices pertençam ao reticulado, porém nenhum de seus lados sejam paralelos às retas r e s?

   (b) Quantos triângulos isósceles podemos construir, de tal maneira que seus vértices pertençam ao reticulado, porém nenhum de seus lados sejam paralelos às retas r e s?

3. ***Cálculo de áreas -*** Em cada uma das figuras a seguir tem-se um quadrado de lado r. As regiões hachuradas em cada uma destas figuras são limitadas por lados desse quadrado ou por arcos de círculo de raio r de centros nos vértices do quadrado.

   Calcule cada uma dessas áreas em função de r.



4. ***Seqüência de algarismos -*** Todos os números naturais de 1 em diante são escritos consecutivamente formando a seguinte seqüência de algarismos:

   12345678910111213141516171819202122 23...

   Qual algarismo aparece na posição de número 206 788?

5. ***Soma constante -*** Coloque os números 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670 e 671, sem repetir, em uma tabela 3×3, de tal maneira que a soma em cada linha, em cada coluna e cada diagonal seja 2001.

   Caso não seja possível, justifique sua resposta.

Lista 2

1. ***Contando os zeros -*** Quantos zeros existem no final do número $9^{2007} + 1$?

2. ***Círculos dentro do quadrado -*** É possível colocar um certo número de círculos dentro de um quadrado de 1 centímetro de lado, tal que a soma dos raios destes círculos seja maior que 2008 centímetros? Os círculos podem ser apenas tangentes, não vale interseção de círculos em 2 pontos.

3. ***Construindo um número -*** Encontre um número de oito algarismos usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, cada um deles duas vezes, tal que:

   (i) exista um único algarismo entre os dois algarismos 1;

   (ii) existam dois algarismos entre os dois algarismos 2;

   (iii) existam três algarismos entre os dois algarismos 3;

   (iv) existam quatro algarismos entre os dois algarismos 4.

4. ***Número na circunferência -*** Os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 foram escritos (em uma ordem desconhecida) ao redor de uma circunferência. Lendo esses números de 3 em 3 no sentido horário, formam-se 9 números de três algarismos. Determine a soma desses 9 números.

5. ***Cada peça em seu lugar -*** Cinco peças de metal, confeccionadas, respectivamente, de ouro, prata, bronze, platina e níquel, foram colocadas em 5 cofres numerados de 1 a 5. Cada cofre contém uma peça, e o problema consiste em descobrir qual peça está em qual cofre.

Na porta de cada cofre está escrita uma informação. Das 5 informações, 4 são falsas e a única que é verdadeira é aquela na porta do cofre que contém a peça de ouro. Veja as informações:

Cofre 1: O ouro está no cofre 2 ou 3.

Cofre 2: A prata está no cofre 1.

Cofre 3: O bronze não está aqui.

Cofre 4: O níquel está no cofre cujo número é inferior de 1 ao que contém o ouro.

Cofre 5: A platina está no cofre cujo número é superior de 1 ao que contém o bronze.

Lista 3

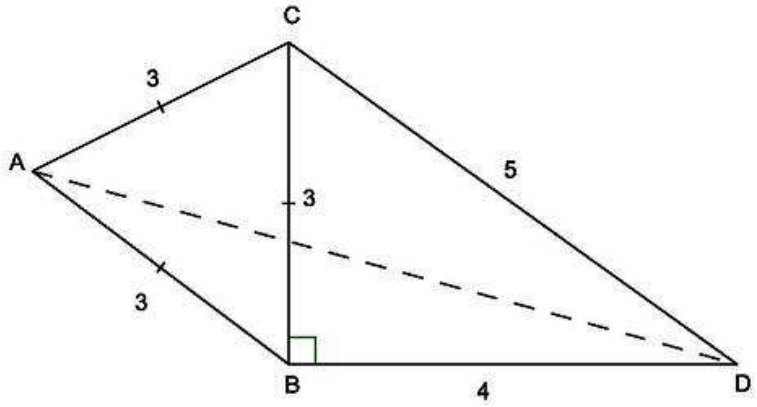
1. ***Soma de quadrados -*** Encontre três números em uma progressão aritmética de razão 2, tal que a soma de seus quadrados seja um número formado de quatro algarismos iguais.

2. ***Adivinhe o número -*** Um número quando dividido por 3, tem resto 1; por 4 tem resto 2; por 5 tem resto 3; por 6, tem resto 4. Qual o menor número inteiro positivo que satisfaz tais propriedades?

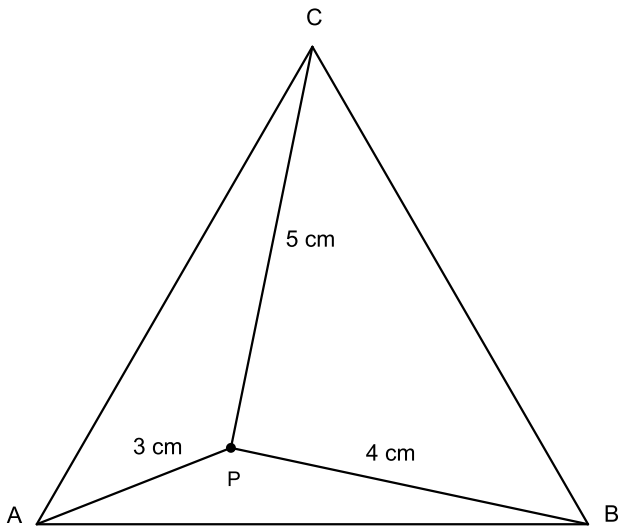
3. ***Um código -*** Na expressão abaixo, cada letra corresponde a um algarismo, e letras diferentes correspondem a algarismos diferentes. Determine esses algarismos.

$$6 \times AOBMEP = 7 \times MEPAOB$$

4. ***Calculando distâncias -*** Na figura $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero de 3 cm de lado; e o triângulo retângulo $\triangle BCD$ tem lados 3 cm, 4 cm e 5 cm. Calcule a distância entre os pontos A e D.



5. ***Calculando lados de um triângulo -*** Na figura, $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero, e o ponto P é tal que $PA = 3\ cm$, $PB = 4\ cm$ e $PC = 5\ cm$. Calcule o comprimento dos lados do triângulo $\triangle ABC$.



Lista 4

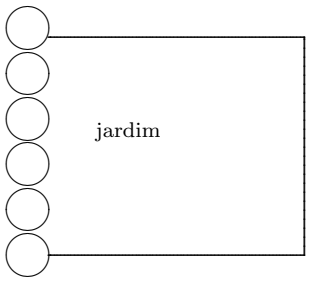
1. ***Amigo Oculto -*** Um grupo de 5 amigos decide brincar de " amigo oculto". Para isso, cada um dos 5 amigos compra um presente para seu amigo oculto. Pelas regras do jogo cada um troca exatamente um presente com um único amigo. De quantas maneiras os presentes podem ser trocados?

2. ***Contando soluções -*** Quantos são os pares de números inteiros positivos $(x,\ y)$ tais que $\dfrac{xy}{x+y} = 144$?

3. ***Determinando uma seqüência -*** Em uma seqüência de 80 números, qualquer termo, salvo os extremos, é igual ao produto de seus termos vizinhos. O produto dos 40 primeiros termos da seqüência é 8. O produto de todos os termos também é 8. Determine os dois primeiros termos desta seqüência.

4. ***Construindo uma cerca -***

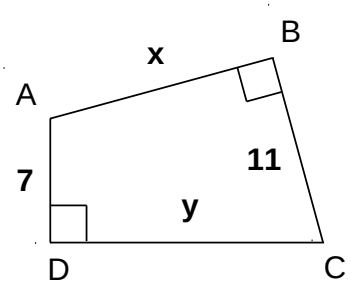
   Carina está desenhando a planta de um jardim retangular que terá um de seus lados num muro reto de pedras. Ela comprou $140\,m$ de cerca, em pedaços de $1m$ cada um para cercar os 3 outros lados. Ela não pode cortar esses pedaços e deve gastar todos eles.



   (a) Se os dois lados vizinhos ao muro de pedra têm $40\,m$ cada um, qual será o comprimento do terceiro lado?

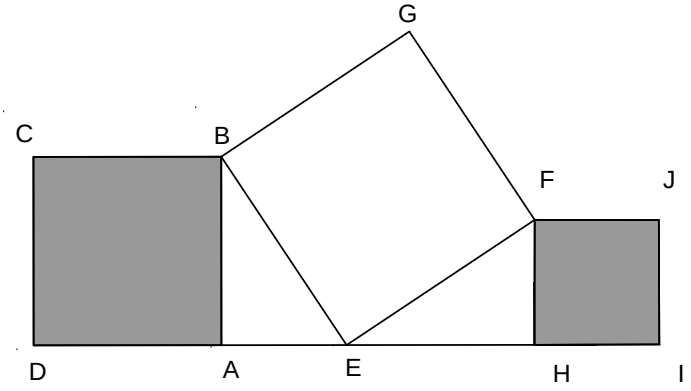
   (b) É possível que o maior dos lados a ser cercado tenha $85\,m$? E $65\,m$? Justifique.

5. ***Um quadrilátero especial -*** Na figura abaixo, os lados do quadrilátero da figura têm medidas inteiras e distintas, os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$ são retos, $AD = 7\,cm$ e $BC = 11\,cm$. Quanto medem os lados AB e DC?



Lista 5

1. ***Três quadrados -*** No desenho abaixo, o quadrado $ABCD$ tem área de $30\,cm^2$ e o quadrado $FHIJ$ tem área de $20\,cm^2$. Os vértices A, D, E, H e I dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado $BEFG$.



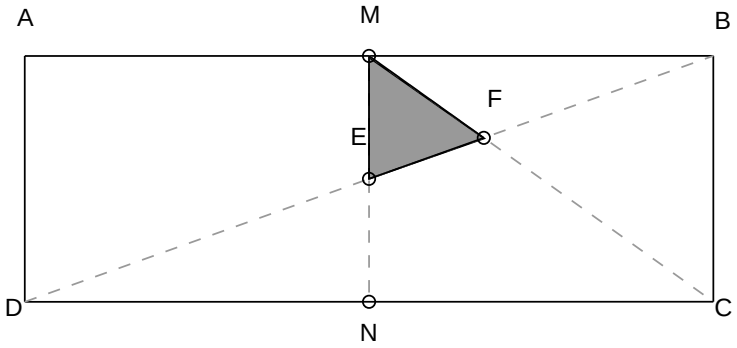
2. ***Bolinha de gude -*** Três amigos jogam uma partida de bolinha de gude com a seguinte regra: o perdedor de cada rodada dobra as bolinhas dos outros jogadores; (ele dá aos outros dois o número de bolinhas de modo que fiquem com o dobro do que tinham no início da jogada). O 1° jogador perdeu a primeira rodada, o 2° jogador a segunda, o 3° a terceira rodada e todos terminaram com 64 bolinhas cada um. Com quantas bolinhas cada amigo começou a partida?

3. ***Uma soma -*** Calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ \ldots + \ \frac{1}{2006\cdot 2007} + \frac{1}{2007\cdot 2008}$$

4. ***Dobrando papel -*** Uma folha retangular $ABCD$ de área $1000\,cm^2$ foi dobrada ao meio e em seguida desdobrada (segmento MN); foi dobrada e desdobrada novamente (segmento MC) e finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal BD. Calcule a área do pedaço de papel limitado pelos três vincos (região escura no desenho).

-



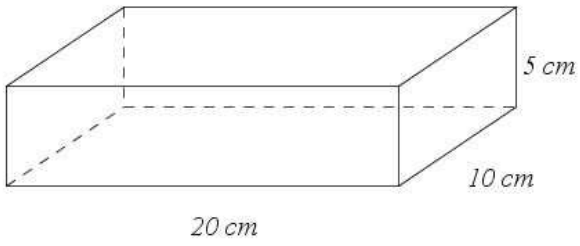
5. ***Uma área -*** No triângulo ABC, M é o ponto médio do lado AC, D é um ponto sobre o lado BC tal que AD é bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$ e P é o ponto de interseção de AD e BM. Sabendo que a área de ABC é $100\,cm^2$, $AB = 10\,cm$ e $AC = 30\,cm$, calcule a área do triângulo APB.

Lista 6

1. ***Últimos algarismos -*** Quais são os dois últimos algarismos do número $8 + 88 + 888 + \cdots + \overbrace{88\cdots88}^{2008}$?

2. ***Idades múltiplas -*** Quando Isabel nasceu sua mãe estava fazendo aniversário de 20 anos. Se Isabel e sua mãe viverem mais de 50 anos, quantas vezes a idade das duas foram números múltiplos?

3. ***Blocos diferentes -*** Ana tem um cubo de $10\,cm$ de lado. Ela cortou o cubo em cubinhos de $1\,cm$ de lado, e com esses cubinhos ela brinca de formar outros blocos retangulares, mas sem que sobrem cubinhos. Por exemplo ela formou um bloco de $10 \times 20 \times 5$.



   Quantos blocos diferentes ela pode construir com os cubinhos sem sobrar nenhum?

4. ***Quadro negro -*** A Ana escreveu os números de 1 até 10 000 no quadro negro e depois apagou todos os múltiplos de 7 e 11. Qual é o número que ficou na posição 2008?

5. ***Conjunto sem múltiplos -*** Qual é o subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 100\}$ com o maior número possível de elementos e sem elementos que sejam múltiplos um do outro?

Soluções do Nível 1

Lista 1

1. ***O trajeto das formiguinhas -***

   (a) O trajeto de M a N é composto de 14 comprimentos e 12 larguras das lajotas, logo seu comprimento é:

   $$14 \times 6 + 12 \times 4 = 84 + 48 = 132\,cm.$$

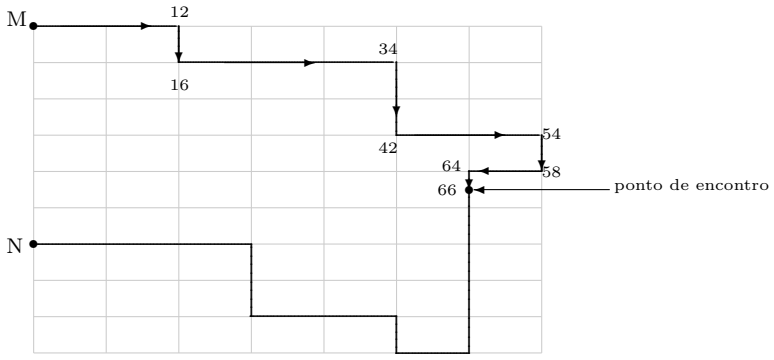
   Como as formiguinhas percorrem a mesma distância, cada uma deve andar $132 \div 2 = 66\,cm$.

   (b) Vamos acompanhar o percurso feito por Maricota desde o início, até completar $66\,cm$:

   $$\underbrace{2\,\text{comprimentos}}_{2\times6=12} + \underbrace{1\ \ \text{largura}}_{4+12=16} + \underbrace{3\,\text{comprimentos}}_{18+16=34} + \underbrace{2\,\text{larguras}}_{8+34=42} +$$

   $$\underbrace{2\,\text{comprimentos}}_{12+42=54} + \underbrace{1\ \ \text{largura}}_{4+54=58} + \underbrace{1\,\text{comprimento}}_{6+58=64} + \underbrace{1/2\ \ \text{largura}}_{2+64=66}$$

   O caminho de Maricota até o ponto de encontro está indicado na figura :



2. ***A soma é 100 -***

(a) Inicialmente observe que:

- o maior número é a soma dos outros dois;
- o maior número não pode exceder 50, senão a soma dos três seria maior do que 100;
- o maior número não pode ser menor que 50, senão a soma dos três seria menor do que 100.

Logo, o maior número só pode ser 50.

(b) Os números 3, 47 e 50 formam uma solução do problema.

