Lógica Matemática

Problemas Resueltos

<u>Capítulo II.</u>

II-1. Solución:

a) Sean: p, ‘la relación R es relación de equivalencia’;

q, ‘la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva’;

Así $p\leftrightarrow q$

b) Sean: r, ‘la humedad es alta’;

s, ‘lloverá esta tarde ‘;

t, ‘lloverá esta noche’;

Así $r\rightarrow(s\vee t)$

c) Sean: u, ‘el cáncer se cura’;

w, ‘se determina la causa’;

x, ‘se encuentra un nuevo fármaco’;

Así $\neg u\vee(w\wedge x)$

d) Sean: y, ‘se requiere valor’;

z, ‘se requiere preparación’;

a, ‘se escala esta montaña’;

Así $a\rightarrow(z\wedge y)$

e) Sean: b, ‘es un hombre que hace una campaña dura’;

c, ‘es un hombre que probablemente será elegido’;

Así $b\rightarrow c$

II-2. Solución:

a) Si está enfermo necesita un doctor y si tiene un accidente necesita un abogado.

b) Si necesita un doctor, está enfermo o es injuriado.

c) Si necesita un doctor y un abogado, tiene un accidente.

d) Necesita un doctor y un abogado, si y sólo si está enfermo y es injuriado.

e) Si, ni está enfermo ni es injuriado, no necesita un doctor. (En ésta es obvia la aplicación de una de las leyes de Morgan).

II-3. Solución:

Un procedimiento es hacer la tabla de verdad (si todos son ceros es una contradicción, si todos son unos es una tautología, y si ni lo uno ni lo otro, son indeterminaciones). Es recomendable hacer este ejercicio, como se explica más adelante, mediante la forma clausulada; pero para indeterminaciones, el proceso es análogo al aquí descrito, o sea, se buscará un ejemplo para el que es verdadera y otro para el que es falsa. Así:

a) es tautología;

b) es indeterminada, pues para $p=1$ y $q=0$ es falsa y para $p=q=1$, es verdadera;

c) es indeterminada, pues para $q=1$ la frase es falsa y si $q=0$, la frase es verdadera, para $p = 0$.

d) es indeterminada, pues para $p=1$ es verdadera y para $p=0$ y $q=1$ es falsa.

e) es tautología.

f) es indeterminada, pues para $p=0$ y $q=1$ es falsa, y para $p=q=1$ es verdadera.

g) es tautología.

h) es tautología.

i) es tautología.

j) es indeterminación, pues para $p=q=0$ es verdadera y para $p=0$ y $q=1$ es falsa.

k) es una contradicción.

l) es una indeterminación, pues es falsa para $p=1$ y verdadera para $p=0$.

m) análoga a la anterior, pero al revés.

II-4. Solución:

Hacer las tablas es trivial. Por árboles semánticos se tiene:

a) Si p es verdadera, la segunda implicación es verdadera (por tener el consecuente verdadero) y por ser toda la proposición una disyunción, es verdadera; si p es falsa, la primera implicación es verdadera (por tener el antecedente falso) y por ser toda la proposición una disyunción, es verdadera.

b) Si p es verdadera, la verdad de ambos miembros de la doble implicación queda reducida a la verdad de la misma proposición, o sea, 'no q', lo que genera una verdad, pues 'no q' equivale a 'no q'; si p es falsa, el primer miembro es verdadero por tener el antecedente falso, y el segundo miembro también es verdadero, ya que es la negación de la falsedad 'p y q', la cual es falsa por serlo p; luego la proposición es una tautología.

c) Si p es falsa, el segundo término de la disyunción es verdadero, ya que es la negación de una falsedad obvia; si p es verdadera, hay dos posibilidades: i) que q sea falsa; entonces 'no q' es verdadera y toda la disyunción es verdadera, y, ii) que q sea verdadera; entonces la implicación material es falsa; la conjunción también resulta falsa; su negación es verdadera; y la disyunción resulta, por ello, también verdadera.

Por refutación se tiene:

a) La negación de $(p\to q)\vee(q\to p)$, (sabiendo que $\neg(a\to b)\equiv a\wedge\neg b$, por De Morgan), es $\neg((p\to q)\vee(q\to p)) \equiv \neg(p\to q)\wedge\neg(q\to p) \equiv p\wedge\neg q\wedge q\wedge\neg p$, que es una contradicción, lo que prueba que la sentencia dada es una tautología.

b) $(p\to\neg q) \leftrightarrow \neg(p\wedge q)$. Es una tautología: La negación de $a\leftrightarrow b$ es $\neg(a\leftrightarrow b)$, que, en lógica de proposiciones, es $a\leftrightarrow\neg b$, así que la negación de la proposición dada es $(p\to\neg q)\leftrightarrow(p\wedge q)$, o sea $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$, que por De Morgan queda $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge q)$, lo cual es una contradicción.

c) La negación de la proposición, aplicando De Morgan, es $q \wedge ((p \rightarrow \neg q) \wedge p)$, o sea, $p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)$. Aplicando la distributiva quedará: $(p \wedge q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge \neg q)$, cuyos dos términos son contradicciones.

II-5. Solución:

Si se pretende deducir directamente de los axiomas desde el principio, el proceso es largo: en PM esta proposición es el teorema número 87. Sin embargo se puede probar usando la regla de sustitución, suponiendo ya probados otros teoremas deducidos previamente - como se hace en PM -. Por ejemplo, como toda proposición se implica materialmente a sí misma, (o sea $p \rightarrow p$), tenemos:

$$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

ahora,

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee r)$$

por definición de implicación aplicada al segundo término; aplicando sucesivamente a éste la ley de De Morgan (teorema probado previamente) y, de nuevo, la definición de la implicación material, se llega a que éste es $((p \wedge q) \rightarrow r)$, o sea, el consecuente de la proposición dada.

II-6. Solución:

Sean las tres proposiciones premisas, respectivamente P1, P2 y P3. Entonces:

1) $(p \wedge q) \rightarrow s$, por regla de inserción a P1 y P2;

2) $\neg s$, por regla de eliminación del $\wedge$ a P3;

3) q, idem;

4) $\neg(p \wedge q)$, por modus tollens a 1) y 2);

5) $\neg(\neg(\neg p \vee \neg q))$, por aplicación de la definición de $\wedge$ a 4);

6) $\neg p \vee \neg q$, por eliminación del negador RE$\neg$ a 5);

7) $q \rightarrow \neg p$, por def. de $\rightarrow$ a 6);

8) $\neg p$, por modus ponens a 3) y 7).

II-7. Solución:

Sean las premisas respectivamente P1, P2 y P3; P4 es superflua, pues es P2. Así tenemos:

1) $\neg r \vee s$, por def. de $\rightarrow$ a P1;

2) $\neg(\neg\neg p \vee s)$, idem a P3;

3) $\neg(p \vee s)$, por RE$\neg$ a 2);

4) $\neg p \wedge \neg s$, por De Morgan a 3);

5) $\neg p$, por RE$\wedge$ a 4);

6) $\neg s$, idem.

7) q, por modus ponens a P4 (o a P2) y a 5);

8) $\neg s \rightarrow \neg r$, por la regla de transposición a 1);

9) $\neg r$, por modus ponens a 6) y 8);

10) $q \wedge \neg r$, por RI$\wedge$ a 7) y 9).

II-8. Solución:

Sea P1 la primera premisa. Las otras son innecesarias, pues:

1) q, se obtiene directamente de P1 por *modus ponens*;

2) q∨t, por RI∨ a 1).

Se ve que se pueden seguir otros caminos aplicando la transitividad de la implicación, pero son mucho más largos.

II-9. **Solución**:

a) Aplicando sucesivamente la eliminación de →, la ley de De Morgan, la propiedad distributiva y suprimiendo las cláusulas tautológicas que llevan q, queda: (p∨r∨s∨¬r∨¬s); (p∨r∨¬q∨¬r∨¬s); (q∨r∨s∨¬r∨¬s); (q∨¬p∨s∨¬r∨¬s). Todas las cláusulas son tautologías. Los ejercicios b.- y c.- son igualmente triviales y se dejan al lector.

b) Se aplicarán sucesivamente la eliminación de ↔, la eliminación de →, la ley de De Morgan, y la idempotencia del ∧, para eliminar la cláusula repetida.

c) Se aplicarán sucesivamente la eliminación del → y del ¬, conjuntamente con la ley de De Morgan, y después las reglas de distributividad. En ambos casos, todas las cláusulas resultan ser tautologías.

II-10. **Solución**:

6.- Sea la negación de la conclusión ¬C: p. Entonces las cláusulas son: P1: ¬p∨¬q∨r; P2: ¬r∨s; de P3 se obtienen P3-1: q, y P3-2: ¬s. Vamos a aplicar resolución con refutación. De P1 y P3-1 se obtiene P4: ¬p∨r; de P2 y P3-2 se obtiene P5: ¬r; de P4 y P5, P6: ¬p, la cual, con ¬C, origina la cláusula vacía.

7.- P3 origina dos cláusulas al aplicar De Morgan (sale un ∧). Las cláusulas son; P1: ¬r∨s; P2: p∨q; P3-1: ¬p; P3-2: ¬s; P4: p∨q; ¬C: ¬q∨r. Ahora: de P1 y P3-2, P5: ¬r; de P2 y P3-1, P6: q; de P6 y ¬C, P7: r; de P5 y P7 se obtiene la cláusula vacía.

8.-: De P1 se obtiene q; ¬C1 es ¬q, tras negar la conclusión, así que la obtención de la cláusula vacía es inmediata.

II-11. Solución:

Una posible solución es esta pregunta: "Dígame: ¿El restaurante está a la derecha si y sólo si es ud. un mentiroso? ¿Verdad?". Si la respuesta es 'no', el restaurante está a la derecha y si es 'sí', está a la izquierda, con independencia de que hayamos dado con el mentiroso o no. Efectivamente, sea D 'está a la derecha', I 'está a la izquierda', V 'dice la verdad' y M 'miente'. Las posibles situaciones son: a) $D\wedge M$; b) $D\wedge V$; c) $I\wedge M$; d) $I\wedge V$. Veamos qué se responde en cada caso a la pregunta ¿$D\leftrightarrow M$?:

a) La doble implicación es verdadera. Como miente, dice: NO.

b) La doble implicación es ahora falsa. Como dice la verdad, responde: NO.

c) También ahora la doble implicación es falsa. Como miente, dice: SÍ.

d) Ahora la doble implicación es verdadera. Como dice la verdad, dice: SÍ.

II-12. Solución:

Sea A, 'Juan necesita un abogado' y sea M, 'Juan necesita un médico'. Las premisas forman la conjunción: $(A\vee M)\wedge(A\rightarrow M)$. Esta expresión puede escribirse como $(\neg A\rightarrow M)\wedge(A\rightarrow M)$. Si $\neg M$, se infiere una contradicción (haga la tabla de verdad de $\neg M\wedge(\neg A\rightarrow M)\wedge(A\rightarrow M)$, y compruebe que es una contradicción); luego necesariamente Juan necesita un médico. (O bien $((\neg A\rightarrow M)\wedge(A\rightarrow M))\rightarrow M$ es una tautología). Por otro lado, si $\neg A$, se tiene la frase $\neg A\wedge(\neg A\rightarrow M)\wedge(A\rightarrow M)$; esta proposición no es una contradicción necesariamente (haga la tabla de verdad y compruébelo); así pues no necesariamente Juan necesita un abogado.

Capítulo III.

III-1. Solución:

Sean R 'es rumiante', C 'es carnívoro' y M 'es mamífero'. Las premisas son P1: $\forall x(Rx \rightarrow \neg Cx)$; P2: $\exists x(Mx\wedge Cx)$; la conclusión es $\exists x(Mx\wedge\neg Rx)$, cuya negación (vamos a operar por refutación) designaremos por P3: $\forall x(\neg Mx \vee Rx)$. Así, en forma clausulada, se tiene: P1: $\neg Rx \vee \neg Cx$; P2-1: Ma; P2-2: Ca ('a' es una constante de Skolem); P3: $\neg Mx \vee Rx$. De P1 y P3, por resolución se obtiene P4: $\neg Mx \vee \neg Cx$; de P4 y P2-1, P5: $\neg Ca$; de P5 y P2-2 se obtiene la cláusula vacía.

III-2. Solución:

a) $\forall x \exists y Pxy$, en forma clausulada, con sustitución de la función de Skolem, es $Pxf(x)$; luego el predicado debería satisfacerse para todos los valores del universo del discurso, si fuera verdadero. O sea, debería satisfacerse $P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$, es decir $P(1, 2) \wedge P(2, 1)$, pero esto es falso ya que $P(2, 1)$ es falsa (lo dice el enunciado).

b) $P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b))$ es $P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$; ya se ha visto que es falsa.

c) En forma clausulada se tiene $\neg P(x, y) \vee P(f(x), f(y))$, o sea:

$$(\neg P(1, 1) \vee P(2, 2)) \wedge (\neg P(1, 2) \vee P(2, 1)) \wedge (\neg P(2, 1) \vee P(1, 2)) \wedge$$

$$\wedge (\neg P(2, 2) \vee P(1, 1))$$

esta proposición es falsa ya que la primera cláusula lo es. Efectivamente, $\neg P(1, 1)$ es falsa y $P(2, 2)$ también lo es, ambas por hipótesis en el enunciado del problema.

III-3.Solución:

Sean M, 'es mamífero', P, 'es pez' y Q, 'tiene pelos'. Veamos la formalización del razonamiento . P1: $\forall x(Mx \rightarrow Qx)$; P2: $\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$; la conclusión es $\forall x(Px \rightarrow \neg Mx)$, que negada origina $\neg C$: $\exists x(Px \wedge Mx)$. En forma clausulada se tiene P1: $\neg Mx \vee Qx$; P2: $\neg Px \vee \neg Qx$; $\neg C1$: Pa; $\neg C2$: Ma; 'a' es una constante de Skolem. Ahora, por resolución con refutación: de P1 y P2, P3: $\neg Mx \vee \neg Px$; de P3 y $\neg C1$, P4: $\neg Ma$; y de P4 y $\neg C2$, se obtiene la cláusula vacía.

Para un universo del discurso de dos peces, si éstos son 'a' y 'b':

$$[(Ma \rightarrow Qa) \wedge (Mb \rightarrow Qb) \wedge (Pa \rightarrow \neg Qa) \wedge (Pb \rightarrow \neg Qb)] \rightarrow$$

$\rightarrow$ $[(Pa\rightarrow\neg Ma)\wedge(Pb\rightarrow\neg Mb)]$.

Haciendo Ma = p; Qa = q; Pa = r; Mb = s; Qb = t; Pb = u, se tiene:

$$[(p\rightarrow q)\wedge(s\rightarrow t)\wedge(r\rightarrow\neg q)\wedge(u\rightarrow\neg t)] \rightarrow [(r\rightarrow\neg p)\wedge(u\rightarrow\neg s)].$$

Haga la tabla de verdad y comprobará que es una tautología.