(c) Existem tantas soluções quantos são os pares de primos que somam 50. A tabela mostra todas as soluções. Logo, esse problema tem 4 soluções.

3	47	50
7	43	50
13	37	50
19	31	50

3. ***Código de barras -***

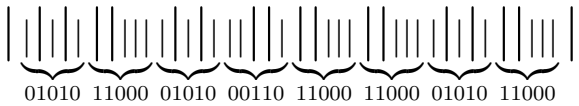
(a) Primeiramente, escrevemos o CEP na forma de 0's e 1's:

$$\underbrace{00101}_{3}\,\underbrace{10100}_{6}\,\underbrace{00110}_{4}\,\underbrace{00001}_{7}\,\underbrace{11000}_{0}\,\underbrace{00011}_{1}\,\underbrace{00101}_{3}\,\underbrace{11000}_{0}$$

Podemos, agora, escrever o código de barras desse CEP:

Lembre que a primeira e a última barra não fazem parte do código.

(b) Primeiramente, escrevemos o código de barras na forma de 0's e 1's:

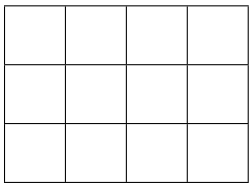


Podemos, agora, escrever o CEP: 20240020.

4. ***Atletas da escola -***

(a)

O número total de alunos na escola é dado pela fração 12/12, que graficamente podemos representar por um retângulo dividido em 12 partes iguais.



Denotaremos por V, F e NE o número de alunos que jogam somente vôlei, somente futebol e nenhum desses esportes, respectivamente. Agora temos:

- os 1/4 dos alunos que jogam somente vôlei correspondem a 3 quadrados;
- os 1/3 dos alunos que jogam somente futebol correspondem a 4 quadrados;
- os 1/12 dos alunos que não jogam nenhum desses esportes correspondem a 1 quadrado.

V	V	V	F
F	F	F	NE

Sobram, então, 4 retângulos para os alunos que não jogam vôlei futebol, ou seja esses 300 alunos correspondem a $4/12 = 1/3$ do total dos alunos

da escola. Logo, o total de alunos na escola é

$$300 \times 3 = 900\,.$$

(b) Temos que $\frac{1}{3} \cdot 900 = 300$ é o total de alunos que jogam somente futebol.

(c) Neste caso, os alunos que jogam futebol são os que jogam só futebol mais os que jogam futebol e vôlei, ou seja, $300 + 300 = 600$.

(d) O total de alunos que praticam um dos esportes é $\frac{11}{12} \cdot 900 = 825$, pois 1/12 dos alunos não praticam nenhum dos esportes.

5. ***Dízima periódica -***

(a) Dividindo 1 por 22 temos: $\frac{1}{22} = 0,0454545\ldots$

Observemos que o algarismo 4 está nas posicões pares: 2, 4, 6, ... e o algarismo 5 nas posições ímpares: 3, 5, 7 ...

Como 1997 é um número ímpar temos que o algarismo da 1997ª casa decimal é o 5.

(b) Dividindo 1 por 27 temos: $\frac{1}{27} = 0,037037037\ldots$

Observemos que os algarismos $0, 3$ e 7 se repetem, sucessivamente, a cada três casas decimais, sendo que o algarismo:

- 0 está nas posições: 1, 4, 7, ..., ou seja, se divididas por três deixam resto 1;
- 3 está nas posições: 2, 5, 8, ..., ou seja, se divididas por três deixam resto 2;
- 7 está nas posições: 3, 6, 9, ..., ou seja, são múltiplos de 3.

Como a divisão $1997 \div 3$ deixa resto 2, o algarismo da 1997ª casa decimal é o 3.

$$\begin{array}{r|l} 1997 & 3 \\ \underset{\frown}{2} & 665 \end{array}$$

Lista 2

1. ***Ana na corrida -*** Transformando minutos em horas temos que 20 minutos corresponde a $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ horas. Assim, a velocidade da Ana deve ser superior a $v = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15\,km/h$. Nesse caso, a solução é qualquer número maior que 15, logo temos várias soluções.

2. ***Quadradinhos e o buraco -*** Começando a contar os quadradinhos retirados da linha de cima temos que o número desses quadradinhos é

$$1 + 3 + 5 + 15 + 10 + 2 = 36.$$

Desde que cada quadradinho tem área $1\,cm^2$, a área do buraco é $36\,cm^2$. Contando quantos lados de quadradinhos tem o buraco obtemos 42 lados. Assim, o perímetro é $42\,cm$.

3. ***Quadrados perfeitos no retângulo -***

(a) Os quadrados perfeitos são números que terminam em 0 , 1 , 4 , 5 , 6 , 9. Os quadrados perfeitos de 2 algarismos são: 16, 25, 36, 49, 64 e 81. Logo, 25, 36 e 81 não podem aparecer na coluna assinalada com X.

		X
		X

Observe também que 0 não pode aparecer nessa coluna.
Restam, então, para essa coluna apenas os números 16, 49 e 64. Logo, temos três opções:

(I)
		1
		6

(II)
		4
		9

(III)
		6
		4

Vamos examinar cada uma das três opções.

Opção (I): Os quadrados perfeitos de 3 algarismos terminados em 6 são

$$14^2 = 196\ ,\ 24^2 = 576\ ,\ 16^2 = 256\ ,\ 26^2 = 676\,.$$

Como nenhum quadrado perfeito de 2 algarismos termina em 7 ou 2, os números 576, 256 e 676 não podem aparecer na segunda linha, só resta então 196.

		1
1	9	6

Agora, os quadrados perfeitos de 3 algarismos terminados em 1 são:

$$11^2 = 121\ ,\ 21^2 = 441\ ,\ 31^2 = 961\ ,\ 19^2 = 361\ ,\ 29^2 = 841\,.$$

Vemos que para ter os quadrados nas 3 colunas, só é possível completar a tabela com o número 841.

8	4	1
1	9	6

Opção (II): Os quadrados perfeitos de 3 algarismos terminados em 9 são:

$$13^2 = 169\ ,\ 23^2 = 529\ ,\ 17^2 = 289\ ,\ 27^2 = 729\,.$$

Analogamente, podemos preencher a segunda linha apenas com o número 169. Na primeira coluna só pode aparecer o número 81, por ser o único quadrado de 2 algarismos terminado em 1.

		4
1	6	9

8		4
1	6	9

Temos agora duas opções para preencher a última casa em branco: 1 ou 3. No entanto, nem 814 nem 834 são quadrados. Logo a opção (II) é impossível.

Opção (III): Os quadrados de 3 algarismos terminados em 4 são:

$$12^2 = 144\ ,\ 22^2 = 484\ ,\ 18^2 = 324\ ,\ 28^2 = 784\,.$$

Verificamos que só podemos preencher a segunda linha com o número 144 e na primeira coluna só pode aparecer o número 81. A única escolha agora para a casa em branco é o número 6.

8		6
1	4	4

8	6	6
1	4	4

No entanto, 866 não é quadrado perfeito. Logo a opção (III) também é impossível.

(b) Pelo que vimos acima, existe apenas uma solução:

8	4	1
1	9	6

4. ***Aula de divisão -***

1ª divisão: $\begin{array}{r|l} 38 & \bigstar \\ \underbrace{4} & \star \end{array}$

Temos: $38 - 4 = 34 = 2 \times 17$. Então: $\bigstar = 2$ e $\star = 17$ ou $\bigstar = 17$ e $\star = 2$.

2ª divisão: $\begin{array}{r|l} 75 & 12 \\ \underbrace{\bigstar} & \star \end{array}$

Basta efetuar a divisão para obter: $\bigstar = 3$ e $\star = 6$.

3ª divisão: $\begin{array}{r|l} \star & 3 \\ \underbrace{\bigstar} & 7 \end{array}$

Temos: $3 \times 7 = 21$. Os possíveis restos da divisão são: 0, 1 e 2. Logo temos as soluções: $\star = 21$ e $\bigstar = 0$ ou $\star = 22$ e $\bigstar = 1$ ou $\star = 23$ e $\bigstar = 2$.

4ª divisão: $\begin{array}{r|l} 42 & \star \\ \hline \bigstar & 5 \end{array}$

Trocando o divisor pelo quociente, observamos que basta efetuar a divisão, para obter: $\star = 8$ e $\bigstar = 2$.

5. ***A festa de Rosa -***

(a) Verdadeira. Como todos chegaram a partir das 18 horas e Cecília saiu antes das 21 horas, ela ficou menos do que 3 horas na festa.

(b) Falsa. Pode ter acontecido a seguinte situação:

	chegada	**partida**	**tempo na festa**
Cecília	18h	20h 55min	2h 55min
Maria	18h 30min	21h 05min	2h 35min

(c) Falsa. Maria chegou 30 minutos antes da Alice, mas pode ter saído 5 minutos antes, por exemplo:

	chegada	**partida**	**tempo na festa**
Alice	19h	23h 15min	4h 15min
Maria	18h 30min	23h 10min	4h 40min

Lista 3

1. ***Linhas de ônibus -***

   (a) O menor múltiplo comum de $15 = 3 \cdot 5$ e $25 = 5^2$ é $3 \cdot 5^2 = 75$. Assim, se uma hora tem 60 minutos, então $75\,min$ correspondem a $1h\,15\,min$. Após $1h\,15\,min$, os dois ônibus passarão novamente no ponto. Logo, os ônibus passarão novamente no ponto perto da casa de Quinzinho, às $7\,h\,30\,min + 1\,h\,15\,min = 8h\,45\,min$.

   (b) **Solução 1:**

   Para obtermos os horários que os ônibus passarão juntos no ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, devemos somar $1h\,15min$, obtendo:

   $8\,h\,45\,min$; $10\,h$; $11\,h\,15\,min$; $12\,h\,30\,min$; $13\,h\,45\,min$; $15\,h$; $16\,h\,15\,min$; $17\,h\,30\,min$; $18\,h\,45\,min$; $20\,h$; $21\,h\,15\,min$; $22\,h\,30\,min$; $23\,h\,45\,min$.

   O próximo ônibus ultrapassa o horário de meia noite.

   Solução 2:

   De $7h\,30\,min$ até $24\,h$ (meia noite) temos $24 - 7h\,30\,min = 16h\,30\,min$, que corresponde a $16 \times 60 + 30 = 990\,min$.

   Devemos, portanto encontrar os múltiplos de 75, que são menores que 990. Eles são:

   75; 150; 225; 300; 375; 450; 525; 600; 675; 750; 825; 900; 975.

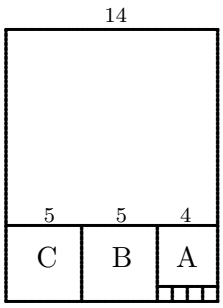
   Note que 990 não é múltiplo de 75.

   Como $7h\,30\,min$ corresponde a $450\,min$, vamos somar 450 a cada um dos múltiplos de $75h = 1h\,15min$, para obtermos os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto perto da casa de Quinzinho:

- $450 + 75 = 525\,min = 8\,h\,45\,min$;
- $450 + 150 = 600\,min = 10\,h$;
- $450 + 225 = 675\,min = 11\,h\,15\,min$;
- $450 + 300 = 750\,min = 12\,h\,30\,min$;
- $450 + 375 = 825\,min = 13\,h\,45\,min$;
- $450 + 450 = 900\,min = 15\,h$;
- $450 + 525 = 975\,min = 16\,h\,15\,min$;
- $450 + 600 = 1050\,min = 17\,h\,30\,min$;
- $450 + 675 = 1125\,min = 18\,h\,45\,min$;
- $450 + 750 = 1200\,min = 20\,h$;
- $450 + 825 = 1275\,min = 21\,h\,15\,min$;
- $450 + 900 = 1350\,min = 22\,h\,30\,min$;
- $450 + 975 = 1425\,min = 23\,h\,45\,min$.

2. ***Quadrados dentro de um retângulo -***

(a) Se o menor quadrado tem $1\,cm$ de lado, então o lado do quadrado A mede $1 \times 4 = 4\,cm$ e do quadrado B mede $4 + 1 = 5\,cm$. Como o lado do maior quadrado mede $14\,cm$, então o quadrado C tem de lado $14 - 4 - 5 = 5\,cm$.



(b) Os lados do retângulo medem $14\,cm$ e $14 + 5 = 19\,cm$, logo o perímetro é $14 \times 2 + 19 \times 2 = 66\,cm$.

3. ***Festa na escola -***

(a) O número de pessoas que comerão os pães de queijo é:

$$\text{a professora } + 16 \text{ alunos } + 1\text{monitor } + 5 \text{ pais } = 23 \text{ pessoas.}$$

Se cada pessoa come pelo menos 5 pães de queijo, será necessário comprar pelo menos

$$5 \times 23 = 115 \text{ pães de queijo.}$$

Cada pão de queijo pesa em média: $\frac{100}{10}\, g$. Logo, será necessário comprar

$$10 \times 115 = 1150\, g \text{ de pães de queijo.}$$

Mas, a precisão da balança é de $100\, g$. Assim, arrendondando $1150\, g$ para $1200\, g$, temos a quantidade de pão de queijo que a professora deve comprar .

(b) Como $\frac{1200}{100} = 12$, temos que a professora gastará:

$$12 \times 3,20 = R\$\, 38,40 \text{ reais.}$$

(c) A quantidade de pães de queijo comprado foi de $\frac{1200}{10} = 120$. Logo, sobrará $120 - 115 = 5$ pães de queijo.

4. ***Ai que fome -***

(a) Maria possui:

$$5{\times}0{,}50{+}7{\times}0{,}25{+}4{\times}0{,}10{+}5{\times}0{,}05 = 2{,}50{+}1{,}75{+}0{,}40{+}0{,}25 = 4{,}90 \text{ reais.}$$

(b) Tirando a passagem, resta para Maria fazer o lanche $R\$\, 4,00$. Observe que Maria não pode escolher empada nem refrigerante. Temos então as seguintes opções de lanches que Maria pode escolher:

Opção 1	Opção 2	Opção 3	Opção 4
Sanduíche: $R\$2,20$	Sanduíche: $R\$2,20$	Sanduíche: $R\$2,20$	Sanduíche: $R\$2,20$
Refresco: $R\$1,20$	Refresco: $R\$1,20$	Água: $R\$1,00$	Água: $R\$1,00$
Cocada: $R\$\,0,40$	Bombom: $R\$0,50$	Cocada: $R\$0,40$	Bombom: $R\$0,50$
Total: $R\$3,80$	Total : $R\$3,90$	Total: $R\$3,60$	Total: $R\$3,70$

Opção 5	Opção 6	Opção 7	Opção 8	Opção 9
Pastel $R\$2,00$	Pastel $R\$2,00$	Pastel $R\$2,00$	Pastel $R\$2,00$	Pastel $R\$2,00$
Refresco: $R\$1,20$	Refresco: $R\$1,20$	Água: $R\$1,00$	Água: $R\$1,00$	Água: $R\$1,00$
Cocada: $R\$0,40$	Bombom: $R\$\,0,50$	Cocada: $R\$\,0,40$	Sorvete: $R\$\,1,00$	Bombom: $R\$0,50$
Total: $R\$3,60$	Total: $R\$3,70$	Total : $R\$3,40$	Total: $R\$3,50$	Total: $R\$4,00$

5. ***Advinhe -*** Como somando 50 ou subtraindo 32 ainda encontramos números de 2 algarismos, os números procurados são maiores do que que 41 e menores do que 50.

   Assim, os primos entre si, que estão entre 41 e 50 são:

   (a) 42 ; 43 ; 45 ; 47 ; 49.

   (b) 43 ; 44 ; 45 ; 47 ; 49.

   (c) 43 ; 45 ; 46 ; 47 ; 49.

   (d) 43 ; 45 ; 47 ; 49.