III-4. **Solución**:

Llamemos P1 y P2 a las premisas en el orden en el que están. La negación de la conclusión es $\neg$C: $\forall x(\neg Rx\vee\neg Qx)$. Por lo tanto, las cláusulas son: P1: $\neg Px\vee Qx$; P2-1: Ra; P2-2: Pa; $\neg$C: $\neg Rx\vee\neg Qx$. Ahora, de P1 y P2-2, P3: Qa; de P3 y $\neg$C, P4: $\neg$Ra; de P4 y P2-1, se obtiene la cláusula vacía.

III-5.**Solución**:

Sean: J, 'es japonés', P, 'come pescado', e Y, 'es yudoca'. Entonces, P1: $\forall x(Jx\rightarrow Px)$; P2: $\exists x(Yx\wedge Jx)$; la conclusión es $\exists x(Yx\wedge Px)$, que, negada, queda $\forall x(\neg Yx\vee\neg Px)$. Así pues, las cláusulas son: P1: $\neg Jx\vee Px$; P2-1: Ya; P2-2: Ja; $\neg$C: $\neg Yx\vee\neg Px$. Ahora, de P1 y $\neg$C, P3: $\neg Jx\vee\neg Yx$; de P3 y P2-1, P4: $\neg$Ja; y de P4 y P2-2, se obtiene la cláusula vacía.

Veamos la solución del ejercicio sin usar refutación. De P1 y P2-2, se obtiene Pa; por la regla de introducción del $\wedge$, RI$\wedge$, de esta última y con P2-1, se obtiene la expresión $Pa\wedge Ya$ (o bien $Ya\wedge Pa$), que es la forma clausulada de $\exists x(Yx\wedge Px)$, luego el razonamiento es correcto. Ello se debe a que la constante de Skolem es la misma. Tengamos entonces cuidado cuando haya que poner constantes de Skolem diferentes, como, por ejemplo, es el caso de la expresión $\exists xYx\wedge\exists xPx$, cuya forma clausulada es (como ve, tiene dos cláusulas separadas por $\wedge$) $Ya\wedge Pb$; y, a su vez, el conjunto de las cláusulas Ya y Pb, no origina la expresión $\exists x(Yx\wedge Px)$, sino la expresión $\exists x(Yx)\wedge\exists x(Px)$. El cuantificador $\exists$ no tiene la propiedad distributiva frente a $\wedge$, sino sólo una propiedad semidistributiva. Así, es válido que $(\exists x(Yx\wedge Px)) \rightarrow (\exists x(Yx)\wedge\exists x(Px))$. Pero la proposición recíproca $(\exists x(Yx)\wedge\exists x(Px)) \rightarrow (\exists x(Yx\wedge Px))$, es falsa en general, como se prueba con el contraejemplo consistente en particularizar haciendo Y = $\neg$P, en el caso de que los conjuntos asociados a Y y a $\neg$P no sean vacíos (el consecuente de la última implicación sería falso y el antecedente verdadero).

III-6.Solución:

Eliminando el signo de implicación material, se tiene la expresión

$$\exists x(Px \lor Ix) \lor \forall x(Fy \land Dxy)$$

cambiando las letras para evitar la confusión, la dejamos como

$$\exists z(Pz \lor Iz) \lor \forall x(Fy \land Dxy)$$

como el cuantificador universal no afecta a z, podemos escribir

$$\exists z \forall x(Pz \lor Iz \lor (Fy \land Dxy))$$

aplicando la propiedad distributiva e introduciendo una constante de Skolem quedan las cláusulas '$Pa \lor Ia \lor Fy$' y '$Pa \lor Ia \lor Dxy$'.

III-7. **Solución**:

Formalicemos el razonamiento que es INCORRECTO. Sean M, 'es mamífero', P, 'es pez', V, 'vive en el agua y nada', S, 'tiene la sangre fría', y B, 'es ballena'. Así, las proposiciones quedan:

P1: $\forall x (Mx \to \neg Sx)$ $\neg Mx \lor \neg Sx$

P2: $\forall x (Px \to Sx)$ $\neg Px \lor Sx$

P3: $\forall x (Px \to Vx)$ $\neg Px \lor Vx$

P4: $\exists x (Mx \land Vx)$ P4-1: Ma P4-2: Va

P5: $\forall x (Bx \to \neg Sx)$ $\neg Bx \lor \neg Sx$

$\neg$C: $\exists x (Bx \land \neg Mx)$ $\neg$C1: Bb $\neg$C2: $\neg Mb$

Hemos introducido dos constantes de Skolem. $\neg$C se obtiene negando C: $\forall x(Bx \to Mx)$. Veamos las cláusulas a las que se puede llegar contrastando dos a dos. Tomamos la primera y la operamos con las de abajo (con las siguientes); luego hacemos lo mismo con la segunda;

luego con la tercera , etc.; y luego con las que hayan ido saliendo volvemos a realizar la operación esperado que no se produzca explosión combinatoria.

Pero en este caso tenemos suerte. Efectivamente, de P1 y P2, se obtiene P6: $\neg Mx \vee \neg Px$; de P1 y P4-1, P7: $\neg Sa$; de P2 y P5, se obtiene P8: $\neg Px \vee \neg Bx$; de $\neg C1$y P5, P9: $\neg Sb$. Después se pueden obtener, P10: $\neg Pb$, de P2 y P9, y P11: $\neg Pa$, de P2 y P7.

Si se consideran ahora dos cláusulas cualesquiera y se intenta operarlas por medio de una resolución, se verá que, o no se pueden operar, o el resultado de la operación ya ha sido obtenido previamente. Esto nos dice que ese conjunto de cláusulas es cerrado con respecto a la resolución y que, como la cláusula vacía no está entre ellas, no se puede obtener. Si se llega en un razonamiento a la cláusula vacía, ese razonamiento lleva a contradicción: es el caso del proceso de refutación en el que vemos que al negar la conclusión llegamos a una contradicción, así que el razonamiento de partida era universalmente válido o verdadero. Pero si no se puede llegar a la cláusula vacía en un proceso de refutación, de ahí NO se infiere que el razonamiento inicial o de partida sea válido. Sobre este problema se hablará más adelante.

Necesitamos otro procedimiento para probar la no validez general de este razonamiento. Para ello, escribiremos las premisas y la conclusión en forma conjuntista y buscaremos un contraejemplo para el que ese razonamiento no es válido. Denotaremos el conjunto asociado a cada predicado con su misma letra (es un abuso de lenguaje, pero facilita las cosas). En forma conjuntista las premisas son: 1) $M \subset c(S)$, donde la letra 'c' se lee 'complementario de'; 2) $P \subset S$; 3) $P \subset V$; 4) $M \cap V \neq \varnothing$; 5) $B \subset c(S)$; y la conclusión, C) $B \subset M$.

Un contraejemplo es el caso particular siguiente. Sean:

a) P el vacío $\varnothing$ (así seguro que 2) y 3) son verdaderas).

b) S = P, o sea también el vacío (así U = c(S) es el universo del discurso, con lo que 1) y 5) también serán verdaderas). Elegimos un U que tenga por ejemplo sólo dos elementos 'a' y 'b' (o sea $a \in U$, $b \in U$, y ningún otro pertenece a U).

c) M, el conjunto unitario cuyo único elemento es 'a'; elegimos también V = M; así 4) es verdadera porque la intersección de ambos no es vacía.

d) Por último elegimos B = U.

Para este caso concreto, las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. Luego el razonamiento es incorrecto. La falsedad de la conclusión $B \subset M$, es evidente, pues un conjunto que tiene dos elementos no puede estar contenido en otro que tiene sólo uno.

Para probar la falsedad de algo basta con un contraejemplo. Para probar la validez universal de algo no basta con una particularización.

III-8. **Solución**:

a) No es unificable, pues ‘a’ y ‘b’ son constantes, y nada garantiza que a = b.

b) Es unificable para x = a. Se habrá observado que en el texto se usa una barra de separación para indicar una sustitución, en vez del signo de igualdad. Esto es debido a que podría haber confusión entre el signo de igualdad como identidad y el signo de igualdad como asignación. Cuando ud. escribe x = a en un programa está ud. asignando el valor ‘a’ a la variable ‘x’, por ello no hay simetría con a = x en este significado que le damos al signo. Pues aquí ocurre igual: ‘x = a’ quiere decir que sustituimos, particularizando, ‘x’ por ‘a’. No podemos sustituir la constante ‘a’ por la variable ‘x’. Sí se puede sustituir una variable por otra; y se puede sustituir una variable por una función de Skolem que lleve una variable distinta, pero no al contrario en general, como vamos a ver ahora.

c) Estrictamente hablando, no son unificables, pues para ello no sólo debería ser x = y, sino también y = f(x); pero esto supondría que la función de Skolem usada debería cumplir x = f(x), lo que sólo se cumplirá a su vez si la ecuación ‘f(x) - x = 0’ tiene solución; ello no está garantizado por la condición única de que f es función. Puede darse el caso de que f(x) ≠ x, y la unificación no es posible en general.

   Se lo mostraremos con un ejemplo. Sea Q(m, n, t) el predicado aritmético ‘m+n = t’, y sea f(x) = x+7, siendo x, n, m, t, números naturales. Entonces Q(a, x, f(x)) es ‘a+x = f(x)’ y Q(a, y, y) es ‘a+y = y’; de esta última se obtiene ‘a = 0’, y sustituyendo en la primera queda ‘x = x+7’ que no es satisfecha por ningún número natural.

d) Haciendo ‘z = y’ y ‘x = h(v, v)’, se unifican en el conjunto formado por Q(a, h(v, v), y).

e) Se pueden unificar si se sustituyen adecuadamente unas variables por otras. En este caso, se necesita sólo el cambio de nombre de la variable y no se produce lo mismo que en el caso c). Haciendo sucesivamente los cambios:

   x1 = y1; y2 = g(x1) = g(y1); x2 = e(y2) = e(g(y1));

   y3 = h(x1, x2) = h(y1, e(y2)) = h(y1, e(g(y1)));

   x3 = f(y2, y3) = f(g(y1), h(y1, e(g(y1))));

$y4 = k(x1, x2, x3) = k(y1, e(g(y1)), f[g(y1), h(y1, e(g(y1)))])$.

Observe que esto puede hacerse porque las variables no originan ecuaciones nuevas que no sean las de la mera sustitución. El conjunto de los literales queda unificado en un conjunto unitario de literales: aquél que tiene por elemento (con y1 o x1, es indiferente):

$P(y1; g(y1); e(g(y1)); h(y1, e(g(y1))); ff; k(y1, e(g(y1)), ff))$,

donde ff es $f[g(y1), h(y1, e(g(y1)))]$.

III-9. **Solución**:

a) Para $x = a$, la resolvente es $Q(a, b) \vee Q(a, b)$, o sea $Q(a, b)$.

b) No hay resolvente, pues el único caso candidato es '$a = x = f(a)$', pero '$a = f(a)$', no tiene por qué tener solución si 'a' es variable; y si es constante, no tiene por qué cumplirse.

c) Antes de resolverlo haremos la suposición de que la posición de las variables se ha obtenido a través del proceso de clausulación. Es decir, que no pueden ser renombradas. Para entender esto mejor considere dos cláusulas Px y $\neg Pf(x)$; no son unificables ya que no tiene por qué haber un x tal que $x = f(x)$, y proceden de la expresión $\forall x(Px \wedge \neg Pf(x))$ (1); en cambio, las cláusulas Ps y $\neg Pf(x)$ sí son unificables para $s = f(x)$, dado que s es una variable que puede tomar cualquier valor y a la que le puede ser asignado f(x), y dichas cláusulas proceden de una expresión como $\forall sPs \wedge \forall x(\neg Pf(x))$, que equivale a $\forall xPx \wedge \forall x(\neg Pf(x))$ (2), a la que habría que cambiar el nombre de la primera x al ponerla en forma clausulada, ya que esta frase es diferente de (1); y esto no supone contradicción alguna con la distributividad del $\forall$ frente al $\wedge$, ya que no se trata de un cuantificador $\forall$, sino de dos cuantificadores $\forall\exists$, sólo que el segundo, el existencial, se ha cambiado por la introducción de la función de Skolem, pero no se ha eliminado, y, claro, $\forall\exists$ no es distributivo frente al $\wedge$. En este problema supondremos que todos los cambios de notación ya han sido realizados y que no se pueden realizar más. Observe que cuando hay funciones de Skolem, no se puede reconstruir la expresión lógica de la que proceden las cláusulas (a partir de ellas) debido a esta ambigüedad, excepto si se ha adoptado un criterio como el expuesto.

Vamos a ir probando la posible resolución de cada término de la primera cláusula con la segunda.

Veamos con el primero. Para ello, '$y = u$' y '$x = y$', lo que origina '$u = x = y$'; pero además '$x = g(x, y) = g(x, x)$', que no tienen por qué cumplirse en general para la g dada (g no tiene por qué ser biyectiva, ni, en la ecuación, tiene por qué ser ‘y’ despejable). Análogamente sucede para el segundo y para el tercero. Pero con el cuarto sí puede resolverse: efectivamente, las sucesivas sustituciones o particularizaciones dadas por ‘u = g(x, y)’, ‘z = x’ y ‘w = y’ sólo particularizan, sin originar condiciones nuevas. Así la resolvente es:

$\neg$Pxyg(x, y)) $\vee$ $\neg$Pyxv $\vee$ $\neg$Pxvy.

En el caso de no laber hecho la suposición a la que nos referimos antes, cabría haber inferido que $\neg$Pg(x,y)xy es unificable con Pxyu (bastaría con haber cambiado a Pg(z,t)zt), pero hemos preferido elegir el primer criterio por las razones antes dadas.

d) Haciendo ‘v = w’y ‘z = h(x, x)’, hay compatibilidad, así que la resolvente es Pwh(x, x)w, o Pvh(x, x)v, indistintamente.

III-10. Solución:

Es obvio. De la segunda y la cuarta obtenemos P5: $\neg$P; con P5 y la primera, obtenemos P6: Q$\vee$R; de ésta y de la tercera, P7: R; y de ésta y la cuarta de nuevo, se obtiene la cláusula vacía.

III-11. Solución:

Efectivamente, es válida universalmente (o en todo dominio o referencial o universo del discurso). Para probarlo la negaremos y llegaremos a una contradicción. Negada es $\exists x\forall y$Pxy $\wedge$ $\exists y\forall x(\neg$Pxy), pues la negación de ‘a $\rightarrow$ b’ es ‘a $\wedge$ $\neg$b’. Esta frase tiene dos cláusulas. La primera es ‘Pay’ y la segunda ‘$\neg$Pxb’, donde ‘a’ y ‘b’ son constantes de Skolem. Resolviendo para ‘x = a’ e ‘y = b’, se obtiene la cláusula vacía.