Lista 4

1. ***Produto de consecutivos -*** Em primeiro lugar, note que se 3 números são consecutivos, então um deles é divisível por 3. Dentre os números dados apenas 1680 é divisível por 3. Assim, temos: $1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 5 \times 6 \times 7$.

2. ***Palíndromos -***

   (a) O próximo é 2112.

   (b) Como o número deve ser ímpar, então é o número 3003.

   (c) O número não pode ter 4 algarismos, pois todo número palíndromo de 4 algarismos é do tipo *abba* e é divisível por 11, pois $a + b = b + a$.

   O primeiro número palíndromo de 5 algarismos é $10001 = 73 \times 137$ e não é primo. O próximo possível candidato é 10201. Mas $10201 = 101 \times 101$. Pode-se verificar que 10301 é número palíndromo primo.

3. ***O maior mdc -*** Para que o m.d.c. seja o maior possível, o menor dos números deve ser igual ao próprio m.d.c., e o maior dos números deve ser o sêxtuplo do m.d.c. O maior múltiplo de 6 de 2 algarismos é 96. Logo, 96 é o maior dos números e o menor é $96 \div 6 = 16$. Portanto os números são: 16, 32, 48, 64, 80 e 96.

4. ***Quantidade de água na terra -*** Denotemos $V = 1\,360\,000\,000$. Lembre que: $1\% = \dfrac{1}{100}$. Assim,

$$1\% \text{ de } V = \frac{1\,360\,000\,000}{100} = 13\,600\,000.$$

   - $97\% = \dfrac{97}{100} = 0,97$ e 97% de V vale: $97 \times 13\,600\,000 = 1\,319\,200\,000$.

- $\dfrac{40\,000\,000}{1\,360\,000\,000} = 0,0294 = 0,0294 \times 100 = 2,94\%$.
- $1,8\% = \dfrac{1,8}{100} = 0,018$ e $1,8\%$ de V vale:
  $1,8 \times 13\,600\,000 = 24\,480\,000$.
- $0,0096 = 0,0096 \times 100 = 0,96\%$ e $0,96\%$ de V vale:
  $0,96 \times 13\,600\,000 = 13\,056\,000$.
- $\dfrac{250\,000}{1\,360\,000\,000} = 0,00018 = 0,00018 \times 100 = 0,018\%$.
- $0,00001 = 0,00001 \times 100 = 0,001\%$ e $0,001\%$ de V vale:
  $0,001 \times 13\,600\,000 = 13\,600$.

Especificações	Volume de água em km^3	Percentual	Forma decimal do percentual
Água salgada	1 319 200 000	97%	0,97
Água doce	40 000 000	2,94%	0,0294
Gelo	24 480 000	1,8%	0,018
Água subterrânea	13 056 000	0,96%	0,0096
Lagos e rios	250 000	0,018%	0,00018
Vapor de água	13 600	0,001%	0,00001

5. ***Salas -*** Designemos por ℓ o lado da sala de jantar. Logo, a sua área é ℓ^2 e, de acordo com os dados, temos:

$$20 < \ell^2 < 25 \;\Rightarrow\; \sqrt{20} < \ell < \sqrt{25} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{5} < \ell < 5\,.$$

Sabemos que $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$, segue que $4,46 < 2\sqrt{5} < 4,48$. Logo

$$4,46 < 2\sqrt{5} < \ell < 5\,.$$

Escolhemos $l = 4,46$, logo $l^2 = 19,9809$.

Lista 5

1. ***Bolas -*** Primeiramente temos que saber de quantas maneiras podemos obter 14 como soma de 3 parcelas inteiras, cada uma delas maior ou igual a 3, isto é:

$$14 = \underbrace{\ldots}_{\geq 3} + \underbrace{\ldots}_{\geq 3} + \underbrace{\ldots}_{\geq 3}$$

As parcelas possíveis são:
$$\begin{cases} 14 = 3 + 3 + 8 \\ 14 = 3 + 4 + 7 \\ 14 = 3 + 5 + 6 \\ 14 = 4 + 4 + 6 \\ 14 = 4 + 5 + 5 \end{cases}$$

Agora, para cada uma dessas possibilidades podemos fazer diferentes distribuições entre as 3 crianças, como podemos observar na tabela a seguir:

	1^a criança	2^a criança	3^a criança
$14 = 3 + 3 + 8$	3	3	8
	3	8	3
	8	3	3
$14 = 3 + 4 + 7$	3	4	7
	3	7	4
	4	3	7
	4	7	3
	7	3	4
	7	4	3
$14 = 3 + 5 + 6$	3	5	6
	3	6	5
	5	3	6
	5	6	3
	6	3	5
	6	5	3
$14 = 4 + 4 + 6$	4	4	6
	4	6	4
	6	4	4
$14 = 4 + 5 + 5$	4	5	5
	5	4	5
	5	5	4

Temos, portanto, $3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21$ maneiras diferentes para fazer a distribuição das balas entre as 3 crianças.

Observe que quando as 3 parcelas são diferentes temos 6 possibilidades e quando 2 são iguais temos apenas 3 possibilidades.

2. ***Minutos -*** Observemos primeiramente que

$$\frac{5}{6}\,h = \frac{5}{6} \times 60\,min = 50\,min.$$

Logo a prova durou $4h\ 50min$. Somando as horas e os minutos, temos:

$$12\,h\,35\,min + 4\,h\,50\,min = 16\,h\,85\,min.$$

Mas, $85\,min = 1\,h\,25\,min$. Logo, a prova termina às $16\,h\,85\,min = 17\,h\,25\,min$.

3. ***Menor número -*** O número tem que ser par, logo tem que terminar em 2 ou 4. Um número é divisível por 4 se o número formado pelos 2 últimos algarismos for divisível por 4. Assim, temos as possibilidades: 12, 24, 32, 92. Como 9 é o maior algarismo, devemos coloca-lo " o mais à direita possível". Logo 9 é o algarismo da casa das dezenas. Os outros números devem ser colocados em ordem decrescente à esquerda de 92, ou seja, o número deve iniciar com o menor algarismo que é o 1. Portanto, o número procurado é 13 492.

4. ***Contas do papagaio -***

(a) Temos: $8 \xrightarrow{\times 5} 40 \xrightarrow{+14} 54 \xrightarrow{\div 6} 9 \xrightarrow{-1} 8$. Logo o papagaio grita 8.

(b) Devemos fazer a operação inversa do papagaio, começando da última operação, ou seja, somar 1 ao número, multiplicar o número por 6, depois subtrair 14 e o resultado dividir por 5:

$$3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{\times 6} 24 \xrightarrow{-14} 10 \xrightarrow{\div 5} 2.$$

Logo, Antônio soprou 2 no ouvido do papagaio.

(c) Observe que $7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{\times 6} 48 \xrightarrow{-14} 34 \xrightarrow{\div 5} 6,8$. Como 6,8 não é um número inteiro, o papagaio não sabe fazer divisão $34 \div 5$, por isso ele nunca grita 7.

5. ***Soma maior que 34 -*** O maior número de 4 algarismos é 9999, cuja soma dos seus algarismos é: $4 \times 9 = 36$.

Os números de 4 algarismos cuja soma dos seus algarismos é 35 são:

$$8999\,; \quad 9899\,; \quad 9989\,; \quad 9998.$$

Logo, temos 5 números de 4 algarismos com soma dos seus algarismos maior do que 34.

Lista 6

1. ***Sem 1's -*** Fatorando 111 111 obtemos: $111\,111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$. Como $3 \times 7 = 21$ e $1 \times 1 = 1$ temos que evitar 1 e 21 como fatores. Assim, temos os produtos:

   3×37037 ; 7×15873 ; 13×8547 ; 37×3003 ; 33×3367 ;

   39×2849 ; 77×1443 ; 259×429 ; 143×777 ; 407×273.

   Logo, Roberto tem 10 opções para escrever 111 111 como ele deseja.

2. ***Números equilibrados -*** Note que se o número equilibrado tem os três algarismos distintos, diferentes de zero, então com os mesmos algarismos obtemos 6 números equilibrados. Para isso basta trocar os algarismos de posição. Por exemplo: 123 ; 132 ; 213 ; 231 ; 312 ; 321.

   Se um dos 3 algarismos do número equilibrado é 0, então com esses algarismos obtemos apenas 4 números equilibrados, pois o 0 não pode estar na casa da centena. Por exemplo: 102 ; 120 ; 201 ; 210.

   Assim, vamos variar apenas os algarismos da centena e da dezena. O algarismo da unidade será a média dos 2 algarismos. Observe que os 2 algarismos são ambos pares ou ímpares. Os possíveis números equilibrados iniciando com:

											total de números equilibrados
$1:\rightsquigarrow$	111	;	132	;	153	;	174	;	195	$\rightsquigarrow$	$1 + (4 \times 6) = 25$
$2:\rightsquigarrow$	201	;	222	;	243	;	264	;	285	$\rightsquigarrow$	$(4 + 1 + 3 \times 6) = 23$
$3:\rightsquigarrow$			333	;	354	;	375	;	396	$\rightsquigarrow$	$(1 + 3 \times 6) = 19$
$4:\rightsquigarrow$			402	;	444	;	465	;	486	$\rightsquigarrow$	$(4 + 1 + 2 \times 6) = 17$
$5:\rightsquigarrow$					555	;	576	;	597	$\rightsquigarrow$	$(1 + 2 \times 6) = 13$
$6:\rightsquigarrow$					603	;	666	;	687	$\rightsquigarrow$	$(4 + 1 + 6) = 11$
$7:\rightsquigarrow$							777	;	798	$\rightsquigarrow$	$(1 + 6) = 7$
$8:\rightsquigarrow$							804	;	888	$\rightsquigarrow$	$(4 + 1) = 5$
$9:\rightsquigarrow$									999	$\rightsquigarrow$	1

Somando temos 121 números equilibrados de 3 algarismos.

3. ***Números primos -*** Os números primos entre 70 e 110 são:

71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 ; 101 ; 103 ; 107 ; 109.

Subtraindo 1 de todos os números temos a lista:

70 ; 72 ; 78 ; 82 ; 88 ; 96 ; 100 ; 102 ; 106 ; 108.

Desta lista os múltiplos de 3 são:

72 ; 78 ; 96 ; 102 ; 108.

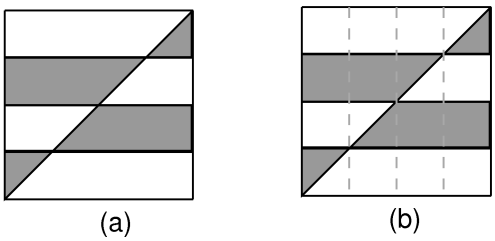
Logo, os números são:

$72 \div 3 = 24$; $78 \div 3 = 26$; $96 \div 3 = 32$; $102 \div 3 = 34$; $108 \div 3 = 36$.

De fato temos:

$24 \times 3 + 1 = 73$, $26 \times 3 + 1 = 79$, $32 \times 3 + 1 = 97$, $34 \times 3 + 1 = 103$, $36 \times 3 + 1 = 109$.

4. ***Quadro moderno -***



A figura (a) mostra como foi pintado o quadrado nas duas cores - ainda não sabemos qual dessas partes é azul ou verde. Agora, dividimos o quadrado em 4 faixas verticais como na figura (b). Note que dessa maneira, o quadrado ficou dividido em 16 quadradinhos iguais.

A parte não-hachurada compreende:

$$\underbrace{4 \text{ meios quadrados}}_{2 \text{ quadrados}} + 8 \text{ quadrados} = 10 \text{ quadrados.}$$

Logo, a parte não-hachurada corresponde a $\frac{10}{16}$ do quadro, e portanto, a parte hachurada corresponde a $\frac{16}{16} - \frac{10}{16} = \frac{6}{16}$. Logo, a parte hachurada da figura é a que foi pintada de azul e corresponde a $\frac{6}{16}$ de todo o quadrado.

Soluções do Nível 2

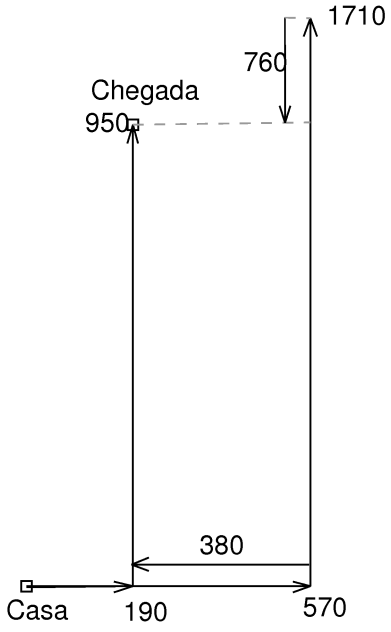
Lista 1

1. ***Sapo Cururu -***

   (a) Sejam x e y o número de saltos do Tipo I e Tipo II, respectivamente. Logo, devemos ter:

   $$\begin{cases} 10x - 20y &= 190 \\ 30x - 40y &= 950 \end{cases}$$

   Resolvendo o sistema, encontramos $x = 57$ e $y = 19$. Logo, o sapo deverá dar 57 saltos do Tipo I e 19 do Tipo II.



   (b) Uma vez que o número de saltos, x e y, de cada tipo é um número inteiro, o sapo só alcançará o ponto desejado se o sistema

   $$\begin{cases} 10x - 20y &= 180 \\ 30x - 40y &= 950 \end{cases}$$

tiver solução inteira. A solução desse sistema é $x = 59$ e $y = \frac{41}{2}$. Como $\frac{41}{2}$ não é inteiro, o nosso sapo não conseguirá alcançar o referido ponto.

2. ***Distribuindo algarismos em linhas -*** De acordo com o padrão da sequência temos:

1^a linha $\rightarrow$ 0

2^a linha $\rightarrow$ 1 1 0

3^a linha $\rightarrow$ 2 2 2 1 1 0

$\vdots$

10^a linha $\rightarrow$ 9 9 9 9 9 9...9 8.....1 1 0

Logo:

1 algarismo 0 em cada linha $\Rightarrow 1 \times 10 = 10$ algarismos 0 no total

2 algarismos 1 em 9 linhas $\Rightarrow 2 \times 9 = 18$ algarismos 1 no total

3 algarismos 2 em 8 linhas $\Rightarrow 3 \times 8 = 24$ algarismos 2 no total

4 algarismos 3 em 7 linhas $\Rightarrow 4 \times 7 = 28$ algarismos 3 no total

E assim por diante.

Portanto, trata-se de descobrir qual é o maior dos produtos abaixo, onde cada um representa quantos algarismos de 0 a 1 aparecem na seqüência.

$$\underbrace{1 \times 10}_{0}, \underbrace{2 \times 9}_{1}, \underbrace{3 \times 8}_{2}, \underbrace{4 \times 7}_{3}, \underbrace{5 \times 6}_{4}, \underbrace{6 \times 5}_{5}, \underbrace{7 \times 4}_{6}, \underbrace{8 \times 3}_{7}, \underbrace{9 \times 2}_{8}, \underbrace{10 \times 1}_{9}$$

Como o maior produto é 30, os algarismos mais usados foram 4 e 5, trinta vezes cada um.

3. ***Será que existe? -*** Se esse número N existir, então

$$N = \frac{222\ldots2}{2008} = \frac{2 \times 111\ldots1}{2 \times 1004} = \frac{111\ldots1}{1004}.$$

Logo, N não é inteiro por ser o quociente de um número ímpar $111\ldots1$ por um número par 1004. Portanto não existe tal N.

4. ***Limite de uma soma -*** Uma maneira de verificar esta desigualdade é efetuar a soma

$$\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3},$$

para isso igualando os denominadores. Uma outra maneira é comparando cada parcela desta soma, como fazemos a seguir.