Nota. No se debe negar una forma clausulada intentando llegar a la cláusula vacía. Si se hace así se corre un riesgo de confusión, sobre todo si no se tiene costumbre de trabajar con este formalismo. Sea p. ej. $\neg$Sa; su negación no es Sa, pues $\neg$Sa es la forma clausulada, con constante de Skolem ‘a’, de la expresión $\exists x(\neg$Sx), cuya negación es $\forall x$Sx, que en forma clausulada es Sx; así, la negación clausulada de $\neg$Sa es Sx y no Sa.

Vamos a probar además en este ejercicio que la recíproca de la frase del problema no es universalmente válida. Es decir, la frase

(*) $\equiv \forall y\exists x$Pxy $\rightarrow \exists x\forall y$Pxy es falsa en general. En principio intentaríamos ponerla en forma clausulada y llegar a una contradicción o cláusula vacía. Veamos lo que sucede: eliminando la implicación, se tiene

$$\exists y\forall x(\neg Pxy) \vee \exists x\forall y Pxy,$$

cuya forma clausulada es sencilla: $\neg Pxa \vee Pby$; esta frase no conduce a nada, ni siquiera para ‘x = b’ e ‘y = a’, lo que daría una tautología particular $\neg Pab \vee Pab$. Un despiste podría hacernos decir que, por haber llegado a una tautología la frase inicial era cierta. Nada más falso. Si de una frase se llega a una contradicción o a la cláusula vacía, no habrá duda: la frase era falsa. Pero si mediante una particularización, esto es, sin dobles equivalencias, se llega a una tautología, no se puede inferir que la frase de partida era verdadera, pues de una falsedad puede salir algo cierto, p. ej. de $p\wedge\neg p$; aplicando RE$\wedge$ se obtiene p; y aplicándole a ésta RI$\vee$, se obtiene la tautología $p\vee\neg p$.

Para probar la no validez universal (que no es la falsedad universal) de la frase acudiremos a un contraejemplo. Considere el universo U del discurso formado por los números 1 y 2 y sólo por ellos. Elegimos $Pxy \equiv x \neq y$; entonces el antecedente de (*) es verdadero pues $\forall x$(de U) $\exists y\ (x \neq y)$, ya que para el 1 se tiene el 2 y para el 2, se tiene el 1. Pero el consecuente de la implicación (*) es falso pues dice que $\exists x$(de U) $\forall y\ (x \neq y)$, lo que es falso tanto para el 1 como para el 2, pues si ese x es el 1, eligiendo y = 1, se tiene $1 \neq 1$ (falso), y si ese x es el 2, eligiendo y = 2, se tiene $2 \neq 2$ (falso). Como el antecedente es verdadero y el consecuente falso, (*) es falsa en general.

Podríamos haber elegido un ejemplo de andar por casa: En el universo de los seres humanos, sea Pxy la relación ‘x es el padre de y (viva o no)’. También aquí el antecedente de (*) es verdadero (dice: para cualquier persona hay o ha habido otra que es su padre, -y si no le gusta, descarte a Adán y a Eva del universo del discurso-), pero el consecuente es falso (dice: hay una persona que es el padre de todo el mundo). No obstante, existen razones técnicas para que los contraejemplos lógicos se elijan con universos de números naturales. Procure hacerlo así. Más adelante profundizaremos un poco en esto.

III.12. Con este ejercicio se pretende adquirir práctica en estrategias que permitan analizar la posible verdad o validez de proposiciones lógicas de una forma un poco más rápida de lo habitual. Otra ventaja: estas estrategias se pueden usar a la hora de hacer un examen tipo test. Obsérvese que los métodos más utilizados serán los árboles semánticos y la asociación con proposiciones conjuntistas. Luego, para constatar la ‘evidencia’ se puede auxiliar uno de un diagrama de Venn-Euler. Como se entenderá, en este problema vamos a seguir procedimientos informales.

1. $\neg((p \to q) \to(\neg q\to\neg p))$. Es una contradicción ya que la frase interior es trivialmente tautológica. Si p es falsa, al haber en el último consecuente $\neg p$, toda ella (la interior),

resulta verdadera; y si p es verdadera, la primera implicación se reduce a q y la segunda también, por implicar $\neg q$ una falsedad; lo cual origina la tautología interior.

2. $((p\vee\neg q) \rightarrow (q\wedge r)) \rightarrow q$. Tautología. Si q es verdadera esto es obvio por figurar en el consecuente; si q es falsa, se ve en seguida que la verdad de la frase se reduce a la verdad del primer antecedente $p\vee\neg q$, que es verdadero por ser $\neg q$ verdadera, luego todo el antecedente es falso.

3. $\neg(p\rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$. Taut. Si q es falsa, el último consecuente es verdadero, luego toda la proposición es verdadera; si q es verdadera, tanto el antecedente como el consecuente se reducen a $\neg p$, luego toda la proposición es verdadera.

4. $((\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)) \rightarrow p$. Taut. Si p es verdadera, la frase es verdadera por tener el consecuente verdadero; si p es falsa, el antecedente se reduce a $q\wedge\neg q$, lo que unido a la falsedad del consecuente p, convierte la implicación en verdadera.

5. $((p\oplus q) \wedge q) \rightarrow\neg p$. Taut. Si p es falsa el consecuente es verdadero, lo que convierte la implicación en verdadera; y si p es verdadera, la verdad de $p\oplus q$ es la verdad de $\neg q$, quedando una contradicción, falsa, en el antecedente, lo que unido a la falsedad del consecuente, convierte la implicación en verdadera.

6. $\neg((p\wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q))$. Es una contradicción, ya que la frase interior del paréntesis principal es una tautología. Efectivamente, en lógica de proposiciones si se admiten dos proposiciones p y q, una y otra se implican mutuamente.

7. $((\neg p\vee q) \wedge (\neg q\vee s)) \rightarrow (\neg p\vee s)$. Taut. Es es el formato condicional de la ley de resolución.

8. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$. Ley de Duns Escoto. Es taut. Eliminando las implicaciones queda $p\vee\neg p\vee q$, que es obviamente tautológica.

9. $(\forall q(\neg p \rightarrow q)) \rightarrow p$. Ley de Clavius. Taut. Si p es verdadera, toda la proposición es verdadera por serlo el consecuente; si p es falsa, la verdad de $\neg p \rightarrow q$ es la verdad de q; así el antecedente queda $\forall q(q) = q \wedge \neg q$, que es una contradicción: como ambos, antecedente y consecuente son falsos, la implicación es verdadera. Obsérvese que el formato de la frase problema es propio de una lógica de segundo orden.

10. $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$. Taut. Si p es verdadera, se reduce a $\neg q \leftrightarrow \neg q$, lo que evidentemente es tautología; si p es falsa, se reduce a $q \leftrightarrow q$, que también lo es.

11. $(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$. Es una indeterminación: verdadera para $p = 0$ y $q = 1$; falsa para $p = 1$ y $q = 0$.

12. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$. Taut. Si q es verdadera, el primer término de la disyunción es verdadero por serlo su consecuente, luego la disyunción es verdadera por tener un término verdadero; si q es falsa, el segundo término de la disyunción (la segunda implicación) es verdadero por ser falso su antecedente.

13. $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)$. Es indeterminación. En forma contrarrecíproca es $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$, que para $p = 1$ y $q = 1$ es verdadera; pero para $p = 1$ y $q = 0$ es falsa.

14. $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$. Es indeterminación. Si $p = 1$ y $q = 1$ es verdadera; si $p = 1$ y $q = 0$, es falsa.