Comparando as frações $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{4}$ temos:

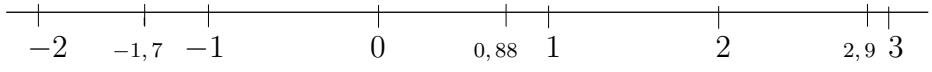
$$\frac{1}{5}<\frac{1}{4} \implies \frac{1}{5^3}=\left(\frac{1}{5}\right)^3<\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4^3};$$

$$\frac{1}{6}<\frac{1}{4} \implies \frac{1}{6^3}=\left(\frac{1}{6}\right)^3<\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4^3};$$

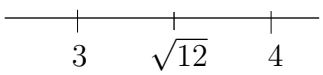
$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3} \implies \frac{1}{4^3}=\left(\frac{1}{4}\right)^3<\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3^3}.$$

Então: $\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}<\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^3}=\frac{3}{4^3}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}<\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.

5. ***Parte inteira -***



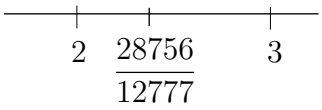
(a) Os números 9 e 16 são quadrados perfeitos e $9<12<16$. Então



$\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16} \implies 3<\sqrt{12}<4 \implies [\sqrt{12}]=3.$

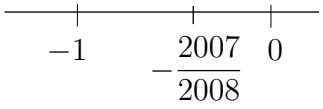
(b) Como $12777\times2 < 28756 < 12777\times3$ temos:

$$2 < \frac{28756}{12777} < 3 \Longrightarrow \left[\frac{28756}{12777}\right] = 2.$$



(c) Como $2007 < 2008$ temos:

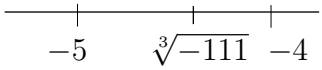
$$-1 < -\frac{2007}{2008} < 0 \Longrightarrow \left[-\frac{2007}{2008}\right] = -1.$$



(d) Inicialmente, observamos que $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$, para qualquer valor de a.

Como $4^3 = 64 < 111 < 5^3 = 125$ temos:

$-5^3 < -111 < -4^3 \Longrightarrow -5 < \sqrt[3]{-111} < -4 \Longrightarrow [\sqrt[3]{-111}] = -5.$



Lista 2

1. ***Soma nove -*** Vamos dividir em dois casos: números de 2 algarismos e números de 3 algarismos. No caso de números de 2 algarismos, basta listá-los: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, obtendo um total de 9 números. Os números de três algarismos podem ser obtidos da mesma maneira, ou seja, listando os números:

$$\begin{array}{cc} 108\,;\,117\,;\,126\,;\,135\,;\,144\,;\,153\,;\,162\,;\,171\,;\,180 & \rightsquigarrow \text{ 9 números} \\ 207\,;\,216\,;\,225\,;\,234\,;\,243\,;\,252\,;\,261\,;\,270 & \rightsquigarrow \text{ 8 números} \\ 306\,;\,315\,;\,324\,;\,333\,;\,342\,;\,351\,;\,360 & \rightsquigarrow \text{ 7 números} \\ 405\,;\,414\,;\,423\,;\,432\,;\,441\,;\,450 & \rightsquigarrow \text{ 6 números} \\ 504\,;\,513\,;\,522\,;\,531\,;\,540 & \rightsquigarrow \text{ 5 números} \\ 603\,;\,612\,;\,621\,;\,630 & \rightsquigarrow \text{ 4 números} \\ 702\,;\,711\,;\,720 & \rightsquigarrow \text{ 3 números} \\ 801\,;\,810 & \rightsquigarrow \text{ 2 números} \\ 900 & \rightsquigarrow \text{ 1 número} \end{array}$$

Portanto, temos $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$ números de três algarismos.

Vamos fazer de uma maneira mais geral. Denotemos por n o algarismo da centena. Então a soma dos algarismos da dezenas e da unidade é $9-n$, onde n pode ser $1, 2, \ldots, 9$. Como o algarismo da dezena pode ser o algarismo 0, temos $9-n+1 = 10-n$ possibilidades de escolha, entre os algarismos $9-n$ e 0.

Portanto, fixando o algarismo da centena em n, temos $10-n$ possibilidades de escolha para o algarismo da dezena e além disso, fica automaticamente definido o algarismo da unidade.

Desde que o algarismo da centena pode ser: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, temos:

$$(10-1)+(10-2)+(10-3)+(10-4)+(10-5)+(10-6)+(10-7)+(10-8)+(10-9) = 45,$$

números de três algarismos cuja soma dos seus algarismos é 9.

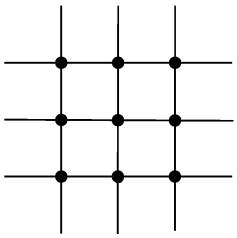
Portanto, existem $9+45 = 54$ números entre 10 e 999 cuja soma dos algarismos é 9.

2. ***Retângulos -*** Se a e b denotam comprimento e largura do retângulo, temos que $a \times b = 96$. Logo a e b são divisores pares de 96. Assim, temos 4 retângulos satisfazendo as condições dadas:

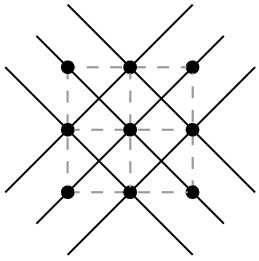
a	b	lados
2	48	$2, 48$
4	24	$4, 24$
6	16	$6, 16$
8	12	$8, 12$

3. ***Número de retas -*** Para contar o número de retas dividiremos as retas de acordo com suas posições:

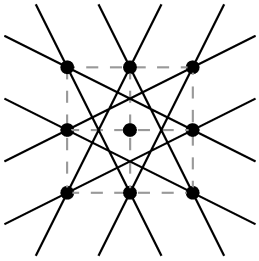
   - retas parlelas aos lados dos quadrados: 3 horizontais e 3 verticais;



- retas paralelas às diagonais dos quadrados: $3 + 3 = 6$;



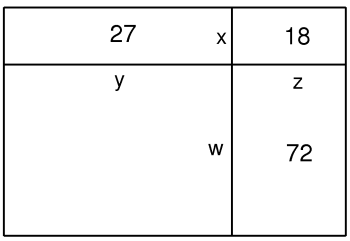
- outras retas: temos $4 \times 2 = 8$ retas, formando uma estrela, como mostrado na figura.



Ao todo temos: $3 + 3 + 6 + 8 = 20$ retas.

4. ***Cubo -*** Um cubo tem 6 faces distintas, duas a duas opostas. As faces opostas não têm aresta em comum. Temos 3 pares de faces opostas, logo três cores são suficientes, basta pintar as faces opostas da mesma cor. Por outro lado, é claro que duas cores não bastam.

5. ***Área -*** Sejam x, y, z e w as medidas dos retângulos menores, como mostrado na figura. A área procurada é:



$$(x + w)(y + z) = xy + xz + wy + wz.$$

Precisamos determinar xw, pois sabemos que: $xy = 27$, $xz = 18$ e $wz = 72$.

Mas,

$$\frac{x}{w} = \frac{xz}{zw} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}\,.$$

Como $x = \dfrac{27}{y}$ segue que

$$\frac{\dfrac{27}{y}}{w} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; yw = 4 \times 27 = 108\,.$$

Logo, a área é $27 + 18 + 72 + 108 = 225\,km^2$.

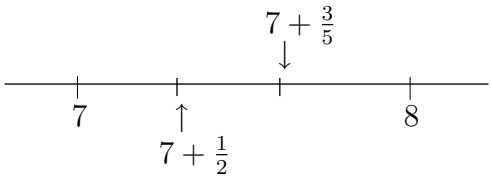
Lista 3

1. ***Inteiro mais próximo -***

   (a) Temos:

   $$\frac{19}{15}+\frac{19}{3}=1+\frac{4}{15}+6+\frac{1}{3}=7+\frac{9}{15}=7+\frac{3}{5}.$$

   Logo, a soma $\frac{19}{15}+\frac{19}{3}$ está entre 7 e 8. Como $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$, o número inteiro mais próximo é 8.

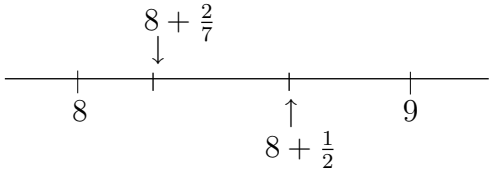
   

   (b) Temos:

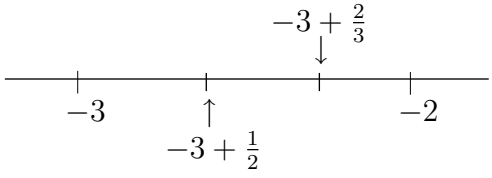
   $$\frac{85}{42}+\frac{43}{21}+\frac{29}{14}+\frac{15}{7}=2+\frac{1}{42}+2+\frac{1}{21}+2+\frac{1}{14}+2+\frac{1}{7}=$$

   $$8+\frac{1}{42}+\frac{1}{21}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}=8+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=8+\frac{2}{7}.$$

   Logo, a soma $\frac{85}{42}+\frac{43}{21}+\frac{29}{14}+\frac{15}{7}$ está entre 8 e 9. Sendo $\frac{2}{7}<\frac{1}{2}$, o número inteiro mais próximo é 8.

   (c) Temos: $-\frac{11}{10}-\frac{1}{2}-\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=-\frac{30}{10}+\frac{2}{3}=-3+\frac{2}{3}$. Logo, a expressão está entre -3 e -2. Como $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, o número inteiro mais próximo é -2.

2. ***Brincando com números ímpares -*** Como cada algarismo é ímpar temos que:

   - números com 1 algarismo temos 5 possibilidades: 1, 3, 5, 7, 9;
   - números com 2 algarismos temos 5 possibilidades na casa das unidades e 5 na casa das dezenas, totalizando $5 \times 5 = 25$ números;
   - números com 3 algarismos temos 5 possibilidades na casa das unidades, 5 na casa das dezenas e 5 na casa das centenas, totalizando $5 \times 5 \times 5 = 125$ números.

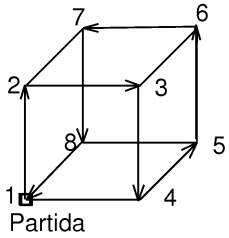
   Logo, Beatriz pode escrever 5+25+125 = 155 números com todos os algarismos ímpares.

3. ***Água no jarro -*** Inicialmente, o volume de água no jarro da Maria é $1\,l = 1000\,ml$. Depois de 200 dias é $1000\,ml$ mais o que é colocado por João menos o que ela tirou, para dar para o João, isto é:

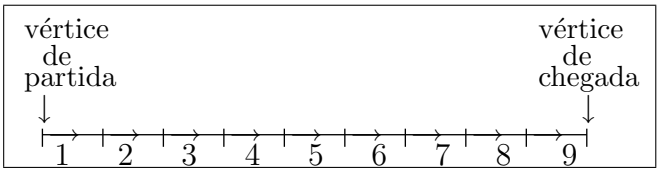
$$\begin{aligned} 1000 + 1 - 2 + 3 - 4 + \quad \cdots \quad & +199 - 200 \\ = \quad & 1000 + (1-2) + (3-4) + \cdots + (199 - 200) \\ = \quad & 1000 - (\overbrace{1 + \cdots + 1}^{100}) = 900. \end{aligned}$$

   Logo, Maria terá $900\,ml$.

4. ***Formiga no cubo -*** Veja na figura um caminho percorrendo 8 arestas que a formiga pode fazer partindo do vértice 1.



Será que é possível ela fazer um caminho passando por 9 arestas? Para fazer esse caminho, ela teria que passar por 9 vértices, veja no desenho, lembrando que o vértice de chegada é o mesmo que o de partida porque a formiguinha volta ao vértice inicial:



Como o cubo só tem 8 vértices, esse passeio não é possível. Logo, o passeio de maior comprimento é o que tem 8 arestas.

5. ***Promoção -*** Sejam b e c o número de blusas e calças compradas, respectivamente. Logo temos:

$$15b + 17c = 143 \ ; \text{ sendo } b \text{ e } c \text{ números inteiros positivos}.$$

Note que ambos, b e c, têm que ser menores do que 9, porque $15 \times 9 + 17 \times 9 > 143$. Agora temos duas soluções.

Solução 1: Temos que

$$15b = 143 - 17c \;\Rightarrow\; 143 - 17c \text{ é múltiplo de } 15\,.$$

Portanto, $143 - 17c$ termina em 0 ou 5. Isso significa que $17c$ termina em 3 ou 8. Logo,

$$c = 9 \;\text{ ou }\; c = 4\,.$$

Como $c < 9$, a única solução é $c = 4$. Segue que

$$b = \frac{143 - 17 \times 4}{15} = 5\,.$$

Solução 2: Temos que

$$b = \frac{143 - 17c}{15} = 9 - c + \frac{8 - 2c}{15}\,.$$

Note que $8 - 2c$ tem que ser múltiplo de 15 e c é um número inteiro positivo. Logo, $8 - 2c = 0$, ou seja, $c = 4$. Daí obtemos: $b = 5$.
Portanto, ele comprou 5 blusas e 4 calças.

Lista 4

1. ***Soma de cubos -*** Temos: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Substituindo os valores de $x+y$ e x^2+y^2 obtemos: $1 = 2 + 2xy \Longrightarrow xy = -\frac{1}{2}$.

   Mas $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Logo,

   $$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}.$$

2. ***O revezamento em uma corrida -*** Como tempo $= \dfrac{\text{distância}}{\text{velocidade}}$, o tempo gasto por João foi de:

   $$t = \frac{21}{12} = \left(1 + \frac{9}{12}\right) h = 1\,h + \frac{9}{12} \times 60\,min = 1\,h \text{ e } 45\,min.$$

   Logo, Carlos tem que completar a prova num tempo inferior a

   $$(2\,h \text{ e } 48\,min) - (1\,h \text{ e } 45\,min) = 1\,h \text{ e } 3\,min = 63\,min.$$

   Para isso sua velocidade v, em km/min deve satisfazer

   $$\frac{21}{v} < 63 \quad \text{ou seja,} \quad v > \frac{21}{63} = \frac{1}{3}\,km/min = \frac{60}{3}\,km/h = 20\,km/h.$$

   Logo, Carlos deve correr com velocidade superior $20\,km/h$.

3. ***Produtos consecutivos -***

   Solução 1: Como os produtos são números consecutivos, denotemos esses produtos por p e $p+1$. Logo, temos

   $$p(p+1) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510\,510.$$

Resolvendo a equação $p^2+p-510510 = 0$, obtemos $p = 714$, e logo $p+1 = 715$. Agora, fatorando esses números obtemos

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17 \quad \text{e} \quad 715 = 5 \times 11 \times 13.$$

Solução 2: Se 2 e 5 estão no mesmo grupo, então um dos produtos termina em 0 e o outro, por ser consecutivo, tem que terminar em 1 ou 9. Os produtos terminados em 1 são $3 \times 7 \times 11 = 231$, $3 \times 17 \times 11 = 561$ e $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Verifica-se que esses grupos não são solução. Analogamente para os terminados em 9. Concluímos que 2 e 5 estão em grupos diferentes. Logo um produto termina em 5 e o outro em 4 ou 6, mas não é possível formar com os números dados um produto terminado em 6. Logo, um dos produtos termina em 5 e o outro em 4. Por tentativas obtemos a solução

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17 \quad \text{e} \quad 715 = 5 \times 11 \times 13.$$

4. ***Distraindo na fila -*** Observe que a que grita os números 9, 18, etc, vai sempre gritar múltiplos de 9. O primeiro múltiplo de 3 com 4 algarismos é 1002 e o primeiro múltiplo de 3 maior que 2003 é 2004.
Logo Vivi gritou 2004 e Rosa 1002. Nenhum desses números é múltiplo de 9, assim é Tânia que grita os múltiplos de 9.