15. $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$. Taut. Si p es falsa el antecedente es falso, luego la implicación es verdadera. Si p es verdadera la verdad del antecedente es la verdad de $\neg q$; pero la del consecuente también porque si p es verdadera, la verdad de $p \rightarrow q$ es la verdad de q.

16. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$. Taut. Si q es verdadera la primera implicación es verdadera; si q es falsa, la segunda implicación es verdadera. En ambos casos la disyunción es verdadera.

17. $P \subset Q \vee P \subset c(Q)$. ('c' es 'complemento de'). Es falsa en general (compare con la anterior). El conocido contraejemplo de Russell: P es el conjunto de los ingleses, Q el conjunto de las mujeres, c(Q) el conjunto de los hombres y el referencial $U = Q \cup c(Q)$, el conjunto de las personas.

18. $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$. Taut. Si q es verdadera, el consecuente de la implicación principal es verdadero por serlo la implicación $p \rightarrow q$ (ya que a su vez tiene el consecuente verdadero) y ser verdadera entonces la disyunción. Si q es falsa, el antecedente de la implicación principal se reduce a $p \rightarrow r$, y el consecuente a una disyunción, tal que uno de sus componentes es $p \rightarrow r$ también, originándose igualmente una tautología.

19. $\forall x(Px \rightarrow (Qx \vee Rx)) \rightarrow (\forall x(Px \rightarrow Qx) \vee \forall x(Px \rightarrow Rx))$. Es falsa en general. Su forma conjuntista es $(P \subset (Q \cup R)) \rightarrow ((P \subset Q) \vee (P \subset R))$. Vale el mismo contraejemplo de Russell, con R, conjunto de los hombres (varones). Compare con la frase anterior.

20. $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$. Es tautológica o universalmente válida. Su forma conjuntista es $(P \subset Q) \rightarrow (P=U \rightarrow Q=U)$, que tiene también la forma $(P \subset Q \wedge P = U) \rightarrow Q=U$, lo que es evidente.

21. $(\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Qx)$. Es falsa en general. Su forma conjuntista es $(P = U \rightarrow Q = U) \rightarrow P \subset Q$. Cualquier contraejemplo que no la satisface: basta con que P no esté contenido en Q y que ninguno de los dos sea el referencial: así el consecuente de la

implicación será falso, pero el antecedente será verdadero por ser una implicación cuyos antecedente y consecuente son falsos: ello origina que la proposición completa sea falsa.

22. $\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$. Es falsa en general. El cuantificador universal no puede 'entrar' en una frase con un '$\vee$' cuyos dos términos posean la misma variable ligada al cuantificador (pero sí puede salir, como veremos en el próximo ejercicio xxiii, por lo que puede hablarse de 'semidistributividad'). Su forma conjuntista es $P \cup Q = U \rightarrow (P = U \vee Q = U)$. Un tipo de contraejemplos que no la satisfacen: Sea $P \neq U$ y $P = c(Q)$; el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso.

23. $(\forall xPx \vee \forall xQx) \rightarrow \forall x(Px \vee Qx)$. Tautológica o universalmente válida. Su forma conjuntista es $(P = U \vee Q = U) \rightarrow P \cup Q = U$. Está claro que si alguno de dos conjuntos es el referencial, su unión seguirá siendo el referencial.

24. $(\forall x(Px \rightarrow Qx) \wedge \neg Pa) \rightarrow \neg Qa$. Falsa en general. Su forma conjuntista es $(P \subset Q \wedge P \neq U) \rightarrow Q \neq U$, que para el caso $Q = U$ y $P = \varnothing$, tiene el antecedente verdadero y el consecuente falso. En cambio, el modus tollens $(\forall x(Px \rightarrow Qx) \wedge \neg Qa) \rightarrow \neg Pa$, es verdadera.

25. $(\forall xPx \leftrightarrow \forall xQx) \leftrightarrow (\forall xPx \rightarrow \neg \forall xQx)$. Falsa en general. P. ej. Si suponemos que $\forall xPx$ es verdadera, la frase se reduce a $\forall xQx \leftrightarrow \neg \forall xQx$ que es evidentemente falsa.

26. xxvi) $(\exists xPx \rightarrow p) \leftrightarrow \forall x(Px \rightarrow p)$. Taut. Y sirve de regla para sacar el cuantificador existencial del paréntesis. La forma clausulada de la primera se obtiene eliminando la implicación $\forall x \neg Px \vee p$, y quitando el cuantificador, $\neg Px \vee p$, que es precisamente lo que afirma la proposición de la derecha.

27. $(\exists xPx \rightarrow \exists xQx) \rightarrow \exists x(Px \rightarrow Qx)$. Taut. El antecedente afirma (al eliminar la primera implicación) que, o bien P es vacío o bien Q no es vacío; así que necesariamente la unión del complementario de P con Q, no puede ser vacía: pero esto es lo que afirma el consecuente de la implicación principal $c(P) \cup Q \neq \varnothing$ $(\exists x(\neg Px \vee Qx))$.

28. $\exists x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow \exists xQx)$. Falsa en general. Su forma conjuntista es $c(P) \cup Q \neq \varnothing \rightarrow (P = \varnothing \vee Q \neq \varnothing)$, lo que se ve contradicho por el caso en que $Q = \varnothing$ y P sea cualquier clase no vacía pero diferente del referencial, pues se satisface el antecedente pero no el consecuente.

29. $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow \exists xQx)$. Es taut. Dice: si una clase está contenida en otra, entonces, si no es vacía, aquella otra tampoco puede serlo.

30. $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow \exists x(Px \rightarrow Qx)$. Taut. Sustituya $Px \rightarrow Qx$ por Rx y tendrá una tautología fundamental. Otra forma: el antecedente dice $P \subset Q$; el consecuente dice $c(P) \cup Q \neq \varnothing$; su

negación es $c(P) \cup Q = \varnothing$ lo que lleva a que tanto $c(P)$ como Q tienen que ser vacíos; esto lleva a su vez a que $Q = \varnothing$ y $P = U$, con lo que $P \subset Q$ tiene que ser falsa. Tenga en cuenta que la frase $\exists x(Px \rightarrow Qx)$, para $P = Q = \varnothing$, es verdadera, ya que en el interior del paréntesis se transforma en una tautología.

31. $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$. Falsa en general, como lo prueba el contraejemplo $P = Q = \varnothing$, que convierte en verdadero el antecedente y en falso el consecuente.

32. $(\exists xPx \wedge \forall xQx) \leftrightarrow \exists x\forall y(Px \wedge Qy)$. Taut. La forma clausulada del primer miembro es $Pa \wedge Qx$, y la del segundo es $Pa \wedge Qy$, o sea la misma, ya que la variable asociada a Q indica que puede tomar cualquier valor del dominio.

33. $\exists x\forall y(Px \wedge Qy) \leftrightarrow \forall y\exists x(Px \wedge Qy)$. Taut. Por tratarse de variables distintas, ambas tienen por forma clausulada $Pa \wedge Qy$. Otro sería el caso de $\exists x\forall y(Rxy) \leftrightarrow \forall y\exists x(Rxy)$, que no es cierta en general, ya que a la izquierda basta con una constante de Skolem y a la derecha se necesita una función de Skolem. Ambos miembros de la frase problema son equivalentes a $\exists xPx \wedge \forall yQy$.

34. $\forall x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\forall xPx \leftrightarrow \forall xQx)$. Taut. Dice que si dos clases son iguales, entonces, el hecho de que una cualquiera de las dos fuese igual al referencial, equivaldría a que la otra también sería igual al referencial. $P = Q$ es $\forall x(Px \leftrightarrow Qx)$, y $P \neq Q$ es $\exists x(Px \leftrightarrow \neg Qx)$.

35. $(\forall xPx \leftrightarrow \forall xQx) \rightarrow \forall x(Px \leftrightarrow Qx)$. Falsa en general. En forma conjuntista dice $(P = U \leftrightarrow Q = U) \rightarrow P = Q$. Basta elegir un P y un Q tales que sean distintos y que ninguno de los dos sea el referencial; así el antecedente es verdadero, por ser falso cada uno de sus dos miembros, pero el consecuente será falso.

36. $(((J \subset R) \rightarrow p) \wedge R \subset M \wedge M \subset J) \rightarrow p$. Es falsa en general. Para intentar falsarla elegimos siempre que sea posible consecuentes falsos y procuramos que los antecedentes sean verdaderos. Así p. ej . eligiendo: p, falsa, $J = U$, $M = \varnothing$, $R = \varnothing$, la proposición es falsada: efectivamente, todo el antecedente es verdadero, en particular $(J \subset R) \rightarrow p$, lo es porque su antecedente y su consecuente son falsos.

37. $\exists y(Py \rightarrow \forall xPx)$. Por raro que parezca, es una tautología (atención: no es $\exists xPx \rightarrow \forall xPx$, que obviamente, es falsa en general). La frase puede ser escrita como $\exists y(Py \rightarrow P = U)$, o como $\exists y(\neg Py \vee P = U)$, o como $\exists y\neg Py \vee P = U$; pero $\exists y\neg Py$ es $c(P) \neq \varnothing$, o sea $P \neq U$, luego la frase expresa la tautología $P \neq U \vee P = U$. Otra forma: introduciendo el cuantificador existencial correctamente la frase es $\forall yPy \rightarrow \forall xPx$.

38. $[\forall x(x=c \leftrightarrow \neg\exists y(Py \wedge Myx)) \wedge (\neg Gc \rightarrow \neg\forall y(Py \rightarrow \neg Myc))] \rightarrow Gc$. Taut. Llamemos Rx a $\exists y(Py \wedge Myx)$; entonces $\neg Rx$ tiene la expresión $\forall y(Py \rightarrow \neg Myx)$, así que la frase

problema queda bastante reducida: $[\forall x(x=c\leftrightarrow\neg Rx)\wedge(\neg Gc\rightarrow Rc)] \rightarrow Gc$; la equivalencia implica $\neg Rc$; la implicación interior del corchete, en forma contrarrecíproca, es $\neg Rc \rightarrow Gc$; y por modus ponens, se obtiene Gc, de ambas.

39. $\forall xPx \rightarrow Pa$. Es tautología (se trata del axioma de especificación).

40. $Pa \rightarrow \forall xPx$. Es falsa en general; basta con que, p. ej. P no sea vacío ni igual al referencial. El antecedente será verdadero y el consecuente falso. En forma conjuntista la frase es $P \neq \varnothing \rightarrow P = U$, falsa en general (recuerde que 'a' es una 'constante de Skolem', que no es una verdadera constante).

41. $\forall x(p \rightarrow Px) \rightarrow (p \rightarrow \forall xPx)$. Es taut. Se trata del axioma de introducción del cuantificador.

42. $(p \rightarrow \forall xPx) \rightarrow \forall x(p \rightarrow Px)$. Es taut. Si p es falsa, esto es evidente, ya que el antecedente de la implicación principal es verdadero al ser a su vez una condicional cuyo antecedente, p, es falso; y la expresión $\forall x(p \rightarrow Px)$ es igualmente verdadera pues $\neg p \vee Px$ es verdadera por serlo $\neg p$, y el cuantificador no afecta a nada. Y si p es verdadera, la verdad del antecedente es la verdad de $\forall xPx$; y la verdad de $p \rightarrow Px$ es la verdad de Px, luego la verdad de todo el consecuente es también la verdad de $\forall xPx$; dicho de otro modo, si p es verdadera, la frase problema se reduce a la tautología $\forall xPx \rightarrow \forall xPx$.

43. $[\exists xPx \rightarrow (\exists xGx \rightarrow \forall xHx)] \leftrightarrow \forall xyz((Px \wedge Gy) \rightarrow Hz)$. Es taut. Cambiando los nombres de las variables al primer miembro, éste queda en la forma $\exists xPx \rightarrow (\exists yGy \rightarrow \forall zHz)$; los dos miembros tienen la misma forma clausulada $\neg Px \vee \neg Gy \vee Hz$.

44. $\forall x(\exists yPxy \rightarrow Qx) \leftrightarrow \forall xy(Pxy \rightarrow Qx)$. Es taut. El segundo miembro puede escribirse como $\forall x(\forall y(Pxy \rightarrow Qx))$; ahora vemos que las expresiones $\exists yPxy \rightarrow Qx$ y $\forall y(Pxy \rightarrow Qx)$ son iguales (esto además es un teorema importante para sacar el cuantificador existencial o para introducir el universal). Efectivamente, la primera expresión es $\forall y\neg Pxy \vee Qx$, de forma clausulada $\neg Pxy \vee Qx$, que es la misma forma clausulada que tiene la segunda.

45. $\exists x(Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow (\forall xPx \rightarrow \exists xQx)$. Es tautología. Primero mostraremos la validez de la implicación hacia la derecha, que, en forma conjuntista, es: $c(P)\cup Q \neq \varnothing \rightarrow (P = U \rightarrow Q \neq \varnothing)$, que puede escribirse como $(c(P)\cup Q \neq \varnothing \wedge P = U) \rightarrow Q \neq \varnothing$. Pero $P = U$ es $c(P) = \varnothing$, así que la primera hipótesis dice que $Q \neq \varnothing$, coincidiendo con la conclusión. La implicación hacia la izquierda queda $(P = U \rightarrow Q \neq \varnothing) \rightarrow c(P)\cup Q \neq \varnothing$. Esto es lo mismo que $(P \neq U \vee Q \neq \varnothing) \rightarrow c(P)\cup Q \neq \varnothing$; si la escribimos en forma contrarrecíproca tenemos $c(P)\cup Q = \varnothing \rightarrow (P = U \wedge Q = \varnothing)$; de la hipótesis se infiere que tanto Q como c(P) han de ser vacíos, así que P debe ser U, y la tesis se satisface.

No existe simetría, con la frase anterior, de la expresión, $\forall x(Px \to Qx) \leftrightarrow (\exists xPx \to \forall xQx)$, frase que no es universalmente válida. Efectivamente, la implicación hacia la izquierda $(\exists xPx \to \forall xQx) \to \forall x(Px \to Qx)$, sí lo es, ya que queda $(P \neq \emptyset \to Q = U) \to P \subset Q$, es decir $(P = \emptyset \vee Q = U) \to P \subset Q$, lo que es evidente, ya que el vacío está contenido en cualquier conjunto y todo conjunto está contenido en su referencial. Pero la implicación hacia la derecha, $\forall x(Px \to Qx) \to (\exists xPx \to \forall xQx)$, no es universalmente válida: su forma conjuntista es $P \subset Q \to (P \neq \emptyset \to Q = U)$, es decir $(P \subset Q \wedge P \neq \emptyset) \to Q = U$, que se ve falsada para cualquier caso en que, p. ej. P no sea el vacío ni el referencial, y Q = P (el antecedente sería verdadero y el consecuente falso).

Capítulo IV.