Rosa		Vivi		Tânia
3	,	6	,	9
12	,	15	,	18
21	,	24	,	27
⋮	,	⋮	,	⋮
1002	,	1005	,	1008
⋮	,	⋮	,	⋮
2001	,	2004	,	2007

Desta forma, é Tânia quem grita 666, por que 666 é múltiplo de 9. Ela também grita o número $891 = 888 + 3$ por ser um múltiplo de 9. Logo, é Vivi quem grita 888.

5. ***Número e o dobro -*** Inicialmente note que o dobro de um número inteiro é par, logo ele termina em 0, 2, 4, 6, ou 8. No entanto, o número não pode terminar em 0, pois nesse caso o seu dobro também terminaria em 0, e logo teriam 0 como algarismo comum. Portanto, temos os seguintes casos:

I	II	III
$1 \ldots 5$ $\times 2$ $\begin{cases} 2 \ldots 0 \\ \text{ou} \\ 3 \end{cases}$	$1 \ldots 6$ $\times 2$ $3 \ldots 2$	$1 \ldots 2$ $\times 2$ $3 \ldots 4$

IV	V	VI
$1 \ldots 7$ $\times 2$ $\begin{cases} 2 \ldots 4 \\ \text{ou} \\ 3 \end{cases}$	$1 \ldots 3$ $\times 2$ $2 \ldots 6$	$1 \ldots 8$ $\times 2$ $\begin{cases} 2 \ldots 6 \\ \text{ou} \\ 3 \end{cases}$

Vamos, agora, determinar todas as possibilidades para cada caso, lembrando sempre que o número e seu dobro não podem ter algarismos comuns.

- Caso I – temos 3 possibilidades:

$$135 \times 2 = 270\,;\ 145 \times 2 = 290\,;\ 185 \times 2 = 370\,.$$

- Caso II – temos 3 possibilidades:

$$176 \times 2 = 352\,;\ 186 \times 2 = 372\,;\ 196 \times 2 = 392\,.$$

- Caso III – temos 3 possibilidades:

$$152 \times 2 = 304\,;\ 182 \times 2 = 364\,;\ 192 \times 2 = 384\,.$$

- Caso IV – não há nenhuma possibilidade.
- Caso V – temos 2 possibilidades:

$$143 \times 2 = 286\,;\ 153 \times 2 = 206\,.$$

- Caso VI – temos 5 possibilidades:

$$138 \times 2 = 276\,;\ 148 \times 2 = 296\,;\ 158 \times 2 = 306\,;$$
$$178 \times 2 = 356\,;\ 198 \times 2 = 396\,.$$

Finalmente, temos $3+3+3+2+5 = 16$ soluções para esse problema, a saber:

$$135\,;\ 145\,;\ 185\,;\ 176\,;\ 186\,;\ 196\,;\ 152\,;\ 182\,;$$
$$192\,;\ 143\,;\ 153\,;\ 138\,;\ 148\,;\ 158\,;\ 178\,;\ 198.$$

Lista 5

1. **Invertendo os algarismos -** Um número de 2 algarismos é da forma $\underline{a}\ \underline{b}$. Temos que contar os números que têm o algarismo da unidade maior do que o algarismo da dezena, ou seja, $b > a$. Claramente, a não pode ser 9.

   Temos os seguintes casos:

   - $\underline{1}\ \underline{b}$: O algarismo da unidade pode ser 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, assim temos 8 possibilidades.
   - $\underline{2}\ \underline{b}$: O algarismo da unidade pode ser 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, assim temos 7 possibilidades.

     $\vdots$
   - $\underline{8}\ \underline{b}$: O algarismo da unidade só pode ser 9; ou seja, 1 possibilidade.

   Logo, temos $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ números.

2. ***Razão entre segmentos -*** Se o arco $\overset{\frown}{PR}$ é o dobro do arco $\overset{\frown}{RQ}$, vale a mesma relação entre os ângulos centrais, logo: $\widehat{POR} = 2\widehat{ROQ}$. Como

   $$\widehat{POR} + \widehat{ROQ} = 180^\circ,$$

   segue-se que

   $$2\widehat{ROQ} + \widehat{ROQ} = 3\widehat{ROQ} = 180^\circ,$$

   donde $\widehat{ROQ} = 60^\circ$. Mas, $OR = OQ = r$ raio do círculo. Daí concluímos que o triângulo $\triangle ORQ$ é eqüilátero. Portanto, a altura RM também é mediana, ou seja: $OM = MQ$. Logo, se r é o raio do círculo temos:

   $$\frac{PM}{MQ} = \frac{PO + OM}{\frac{OQ}{2}} = \frac{r + \frac{r}{2}}{\frac{r}{2}} = 3.$$

3. ***Triângulos -*** Se a, b e c são os comprimentos dos lados, podemos supor que $a \leq b \leq c$. Desde que um lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois, temos que $c < a + b$. Segue-se que

$$2c < a + b + c \leq 3c \implies 2c < 15 \leq 3c.$$

Como c é um número inteiro, então $c = 5$, 6, 7.

Se $c = 7$, então $a + b = 8$ e temos 4 soluções (a, b, c): $(1, 7, 7)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 5, 7)$ e $(4, 4, 7)$.

Se $c = 6$, então $a + b = 9$ e temos 2 soluções (a, b, c): $(3, 6, 6)$ e $(4, 5, 6)$.

Se $c = 5$, então $a + b = 10$ e temos 1 solução (a, b, c): $(5, 5, 5)$.

Assim, temos 7 triângulos.

4. ***Número interessante -*** Suponhamos que N seja um dos números procurados. Como N e 119 deixam os mesmos restos quando divididos por 2, 3, 4, 5 e 6 temos que a diferença entre eles $N - 119$ deixa resto zero quando dividido por esses números. Portanto $N - 119$ é múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6. Como 60 é o mínimo múltiplo comum desses números, $N - 119$ também é múltiplo de 60. Logo, $N - 119 = 60k$, $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $N = 119 + 60k$. Atribuindo valores para k temos:

$119 + 0$; $119 + 60 = 179$; $119 + 2 \times 60 = 239$; ... ; $119 + 14 \times 60 = 959$.

Logo, existem mais 14 números com esta propriedade.

5. ***Time vencedor -*** O time já ganhou 60% de $45 = 45 \times \dfrac{60}{100} = 27$ partidas. Se ele ganhar mais n partidas, a porcentagem de partidas ganha será:

$$\frac{n^{\underline{o}} \text{ de partidas ganhas}}{n^{\underline{o}} \text{ de partidas jogadas}} = \frac{27 + n}{45 + n} = 75\% = \frac{75}{100}.$$

Logo $2700 + 100n = (45 + n) \times 75$ e portanto $25n = 675$. Daí temos $n = 27$.

Lista 6

1. ***Brincando com dados -*** Na seguinte tabela marcamos com $\times$ os produtos que são divisíveis por 6

	1	2	3	4	5	6
1						$\times$
2			$\times$			$\times$
3		$\times$		$\times$		$\times$
4			$\times$			$\times$
5						$\times$
6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

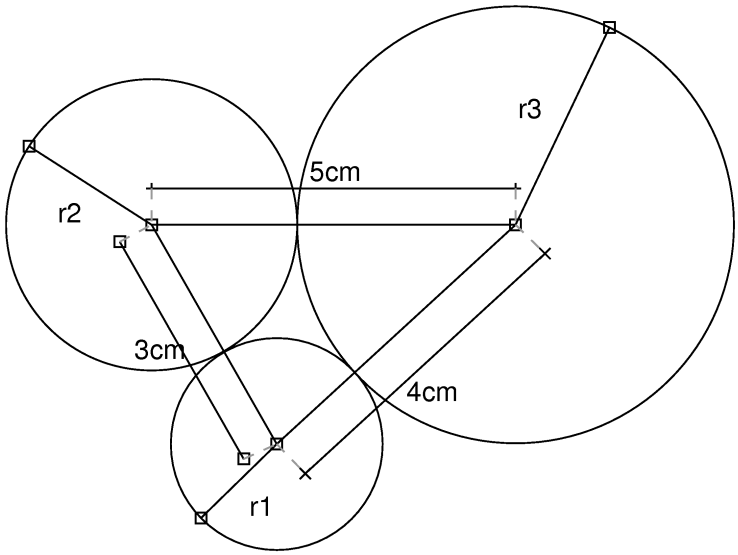
Assim temos 15 casos favoráveis de 36 possibilidades. Logo, o percentual do produto ser divisível por 6 é $\dfrac{15}{36} = 41,7\%$.

2. ***Contando soluções -*** Isolando x na equação $\dfrac{xy}{x+y} = 144$ obtemos $x = \dfrac{144y}{y-144}$. Como x deve ser positivo, devemos ter $y = 144 + n$, onde n é um número inteiro positivo. Substituindo essa expressão de y no valor de x, obtemos $x = \dfrac{144^2}{n} + 144$. Como x deve ser um número inteiro, n deve ser um divisor de 144^2. Sendo $144^2 = 12^4 = 2^8 \cdot 3^4$, segue que 144^2 tem $(8+1)\cdot(4+1) = 45$ divisores. Assim, para cada divisor n de 144^2, obtemos uma solução

$$(x, y) = \left(\frac{144^2}{n} + 144\ ,\ 144 + n\right)$$

da equação $\dfrac{xy}{x+y} = 144$. Assim essa equação possui 45 pares ordenados de números inteiros positivos (x, y) que a satisfazem.

3. ***Círculos tangentes -***



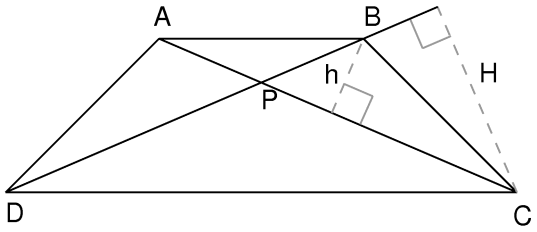
Denotemos por r_1, r_2 e r_3 os raios dos três círculos. Como os círculos são tangentes dois a dois temos que :

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 3; \\ r_1 + r_3 = 4; \\ r_2 + r_3 = 5. \end{cases}$$

Substituindo os valores $r_2 = 3 - r_1$, $r_3 = 4 - r_1$ na terceira equação temos: $3 - r_1 + 4 - r_1 = 5$. Daí, obtemos que $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ e $r_3 = 3$. Logo, a soma das áreas dos três círculos é $(1^2 + 2^2 + 3^2)\pi = 14\pi\, cm^2$.

4. ***Grupo de amigos -*** Se A é a quantidade de dinheiro que João recebeu de cada um de seus amigos, então ele recebeu um total de $3A$. Como ele recebeu de Jorge um quinto do seu dinheiro, então Jorge tinha $5A$. Da mesma maneira José tinha $4A$ e Jan tinha $3A$. Assim, os três amigos tinham $5A + 4A + 3A = 12A$ e a fração do dinheiro do grupo que ficou com João foi de $\dfrac{3A}{12A} = \dfrac{1}{4}$.

5. ***Um trapézio isósceles -***



Seja H a altura dos triângulos $\triangle DPC$ e $\triangle CPB$ relativa às bases DP e PB, respectivamente. Logo, área$(\triangle DPC) = \frac{1}{2}H \cdot DP$ e área$(\triangle CPB) = \frac{1}{2}H \cdot PB$, e portanto

$$\frac{\text{área}(\triangle DPC)}{\text{área}(\triangle CPB)} = \frac{\frac{1}{2}H \cdot DP}{\frac{1}{2}H \cdot PB} = \frac{DP}{PB}.$$

Da mesma maneira, se h é a altura dos triângulos $\triangle APB$ e $\triangle CPB$ relativa às bases AP e PC, respectivamente, temos que

$$\frac{\text{área}(\triangle CPB)}{\text{área}(\triangle APB)} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot PC}{\frac{1}{2}h \cdot AP} = \frac{PC}{AP}.$$

Como o trapézio$ABCD$ é isósceles, temos que $AD = BC$ e $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. Daí temos que os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle DBC$ são congruentes, pois têm dois lados e o ângulo entre eles iguais. Conseqüentemente, $\widehat{PDC} = \widehat{PCD}$ e $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$. Portanto, $DP = PC$ e $PB = PA$. Logo,

$$\frac{\text{área}(\triangle DPC)}{\text{área}(\triangle CPB)} = \frac{DP}{PB} = \frac{PC}{PA} = \frac{\text{área}(\triangle CPB)}{\text{área}(\triangle APB)}.$$

Logo,

$$[\text{área}(\triangle CPB)]^2 = \text{área}(\triangle APB) \cdot \text{área}(\triangle DPC) = 4 \cdot 9 = 36,$$

portanto área$(\triangle BPC) = 6\,cm^2$.

Soluções do Nível 3

Lista 1

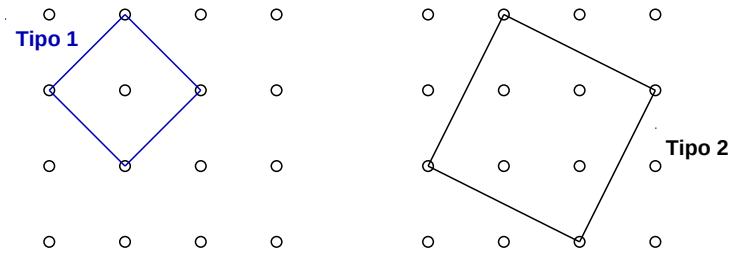
1. ***Problema de nota -*** Seja c o número de problemas resolvidos corretamente e seja e a soma do número de problemas resolvidos incorretamente e do número de problemas não resolvidos. Logo $c + e = 80$ e o número de pontos do aluno na avaliação é $5c - 3e$. No caso,

$$\begin{cases} c + e &= 80 \\ 5c - 3e &= 8 \end{cases}$$

Portanto, $c = 31$ e $e = 49$. Logo, o aluno resolveu 31 problemas corretamente.

2. ***Quadrados e triângulos -***

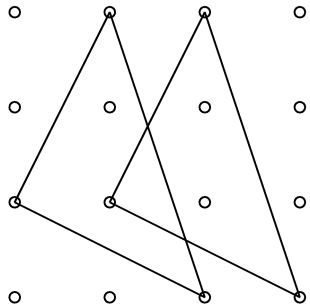
(a) Os únicos quadrados que não têm nenhum de seus lados paralelos à reta r, nem à reta s são os do tipo 1 e do tipo 2 (ver figuras).



Desta forma, há um total de seis quadrados: quatro do primeiro tipo e dois do segundo tipo.

(b) O total de triângulos é dezesseis, todos eles tem catetos iguais a $\sqrt{5}$ unidades, e hipotenusa de $\sqrt{10}$ unidades.

Cada um dos quadrados do segundo tipo, como feito em (a), nos dá quatro triângulos, obtendo assim oito triângulos. Os oito triângulos, restantes, são obtidos através de uma única translação horizontal ou vertical de cada um dos anteriores. Na figura a seguir, está a única translação possível de um dos quatro triângulos de um quadrado feito no item (a).

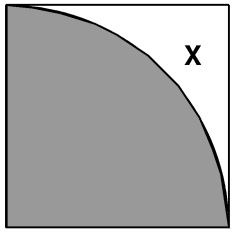


3. ***Cálculo de áreas -***

(a) A área hachurada corresponde a um quarto da área de um círculo de raio r. Portanto a área hachurada é igual $\dfrac{1}{4}\pi r^2$.

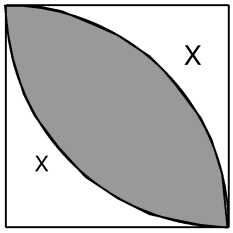
A área do círculo de raio r é $\pi\, r^2$.

(b) Observe no item anterior que a área da região NÃO hachurada é



$$\text{área do quadrado} - \text{área da região hachurada} = r^2 - \frac{\pi\, r^2}{4} = \frac{(4-\pi)r^2}{4}\,.$$

Voltando ao nosso item, a área da região hachurada é



$$\text{área do quadrado} - 2\times(\text{área da região X}) = r^2 - 2\times\frac{(4-\pi)r^2}{4} = \frac{\pi\, r^2}{2} - r^2\,.$$

4. ***Seqüência de algarismos -*** Números com 1 algarismo formam os 9 primeiros termos da seqüência. Os 90 números de 2 algarismos formam os 180 termos seguintes. Depois vêm os 2 700 termos correspondentes aos números de três algarismos; depois mais 36 000 termos correspondentes aos números de 4 algarismos e finalmente, temos 450 000 termos que são os correspondentes aos números de 5 algarismos. Logo, enumerando os termos da seqüência temos:

$$\underbrace{a_1,\ldots,a_9}_{1\,\text{alg}}\,,\ \underbrace{a_{10},\ldots,a_{189}}_{2\,\text{algs}}\,,\ \underbrace{a_{190},\ldots,a_{2889}}_{3\,\text{algs}}\,,\ \underbrace{a_{2890},\ldots,a_{38889}}_{4\,\text{algs}}\,,\ \underbrace{a_{38890},\ldots,a_{488889}}_{5\,\text{algs}}$$

Para escrever todos os termos de 1, 2, 3 e 4 algarismos, chegamos ao 38889^a casa da seqüência. Logo, o algarismo na 206788^a casa faz parte de um número de 5 algarismos, ou seja está no bloco

$$\underbrace{a_{38890},\ldots,a_{488889}}_{5\,\text{algs}}\,.$$

Esse bloco é da forma

$$10\,000\,,\ 10\,001\,,\ \ldots\,,\ 99\,999\,.$$

Para ver quantos números de 5 algarismos existem da posição 38 889 até a posição 206 788, divide-se esta diferença por 5. Assim, temos $206\,788 - 38\,889 = 167\,899$ e $167\,899 = 5 \times 33\,579 + 4$.

Portanto, precisamos de 33 579 números de 5 algarismos mais os quatro primeiros algarismos do 33 580º número de 5 algarismos (que é 43 579), para chegar ao algarismo de número 206 788. Como o quarto algarismo do número 43 579 é 7, temos que o algarismo procurado é o 7.

5. ***Soma constante -*** Uma solução é

670	665	666
663	667	671
668	669	664

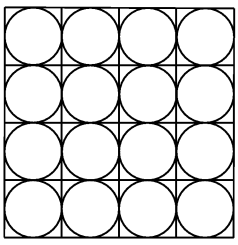
Lista 2

1. ***Contando os zeros -*** A tabela ao lado mostra como aparecem em ordem, dezena e unidade, os dois últimos algarismos de algumas potências de 9. Observe que esses dois últimos algarismos de 9^0 e 9^{10} são os mesmos; logo a partir 9^{10} a segunda coluna da tabela começará a se repetir, formando uma seqüência periódica, de período 10. Como $2007 = 10 \times 200 + 7$ e os dois últimos algarismos de $9^{10\times 200}$ são 01, segue que os dois útimos algarismos de 9^{2007} são os dois últimos algarismos de 9^7, ou seja 69. Daí os dois últimos algarismos de $9^{2007} + 1$ são iguais a $69 + 1 = 70$. Portanto, existe um único zero no final do número $9^{2007} + 1$.

n	dois últimos algarismos de 9^n
0	01
1	09
2	81
3	29
4	61
5	49
6	41
7	69
8	21
9	89
10	01

2. ***Círculos dentro do quadrado -*** A resposta desse problema é afirmativa: sim, é possível colocar um certo número de círculos dentro de um quadrado de 1 centímetro de lado, tal que a soma dos raios desses círculos seja maior que 2008 centímetros.

   Para exibir uma tal configuração , desenhe linhas paralelas aos lados do quadrado, dividindo-o em n^2 quadradinhos menores; cada um desses quadradinhos tem lado igual a $\frac{1}{n}$. Agora, dentro de cada um desses quadradinhos, desenhe uma círculo de raio igual a $\frac{1}{2n}$. Veja essa construção, no caso particular $n = 4$, na figura a seguir.



$\left\{\begin{array}{l} n^2 \\ 4^2 = 16 \text{ círculos} \\ \text{lados dos quadradinhos} = \frac{1}{4} \\ \text{raio dos círculos} = \frac{1}{8} \\ \text{soma dos raios:} 16 \times \frac{1}{8} \end{array}\right.$

Desse modo a soma dos raios desses n^2 círculos é igual a $n^2 \times \frac{1}{2n} = \frac{n}{2}$. Como estamos interessados no caso desta soma ser maior que 2008, devemos ter $\frac{n}{2} > 2008$, ou seja $n > 4016$. Logo dividindo o quadrado em mais de 4017^2 quadradinhos, a soma dos raios dos círculos será maior que 2008.

3. ***Construindo um número -*** As condições dadas implicam que o número deve satisfazer:

(i) $\Rightarrow \ldots$ 1 __ 1 $\ldots$

(ii) $\Rightarrow \ldots$ 2 __ __ 2 $\ldots$

(iii) $\Rightarrow \ldots$ 3 __ __ _ 3 $\ldots$

(iv) $\Rightarrow \ldots$ 4 __ __ __ __ 4 $\ldots$

Vamos estudar as possíveis posições dos dois algarismos 4 num número de oito dígitos. De acordo com (iv) existem apenas três possibilidades:

caso A: __ 4 __ __ __ __ 4 __

caso B: 4 __ __ __ __ 4 __ __

caso C: __ __ 4 __ __ __ __ 4

Em cada um desses casos, existem duas possibilidades de colocar os dois algarismos 3:

caso A: 3 4 __ __ 3 __ 4 __ ou __ 4 __ 3 __ __ 4 3

caso B: 4 __ __ 3 __ 4 __ 3 ou 4 __ 3 __ __ 4 3 __

caso C: 3 __ 4 __ 3 __ __ 4 ou __ 3 4 __ __ 3 __ 4

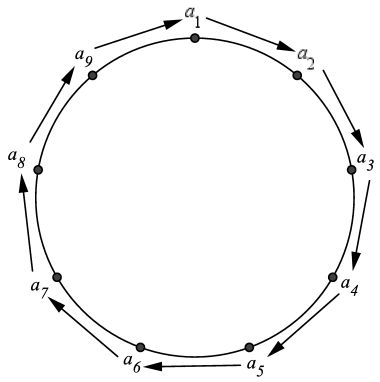
Na tentativa de colocar os algarismos 1 e 2 percebemos que as duas possibilidade do caso A são impossíveis tanto quanto as duas primeiras possibilidades dos casos B e C. Os únicos casos que levam a soluções do problema são as segundas possiblidades dos casos B e C.

Essas soluções são:

4 1 3 1 2 4 3 2

2 3 4 2 1 3 1 4

4. ***Número na circunferência -*** A figura a seguir representa os 9 números escritos ao redor da circunferência.



Lendo de 3 em 3 no sentido horário, os algarismos escritos ao redor da circunferência, obtemos os seguintes números de três algarismos cada:

$a_1a_2a_3$, $a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_5$, $a_4a_5a_6$, $a_5a_6a_7$, $a_6a_7a_8$, $a_7a_8a_9$, $a_8a_9a_1$ e $a_9a_1a_2$.

Para somar esses números usamos o algoritmo da adição como indicado a seguir.

$$\begin{array}{rc} & a_1a_2a_3 \\ & a_2a_3a_4 \\ & a_3a_4a_5 \\ & a_4a_5a_6 \\ + & a_5a_6a_7 \\ & a_6a_7a_8 \\ & a_7a_8a_9 \\ & a_8a_9a_1 \\ & a_9a_1a_2 \\ \hline & ??????? \end{array}$$

Analisando estes nove números notamos que todos têm os algarismos da unidade diferentes, logo;

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_1+a_2 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45\,.$$

Do mesmo modo, eles também têm todos os algarismos das dezenas e todos os algarismos das centenas diferentes. Logo, a soma dos algarismos da dezena é também 45, e o mesmo ocorre com os algarismos das centenas. Daí a soma desses números é igual a: $45 + 45 \times 10 + 45 \times 100 = 4995$.

5. ***Cada peça em seu lugar -*** A primeira informação é certamente falsa, pois se fosse verdadeira, o ouro estaria no Cofre 2 ou 3, mas deveria estar no Cofre 1. Absurdo. Logo o ouro não está nem no Cofre 2 nem no Cofre 3. A segunda informação não pode estar correta, pois, caso contrário, o ouro estaria no Cofre 2, o que é incorreto. Logo, 1 e 2 são falsas. Portanto, o ouro não está no Cofre 1, nem no 2 nem no 3, e a prata não está no Cofre 1.

Portanto, temos as seguintes possibilidades:

a)

$$\underbrace{__}_{1}\ ,\ \underbrace{__}_{2}\ ,\ \underbrace{__}_{3}\ ,\ \underbrace{\text{ouro}}_{4}\ ,\ \underbrace{__}_{5}\ .$$

Nessa possibilidade, a informação 4 seria correta e o níquel estaria na Cofre 3. Sendo a informação em 3 falsa, deveríamos ter o bronze também no cofre 3, absurdo. Logo essa possibilidade fica descartada.

b)

$$\underbrace{__}_{1}\ ,\ \underbrace{__}_{2}\ ,\ \underbrace{__}_{3}\ ,\ \underbrace{__}_{4}\ ,\ \underbrace{\text{ouro}}_{5}\ .$$

Nessa possibilidade, a informação 5 seria correta e a platina estará no Cofre cujo número é superior de 1 ao que contém o bronze. Pela afirmação do Cofre 3, que é falsa, teríamos o bronze no cofre 3, logo a platina estrá no cofre 4. Sendo a afirmação 2 falsa, a prata não está no Cofre 1, só podendo estar no Cofre 2. Portanto temos a seguinte solução:

$$\underbrace{\text{níquel}}_{1}\ ,\ \underbrace{\text{prata}}_{2}\ ,\ \underbrace{\text{bronze}}_{3}\ ,\ \underbrace{\text{platina}}_{4}\ ,\ \underbrace{\text{ouro}}_{5}\ .$$

Lista 3

1. ***Soma de quadrados -***

Solução 1: Como a razão é 2 os números são $n-2$, n e $n+2$. Logo a soma de seus quadrados é

$$(n-2)^2 + n^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 8 = kkkk\,,$$

onde $kkkk$ representa o número de 4 algarismos iguais.

Como $kkkk = k \times 1111$, segue que

$$3n^2 + 8 = kkkk \Rightarrow 3n^2 = k \times 1111 - 8 \;\Rightarrow\; k \times 1111 - 8 \text{ é múltiplo de } 3\,.$$

Verificamos que os valores possíveis para k são 2, 5 e 8 (é fácil descartar os valores 3, 6 e 9).

No caso $k = 2$, temos que

$$n^2 = \frac{2222 - 8}{3} = 738 = 2 \times 369,$$

e portanto, não é um quadrado perfeito.

Se $k = 5$, então

$$n^2 = \frac{5555 - 8}{3} = 1849 = 43^2.$$

Logo, os três números procurados são: 41, 43 e 45, e esses são únicos.

De fato, no último caso possível, $k = 8$, temos que

$$n^2 = \frac{8888 - 8}{3} = 2960 = 2^4 \times 5 \times 37,$$

e portanto, não é um quadrado perfeito.

Solução 2: Denotemos os números por $n-2$, n e $n+2$, então a soma de seus quadrados é

$$(n-2)^2 + n^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 8 = kkkk,$$

onde k é um número menor do que ou igual a 9. Além disso, como

$$3n^2 = kkkk - 8 = (kkk \times 10 + k) + (-9 + 1) = (kkk \times 10 - 9) + (k + 1)$$

e $kkk \times 10 - 9$ é múltiplo de 3 , então $k+1$ também tem que ser múltiplo de 3. Logo, os possíveis valores de k são 2, 5 e 8.

No caso $k = 2$, temos que

$$n^2 = \frac{2222 - 8}{3} = 738 = 2 \times 369$$

e portanto, não é um quadrado perfeito.

Se $k = 5$, então

$$n^2 = \frac{5555 - 8}{3} = 1849 = 43^2.$$

Logo, os três números procurados são: 41, 43 e 45, e esses são únicos.

De fato, no último caso possível, $k = 8$, temos que

$$n^2 = \frac{8888 - 8}{3} = 2960 = 2^4 \times 5 \times 37,$$

e portanto, não é um quadrado perfeito.

2. ***Adivinhe o número -*** Seja x o número procurado. Observe que $x + 2$ é divisível por 3, 4, 5 e 6. O menor múltiplo comum desses números é 60. Logo, $x + 2 = 60$, e então, $x = 58$.

3. ***Um código -*** Observe que:

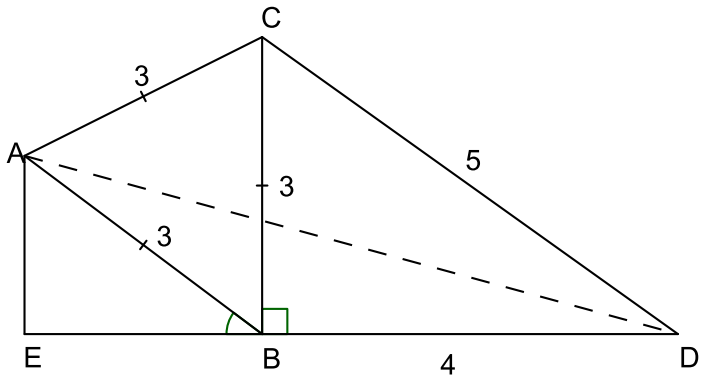
$$AOBMEP = AOB \times 1000 + MEP \text{ e } MEPAOB = MEP \times 1000 + AOB.$$

Denotemos $AOB = m$ e $MEP = n$. Logo,

$$\begin{aligned} 6 \times AOBMEP = 7 \times MEPAOB &\Rightarrow 6 \cdot (1000m + n) = 7 \cdot (1000n + m) \\ &\Rightarrow 6000m - 7m = 7000n - 6n \\ &\Rightarrow 5993\ m = 6994\ n \\ &\Rightarrow 461\ m = 538\ n \end{aligned}$$

Logo, 461 divide n e 538 divide m. Como AOB e MEP são números de três algarismos, só podemos ter as soluções $n = 461$ ou $n = 822$ e $m = 538$. A solução $n = 822$ não serve, portanto, $AOB = 538$ e $MEP = 461$.
Logo, os algarismos são: $A = 5$, $B = 8$, $O = 3$, $M = 4$, $E = 6$ e $P = 1$.

4. ***Calculando distâncias -*** Seja E o ponto sobre a reta BD tal que o triângulo $\triangle AEB$ seja retângulo no vértice E (veja figura a seguir).



No triângulo retângulo $\triangle AEB$ temos:

$$\cos\ 30^o = \frac{EB}{AB} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EB}{3} \Longrightarrow EB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

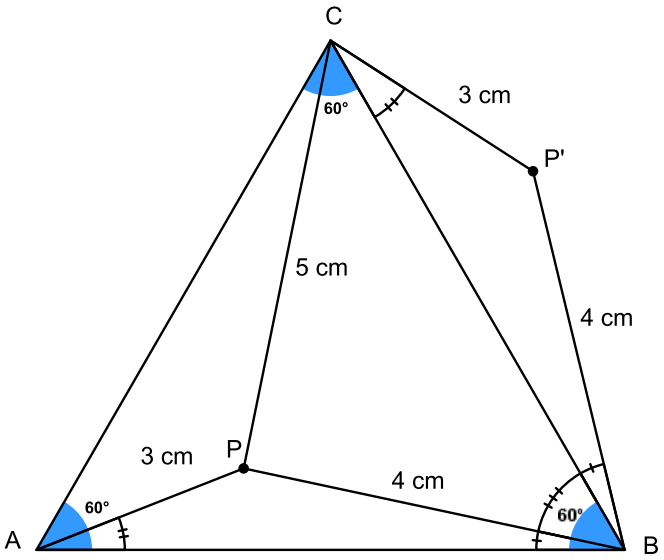
$$\sin\ 30^o = \frac{AE}{AB} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AE}{3} \Longrightarrow AE = \frac{3}{2}.$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle AED$ obtemos

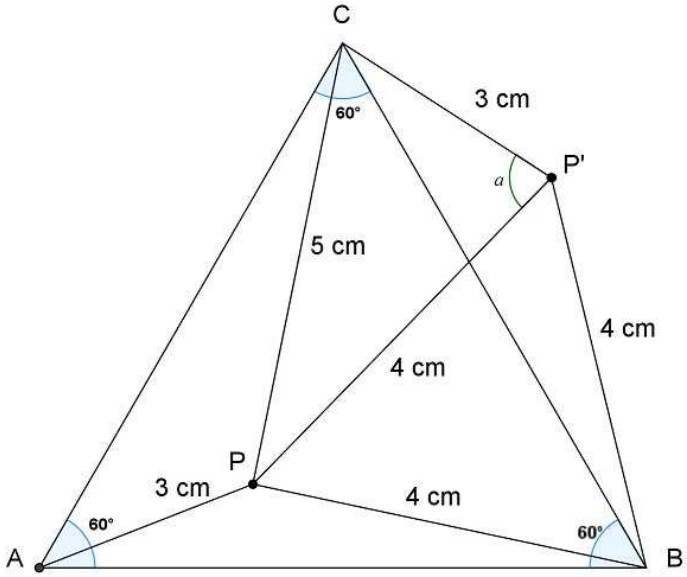
$$AD^2 = AE^2 + ED^2 \Longrightarrow AD^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 4\right)^2 \Longrightarrow AD^2 = 25 + 12\sqrt{3}.$$

Daí, concluímos que $AD = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}\ cm$.

5. ***Calculando lados de um triângulo -*** Sobre o lado CB do triângulo $\triangle ABC$, construa um novo triângulo $\triangle CBP'$ congruente ao triângulo $\triangle ABP$ tal que $\widehat{PAB} = \widehat{BCP'}$ e $\widehat{ABP} = \widehat{CBP'}$.

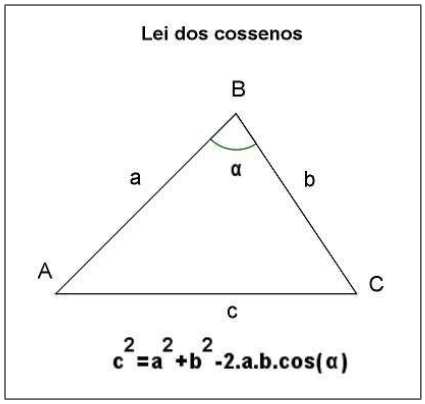


Note que o ângulo $\widehat{PBP'}$ é congruente ao ângulo $\widehat{ABC}$, ou seja, mede 60º. Assim, se traçarmos o segmento PP' temos que o triângulo $\triangle PBP'$, que é isósceles já que $PB = BP' = 4cm$, é equilátero e, por conseguinte, temos que $PP' = 4cm$.



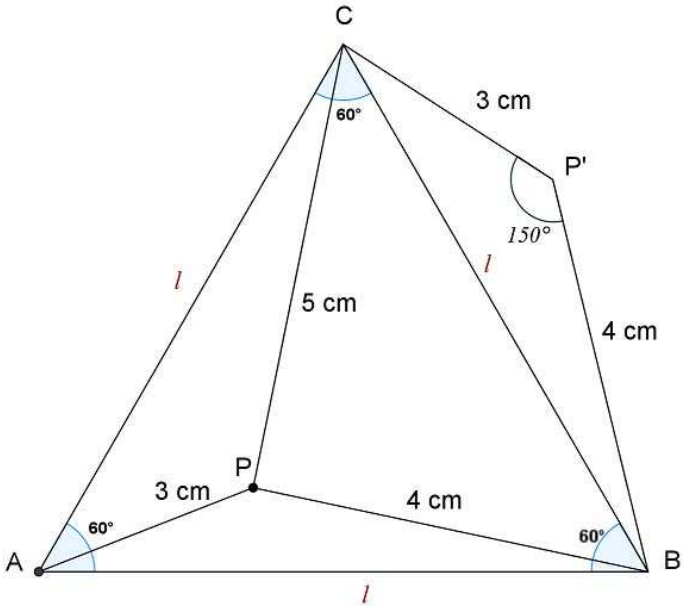
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\triangle CPP'$, onde o ângulo $\widehat{PP'C} = a$, temos:

$$5^2 = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.cos\ a \Rightarrow 25 = 25 - 12.cos\ a \Rightarrow cos\ a = 0 \Rightarrow a = 90^o.$$



$5^2 = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.cos\ a \Rightarrow 25 = 25 - 12.cos\ a \Rightarrow cos\ a = 0 \Rightarrow a = 90^o.$

Desta forma, o ângulo $\widehat{CP'B} = a + 60^o = 90^o + 60^o = 150^o$.



Agora, aplicando a lei dos cossenos ao $\triangle CBP'$, onde o lado do triângulo $\triangle ABC$ é l, temos:

$$l^2 = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.cos\ 150^o \Rightarrow l^2 = 25 - 2.3.4.(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow$$

$$l^2 = 25 + 12\sqrt{3} \Rightarrow l = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}.$$

Logo, o comprimento dos lados do triângulo equilátero $\triangle ABC$ é

$$l = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}\ cm.$$

Lista 4

1. ***Amigo Oculto -*** Primeiramente observemos que o número de formas de distribuir os presentes sem nenhuma restrição é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

   Daí temos que tirar os casos "ruins", isto é, os casos em que exatamente uma pessoa tirou o seu próprio presente, exatamente duas pessoas tiraram os seus próprios presentes, etc. Assim temos os seguintes casos:

   - os 5 amigos ficarem com seus presentes. Nesse caso, temos somente uma possibilidade.
   - exatamente 4 amigos ficarem com seus presentes. Isso não é possível.
   - exatamente 3 amigos ficarem com seu próprio presente. Nesta situação, os outros dois amigos trocam os presentes. Assim, temos que escolher 3 pessoas entre as 5, isto é, $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$ possibilidades.
   - exatamente 2 amigos ficarem com seu próprio presente. Neste caso, temos que escolher 2 pessoas entre as 5, isto é, $\frac{5 \times 4}{2} = 10$. Os outros 3 amigos trocam os presentes entre si, obtendo $10 \times 2 = 20$ possibilidades.
   - Por último para que exatamente uma pessoa fique com seu presente é a maneira de escolher essa pessoa, em um total de 5 possibilidades multiplicado pelo número de formas que os outros amigos não fiquem com seu presente, que são 9 maneiras, ou seja, nesta situação temos um total de $5 \times 9 = 45$ possibilidades.

   Portanto o número de possibilidades para que ninguém fique com seu próprio presente é:

   $$120 - 45 - 20 - 10 - 1 = 44.$$

2. ***Contando soluções -*** Isolando x na equação $\dfrac{xy}{x+y} = 144$ obtemos $x = \dfrac{144y}{y-144}$. Como x deve ser positivo, devemos ter $y = 144 + n$, onde n é um número inteiro positivo. Substituindo essa expressão de y no valor de x, obtemos $x = \dfrac{144^2}{n} + 144$. Como x deve ser um número inteiro, n deve ser um divisor de 144^2. Sendo $144^2 = 12^4 = 2^8 \cdot 3^4$, segue que 144^2 tem $(8+1)\cdot(4+1) = 45$ divisores. Assim, para cada divisor n de 144^2, obtemos uma solução

$$(x, y) = \left(\frac{144^2}{n} + 144\ ,\ 144 + n\right)$$

da equação $\dfrac{xy}{x+y} = 144$. Assim essa equação possui 45 pares ordenados de números inteiros positivos (x, y) que a satisfazem.

3. ***Determinando uma seqüência -*** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{80}$ os números desta seqüência. Para cada $i \geq 1$ temos

$$a_{i+1} = a_i \cdot a_{i+2}$$

$$a_{i+2} = a_{i+1} \cdot a_{i+3}$$

Conseqüentemente, $a_{i+1} = a_i \cdot a_{i+1} \cdot a_{i+3}$, e como $a_{i+1} \neq 0$, pois o produto dos termos da seqüência é $8 \neq 0$, segue $a_i \cdot a_{i+3} = 1$.

Logo, quaisquer dois números desta seqüência, cujos índices distam três um do outro, são tais que o seu produto é igual a 1. Portanto o produto de seis números consecutivos nesta seqüência é sempre igual a 1.

Sendo o produto dos 40 primeiros termos da seqüência igual a 8, conclui-se que o produto dos 4 primeiros termos também é 8, pois os 36 termos restantes formam seis grupos de 6 termos consecutivos da seqüência, e em cada grupo desse, o produto desses números é igual a 1. Isto é, $a_1a_2a_3a_4 = 8$. Como $a_i \cdot a_{i+3} = 1$, segue $a_1a_4 = 1$ e daí $a_2a_3 = 8$.

Temos também a hipótese de que os 80 termos da seqüência têm produto igual a 8, donde podemos concluir que $a_1a_2 = 8$ já que os 78 últimos termos podem ser agrupados em 13 grupos de 6 termos consecutivos, cada um com produto igual a 1, como já vimos.

Então, de $a_2a_3 = 8$, $a_1a_2 = 8$ e $a_2 = a_1a_3$, obtemos a resposta:

$$a_1 = 2, a_2 = 4 \text{ e } a_3 = 2 \ .$$

Observe, mais ainda, que toda a seqüência está agora determinada:

$$2,\ 4,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 4,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}, \ldots$$

Nesta seqüência, os seis primeiros termos ficam se repetindo sempre na mesma ordem.

4. ***Construindo uma cerca -*** A soma dos comprimentos dos 3 lados (os que não são de pedra) é $140\,m$.

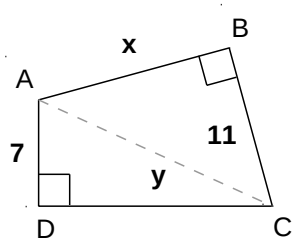
   (a) Se os dois lados vizinhos ao muro de pedra têm $40\,m$ cada um, os dois juntos têm $80\,m$, e logo o terceiro lado terá

   $$140 - 80 = 60\,m\,.$$

   (b) Se o maior dos lados a ser cercado tiver $85\,m$, ele não pode estar encostado no muro de pedras porque nesse caso esses dois muros mediriam $85 \times 2 = 170\,m$ que é maior do que $140\,m$. Logo ele teria que ser paralelo ao muro de pedra, e nesse caso cada um dos outros lados mediria $27,5\,m$, o que também não é possível porque a cerca é composta de pedaços inteiros de $1\,m$ cada um.

Os dois lados que encostam no muro de pedra podem ter $65\,m$ cada uma pois nesse caso, o outro teria $140 - 2 \times 65 = 10\,m$, o que não contraria as condições dadas.

5. ***Um quadrilátero especial -***



Denotemos $AB = x$ e $DC = y$.

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ são retângulos e têm a mesma hipotenusa AC, pelo teorema de Pitágoras temos:

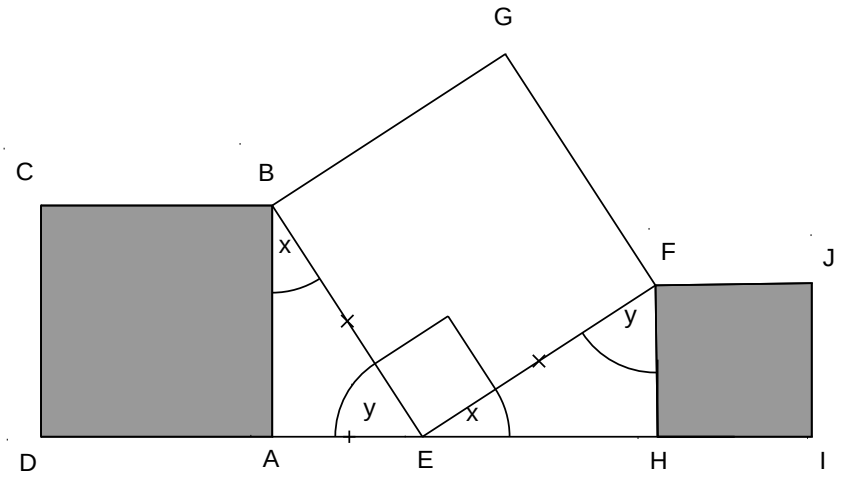
$$x^2 + 11^2 = y^2 + 7^2 \implies y^2 - x^2 = 72 \implies (y-x)(y+x) = 72 = 2^3 \times 3^2.$$

Logo, $y-x$ e $y+x$ são divisores de 72. Para cada fatoração temos que resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas, como feito na tabela a seguir.

Fator de 72		Medidas de		Observações
y + x	y - x	x	y	
72	1	-	-	Não há solução inteira
36	2	17	19	Possui solução inteira
24	3	-	-	Não há solução inteira
28	4	12	16	Possui solução inteira
12	6	3	9	Possui solução inteira
9	8	-	-	Não há solução inteira

Lista 5

1. ***Três quadrados -***



Sejam $x = \widehat{FEH}$ e $y = \widehat{AEB}$. Temos que

$$x + \underbrace{\widehat{FEB}}_{90^o} + y = 180^o \;\Rightarrow\; x + y = 90^0\,.$$

Como os triângulos ABE e EFH são retângulos, segue que $\widehat{ABE} = x$ e $\widehat{EFH} = y$. Logo, esses dois triângulos são congruentes, pois têm os 3 ângulos iguais e um lado igual ($BE = EF$). Em particular, $AE = FH$.

Podemos agora calcular a área do quadrado $BEFG$ usando o Teorema de Pitágoras:

$$\text{área de } BEFG = BE^2 = AB^2 + AE^2 = 30^2 + FH^2 = 30^2 + 20^2 = 1300.$$

2. ***Bolinha de gude -***

Solução 1: Denotemos por x, y e z o número de bolinhas que cada um tinha no início da partida. De acordo com o enunciado temos:

	1^o	2^o	3^o
Início	x	y	z
Após a 1^a rodada	$x-y-z$	$2y$	$2z$
Após a 2^a rodada	$2(x-y-z)$	$2y-2z-(x-y-z)$	$4z$
Após a 3^a rodada	$4(x-y-z)$	$2(3y-x-z)$	$4z-2(x-y-z)-(3y-x-z)$

Como cada um terminou a partida com 64 bolinhas, segue que:

$$\begin{cases} 4(x-y-z)=64 \\ 2(3y-x-z)=64 \\ 4z-2(x-y-z)-(3y-x-z)=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=16 \\ -x+3y-z=32 \\ -x-y+7z=64 \end{cases}$$

Para resolver o sistema adicionamos a 1^a e 2^a equações, e a 1^a e 3^a, obtendo

$$\begin{cases} y-z=24 \\ -y+3z=40 \end{cases}$$

Daí, obtemos: $z=32$ e $y=56$. Logo, $x=16+56+32=104$.

Solução 2: Vamos preencher a tabela de "de baixo para cima", isto é: do final para o início do jogo. Começamos com 64 nas três casas.

	1^o	2^o	3^o
Início			
Após a 1^a rodada			
Após a 2^a rodada			
Após a 3^a rodada	64	64	64

Como o 1^o e o 2^o jogadores dobraram a quantidade de bolinhas na 3^a jogada, cada um tinha 32 bolinhas, e o 3^o jogador deu 32 a da um deles, logo possuía $64+32+32+128$ bolinhas.

	1^o	2^o	3^o
Início			
Após a 1^a rodada			
Após a 2^a rodada	32	32	128
Após a 3^a rodada	64	64	64

Agora, quem perdeu a 2^a jogada foi o 2^o jogador, logo a tabela fica:

	1^o	2^o	3^o
Início			
Após a 1^a rodada	16	$32+16+64=112$	64
Após a 2^a rodada	32	32	128
Após a 3^a rodada	64	64	64

Finalmente,

	1^o	2^o	3^o
Início	$16+56+32=104$	56	32
Após a 1^a rodada	16	$32+16+64=112$	64
Após a 2^a rodada	32	32	128
Após a 3^a rodada	64	64	64

3. ***Uma soma -*** Inicialmente, observe que $\dfrac{1}{K\cdot(K+1)} = \dfrac{1}{K} - \dfrac{1}{K+1}$.

Logo,

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad \frac{1}{2007\cdot 2008} = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}.$$

Assim, temos:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}.$$

Logo, $S = 1 - \dfrac{1}{2008} = \dfrac{2007}{2008}$.

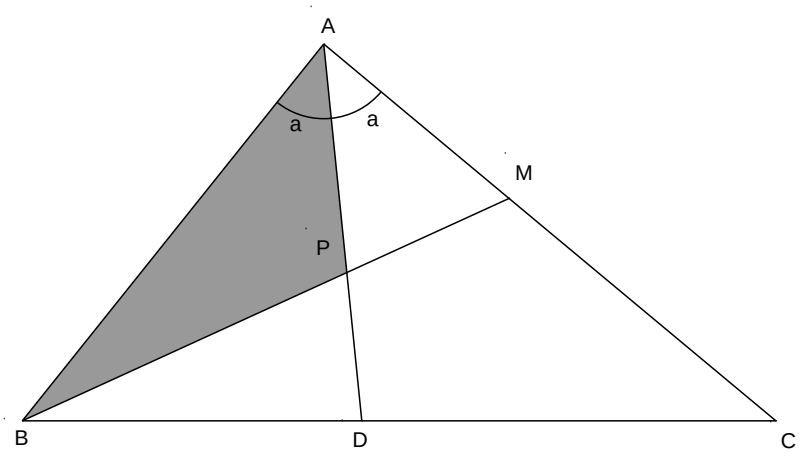
4. ***Dobrando papel -*** Sejam E e F os pontos de interseção como mostramos na figura. Sejam $AB = 2a$ e $BC = 2b$. Então $AM = MB = DN = NC = a$ e $ME = EN = b$. Trace AN e seja P o ponto de interseção dos segmentos AN e BD. Os segmentos AN e MC são paralelos (pois $AM = NC$ e $AM \parallel NC$).

   Como M é o ponto médio de AB e $MF \parallel AP$, temos que F é o ponto médio do segmento PB. Analogamente P é o ponto médio do segmento DF. Segue então que $DP = PF = FB$.

   Por simetria verificamos que $PE = EF$ e então $EF/FB = 1/2$.

   Por outro lado, a $\acute{a}rea \triangle MBE = \dfrac{1}{4}\acute{a}rea \triangle ABD = 125$, donde a $\acute{a}rea \triangle MEF = \dfrac{1}{3}125 = \dfrac{125}{3} cm^2$, já que $\triangle MEF$ e $\triangle MBE$ têm mesma altura relativo ao vértice M e a base do primeiro é $1/3$ da base do segundo.

5. ***Uma área -***



As alturas que passam por B dos triângulos ABC e ABM são iguais a distância d de B à reta AC, logo

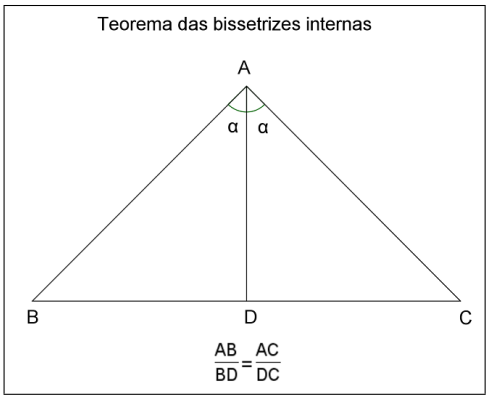
$$\frac{área \triangle ABM}{área \triangle ABC} = \frac{\frac{AM.d}{2}}{\frac{AC.d}{2}} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \text{ segue que}$$

$$área \triangle ABM = \frac{1}{2}\ área \triangle ABC = \frac{1}{2}100 = 50.$$

Analogamente, $\frac{área \triangle ABP}{área \triangle ABM} = \frac{BP}{BM}$.

Pelo Teorema das bissetrizes,

$$\frac{BP}{PM} = \frac{AB}{AM} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = \frac{3}{2}BP.$$



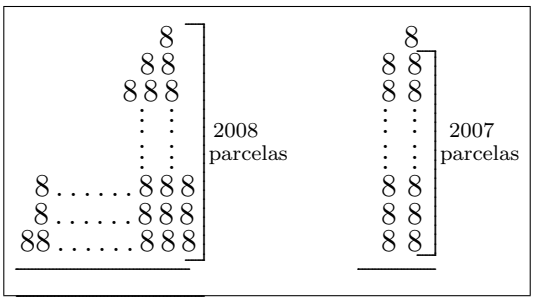
Logo,

$$\frac{área \triangle ABP}{área \triangle ABM} = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP + BM} = \frac{BP}{BP + \frac{2}{3}BP} = \frac{BP}{\frac{5}{2}BP} = \frac{2}{5}.$$

Assim: $área \triangle ABP = \frac{2}{5}\ área\ ABM = \frac{2}{5}50 = 20.$

Lista 6

1. ***Últimos algarismos -***



Solução 1: Como só queremos saber os dois últimos algarismos, basta conhecer as duas últimas colunas dessa soma (das dezenas e das unidades), ou seja:

$$8 + 88 \times 2007 = 8 + \ldots 16\,.$$

Os últimos algarismos são $16 + 8 = 24$.

Solução 2: Observemos que os dois últimos algarismos de

$$8 + 88 + 888 + \cdots + \overbrace{88\cdots88}^{2008}$$

são iguais aos dois últimos algarismos do número

$$8 + \overbrace{88 + \cdots + 88}^{2007} = 8 + 2007 \times 88,$$

que também coincide com os dois últimos algarismos de $8 + 7 \times 88 = 624$, logo o número procurado é 24.

2. ***Idades múltiplas -***

Quando Isabel tem a anos sua mãe tem $20 + a$. Se a é divisor de $20 + a$, então $\dfrac{20+a}{a} = \dfrac{20}{a} + 1$ é um número inteiro.

Logo, a é divisor de 20. Portanto,

$$a \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}.$$

Assim, temos um total de 6 vezes. De fato, temos:

	$a = 1$	$a = 2$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 10$	$a = 20$
Isabel	1	2	4	5	10	20
Mãe	21	22	24	25	30	40

3. ***Blocos diferentes -*** O volume do cubo é $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000\,cm^3$. O volume V de um bloco, é o produto de sua três medidas:

$$V = \text{largura} \times \text{comprimento} \times \text{altura}.$$

Como para construir cada bloco Ana tem que usar todos os bloquinhos, o volume de cada bloco será

$$V = \text{largura} \times \text{comprimento} \times \text{altura} = 1000\,cm^3.$$

Logo, precisamos saber de quantas maneiras podemos escrever 1000 como produto de 3 números naturais. Para isso, fatoramos 1000 e obtemos

$$1000 = 2^3 \times 5^3.$$

Solução 1: Uma maneira de encontrar esses números é listando as potências de 2 e 3, sem esquecer que uma das medidas pode ser 1. A tabela abaixo mostra as 19 possibilidades para esses blocos.

potência de 2	potência de 5	l	c	a
3	3	1	1	$2^3 \times 5^3$
		1	2^3	5^3
1 , 2	3	1	2	$2^2 \times 5^3$
		1	2^2	2×5^3
		2	2^2	5^3
1 , 1 , 1	3	2	2	2×5^3
3	1 , 2	1	$2^3 \times 5$	5^2
		1	$2^3 \times 5^2$	5
		2^3	5	5^2
3	1 , 1 , 1	5	5	$2^3 \times 5$
1 , 2	1 , 2	1	2×5	$2^2 \times 5^2$
		1	2×5^2	$2^2 \times 5$
		2	5	$2^2 \times 5^2$
		2^2	2×5	5^2
		2^2	2×5^2	5
		2	$2^2 \times 5$	5^2
1 , 2	1 , 1 , 1	5	2×5	$2^2 \times 5$
1 , 1 , 1	1 , 2	5	2×5	2×5^2
1 , 1 , 1	1 , 1 , 1	2×5	2×5	2×5

Solução 2: Se $1000 = l \times c \times a$, com $l \leq c \leq a$, então $l^3 \leq lca \leq 1000$, isto é, $l \leq 10$. Logo, $l = 1$, 2, 4, 5, 8 ou 10.

Se $l = 1$, então $ca = 1000 = 2^3 \times 5^3$, com $1 \leq c \leq a$. Assim, temos 8 variação de c e a:

$c = 1$ e $a = 1000$; $c = 2$ e $a = 500$; $c = 4$ e $a = 250$; $c = 5$ e $a = 200$;
$c = 8$ e $a = 125$;

$c = 10$ e $a = 100$; $c = 20$ e $a = 50$; $c = 25$ e $a = 40$.

Se $l = 2$, então $ca = 500 = 2^2 \times 5^3$, com $2 \leq c \leq a$, e neste caso temos 5 blocos:

$$c = 2 \text{ e } a = 250\,; \quad c = 4 \text{ e } a = 125\,; \quad c = 5 \text{ e } a = 100\,;$$

$$c = 10 \text{ e } a = 50\,; \quad c = 20 \text{ e } a = 25.$$

Se $l = 4$, então $ca = 250 = 2 \times 5^3$, com $4 \leq c \leq a$. Temos os 2 possíveis casos:

$$c = 5 \text{ e } a = 50 \quad ; \quad c = 10 \text{ e } a = 25.$$

Se $l = 5$, então $ca = 200 = 2^3 \times 5^2$, com $5 \leq c \leq a$. Temos os 3 possíveis casos:

$$c = 5 \text{ e } a = 40 \quad ; \quad c = 8 \text{ e } a = 25 \quad ; \quad c = 10 \text{ e } a = 20.$$

Se $l = 8$, então $ca = 125 = 5^3$, com $8 \leq c \leq a$. Neste caso não temos nenhuma possibilidade.

Por último, se $l = 10$, então $c = a = 10$, daí temos apenas um bloco.

Logo, o número de blocos diferentes é $8 + 5 + 2 + 3 + 1 = 19$.

4. ***Quadro negro -***

Inicialmente observe que de 1 a 77 Ana apagou 11 múltiplos de 7 e 7 múltiplos de 11. Como 77 é múltiplo de 7 e de 11, ela então apagou $11 + 7 - 1 = 17$, sobrando $77 - 17 = 60$ números.

Agora, agrupando os 10 000 primeiros números em grupos de 77 números consecutivos, esse raciocínio se aplica em cada uma das linhas abaixo, isto é: em cada linha sobraram 60 números.

$$\begin{array}{rcccccccc} 1^a \text{ linha} & \rightarrow & 1 & , & 2 & , & \ldots & , & 77 \\ 2^a \text{ linha} & \rightarrow & 78 & , & 79 & , & \ldots & , & 154 \\ 3^a \text{ linha} & \rightarrow & 155 & , & 158 & , & \ldots & , & 231 \\ \vdots & & \vdots & , & \vdots & , & \ldots & , & \vdots \end{array}$$

Como, $2008 = 33 \times 60 + 28$, sabemos que entre os primeiros $33 \times 77 = 2541$ números ficaram sem apagar $33 \times 60 = 1980$ números.

$$\begin{array}{rcccccccc} 1^a \text{ linha} & \rightarrow & 1 & , & 2 & , & \ldots & , & 77 \\ 2^a \text{ linha} & \rightarrow & 78 & , & 79 & , & \ldots & , & 154 \\ 3^a \text{ linha} & \rightarrow & 157 & , & 158 & , & \ldots & , & 231 \\ \vdots & & \vdots & , & \vdots & , & \ldots & , & \vdots \\ 33^a \text{ linha} & \rightarrow & \ldots & , & \ldots & , & \ldots & , & 2541 \end{array}$$

Ainda faltam contar 28 números. Vamos, então, examinar a 34^a linha:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 1^a & \ldots & 7^a & \ldots & 11^a & \ldots & 14^a & \ldots & 21^a & \ldots & 22^a & \ldots & 28^a & \ldots & 33^a & \ldots & 35^a & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 2542 & & & & & & & & & & & & & & & & 2576 & \end{array}$$

Lembre que os números apagados estão nas seguintes colunas: 7^a, 11^a, 14^a, 21^a, 22^a, 28^a, 33^a, 35^a, etc. Até a 35^a coluna foram apagados 8 números, restando então $35 - 8 = 27$ números na 34^a linha. Logo, depois de apagados os múltiplos de 7 e de 11 nessa linha, o 28^o número é 2577. Assim, o número na 2008^a posição é 2577.

5. ***Conjunto sem múltiplos*** - Inicialmente, observemos que o conjunto com 50 elementos

$$\{51, 52, 53, \ldots, 100\}$$

satisfaz a condição requerida. Assim o subconjunto, com mais elementos, tem no mínimo 50 elementos.

Vamos mostrar que todo subconjunto A com um número de elementos maior do que 50 possui dois números múltiplos. Para isto vamos dividir os números de 1 a 100 em 50 subconjuntos distintos da seguinte forma:

$$(\text{número ímpar}) \times 2^n \ ; \ n \text{ natural}.$$

- 1^o subconjunto: 1×2^n , $A_1 = \{1 \times 2^n; n \in \mathbb{N}\}$;

  $1 = 1{\cdot}2^0$; $2 = 1{\cdot}2$; $4 = 1{\cdot}2^2$; $8 = 1{\cdot}2^3$; $16 = 1{\cdot}2^4$; $32 = 1{\cdot}2^5$; $64 = 1 \cdot 2^6$;

- 2^o subconjunto: 3×2^n , $A_2 = \{3 \times 2^n; n \in \mathbb{N}\}$;

  $3 = 3 \cdot 2^0$; $6 = 3 \cdot 2$ $12 = 3 \cdot 2^2$; $24 = 3 \cdot 2^3$; $48 = 3 \cdot 2^4$; $96 = 3 \cdot 2^5$;

- 3^o subconjunto: 5×2^n , $A_3 = \{5 \times 2^n; n \in \mathbb{N}\}$;

  $5 = 5 \cdot 2^0$; $10 = 5 \cdot 2$; $20 = 5 \cdot 2^2$; $40 = 5 \cdot 2^3$; $80 = 5 \cdot 2^4$;

  $\vdots$

- 50^o subconjunto: 99×2^n , $A_{50} = \{99 \times 2^n; n \in \mathbb{N}\} = \{99\}$.

Com isso podemos garantir que se dois elementos estão no mesmo subconjunto, então um é múltiplo do outro. Como existem apenas 50 números ímpares entre 1 e 100, temos 50 subconjuntos disjuntos 2 a 2 construídos desta maneira.

Note que o conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$ é a união dos 50 subconjuntos, isto é,

$$\{1, 2, \ldots, 100\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{50}.$$

Com certeza, podemos afirmar que existem pelo menos dois elementos de A num mesmo subconjunto A_i , e assim um é múltiplo do outro. O que não é possível. Logo, o subconjunto com maior número de elementos, sem múltiplos tem 50 elementos.