IV-1. Solución:

Para que no haya confusión con la flecha de implicación, usaremos la letra D para indicar que de lo primero se deduce lo segundo en el sentido de Lewis, o que lo primero implica de manera lógica o estricta lo segundo. Así tenemos:

a) $D(\neg p, \blacklozenge\neg p)$, dice que la posibilidad de $\neg p$ es una consecuencia lógica de que p no sucede. Examinemos esta proposición. De acuerdo con el texto D(a, b) dice que $\neg\blacklozenge\neg(a \to b)$; así la frase pedida es $\neg\blacklozenge [\neg(\neg p \to \blacklozenge\neg p)]$. "Es imposible que $\neg p$ no implique materialmente la posibilidad de $\neg p$". Esta frase, debido a la cantidad de negaciones explícitas e implícitas que lleva es casi ininteligible; hagamos $q \equiv \neg p$; la frase queda ahora como $\neg\blacklozenge\neg(q \to \blacklozenge q)$, o sea $\neg\blacklozenge (q \wedge \neg\blacklozenge q)$, que parece más clara ya que dice: "Es imposible que se dé q y que q sea imposible". ¿Ahora mejor? ¿Es verdadera? Piense en una posible prueba.

b) "p es lógicamente válida", en el sentido de Lewis, es: "p es necesaria" (en el sentido de Lewis) , o bien "es imposible que $\neg p$".

La frase pedida es entonces

$$\neg\blacklozenge\neg [((\neg\blacklozenge\neg p) \vee (\neg\blacklozenge\neg q)) \to (\neg\blacklozenge\neg(p \vee q))];$$

también esta frase es casi ininteligible. Antes de comentarla simplifiquemos un poco. Operando se tiene:

$\neg\blacklozenge$ ([($\neg\blacklozenge\neg$p) $\vee$ ($\neg\blacklozenge\neg$q)] $\wedge$ $\blacklozenge\neg$(p $\vee$ q))

donde hemos introducido el segundo '$\neg$' en la implicación; aplicando De Morgan de nuevo,

$\neg\blacklozenge$ ($\neg$(($\blacklozenge\neg$p)$\wedge$($\blacklozenge\neg$q)) $\wedge$ $\blacklozenge\neg$(p$\vee$q))

hagamos r $\equiv$ $\neg$p y s $\equiv$ $\neg$q.

$\neg\blacklozenge$ ($\neg$($\blacklozenge$r $\wedge$ $\blacklozenge$s) $\wedge$ $\blacklozenge$ (r $\wedge$ s))

y sacando un $\neg$,

$\neg\blacklozenge\neg$ (($\blacklozenge$r $\wedge$ $\blacklozenge$s) $\vee$ $\neg\blacklozenge$ (r $\wedge$ s))

los tres primeros signos se leen 'no es posible que no', o bien 'es necesario que', o bien 'es lógicamente válido' (en el sentido de Lewis), y el interior del paréntesis principal es, por definición de '$\rightarrow$', la implicación material $\blacklozenge$ (r$\wedge$s) $\rightarrow$ ($\blacklozenge$r $\wedge$ $\blacklozenge$s); ahora está más claro lo que dice el teorema en otro formato: 'Es necesario que, si dos cosas son posibles, cada una de ellas ha de ser posible'. Pero, cuidado, esta 'perogrullada' debe ser admitida axiomáticamente, ya que el signo $\blacklozenge$ es un indefinible. Dicho de otro modo, no es demostrable.

Además, en un procedimiento deductivo convencional se admite que si se deduce p o si se deduce q entonces se deduce p$\vee$q; la recíproca no es válida en general. Esto es satisfecho también por la lógica de Lewis. Pero en un procedimiento deductivo convencional se admite que si se deduce p$\wedge$q entonces se deduce p y se deduce q; y la recíproca también es válida. Como hemos visto, en lógica de Lewis, puede aceptarse axiomáticamente la necesidad de que 'si es posible que se den dos cosas entonces es posible que se dé cada una de ellas'; pero a diferencia de los procesos deductivos convencionales, la recíproca no tiene por qué ser aceptada como algo natural ni necesario, ya que puede ocurrir que una cosa sea posible y otra también, pero no serlo ambas simultáneamente: la posibilidad da un cierto carácter temporal a las funciones lógicas. No obstante lo cual, estos problemas pueden resolverse fácilmente con el empleo de los cuantificadores de la lógica de primer orden.

IV-2. Solución:

El verbo 'ser' tiene varias acepciones:

1) (‘pertenece a’ o ‘es elemento de’). Ej. b) y c).

2) ‘Está contenido en’, o ‘está incluido en’, o ‘es una parte de’, o ‘es un subconjunto de’. Se representa por $\subset$ y se define así: $A\subset B\leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\leftrightarrow\forall x(Ax\rightarrow Bx)$, donde hemos cometido, en la segunda doble implicación, el abuso de lenguaje que consiste en llamar al predicado y a su clase asociada con la misma letra. Un ej. d) $\forall$x(x es español $\rightarrow$ x es europeo).

3) En la sentencia a), el verbo ‘ser’ adquiere el sentido de igualdad en uno de sus significados que es el de identidad. Decir ‘‘España es el más meridional de los países europeos” quiere decir, desde el punto de vista lógico, que España es (existe) el ‘y’ tal que ‘y’ es (igual a) el más meridional de los países europeos, lo que traducido es: Existe un país que es el más meridional de los países europeos (llamado España), y además, si un país es el más meridional de los países europeos , ese país es España.

IV-3. Solución:

Se está aplicando la descripción con identidad (uno de los significados del verbo ‘ser’), así como la propiedad transitiva de la igualdad. Podría parecer que es suficiente, para que el razonamiento sea correcto, que si P1: ‘Dante = iy(y es el mejor poeta italiano)’ y P2: ‘iy(y es el mejor poeta italiano) = iz(z es el autor de La Divina Comedia)’, entonces C: ‘Dante = it(t es el autor de La Divina Comedia)’, como si fuera P1: ‘x = y’, P2: ‘y = z’, C: ‘x = z’; sin embargo no es así: se necesitaría la premisa adicional (o su prueba) de que existe un único x que es el mejor poeta italiano, así como la existencia y unicidad del autor de La Divina Comedia. Esto, que parece un mero juego intrascendente de palabras, deja de parecerlo cuando nos planteamos la posible existencia y unicidad de soluciones en ciertas ecuaciones o cuando se van a examinar las posibles consecuencias de admitir en algunos lenguajes de programación ciertos signos, p. ej. el de infinito, para designar o “describir” la inexistente “fracción” 1/0.

IV-4. Solución:

Los axiomas son:

1) $(p\vee p)\rightarrow p$;

2) $q\rightarrow(p\vee q)$;

3) $(p\vee q)\rightarrow(q\vee p)$;

4) $(p \to q) \to ((r \vee p) \to (r \vee q))$.

Podemos establecer sólo un "ligero" parecido con la lógica de clases haciendo:

1) $(A \cup A) = A$;

2) $A \subset (A \cup B)$;

3) $(A \cup B) \subset (B \cup A)$;

4) $(A \subset B) \to ((C \cup A) \subset (C \cup B))$.

Efectivamente, el parecido es únicamente ligero, ya que la lógica de proposiciones es una lógica de orden cero (sin cuantificación), y la lógica de clases es una lógica de segundo orden en cuanto cuantifiquemos las clases. Para ver esa ligereza examinemos la situación. Aunque las cuatro últimas frases son teoremas de la lógica de clases, no se puede sustituir '$\to$' por '$\subset$' cuando se quiera; a veces incluso, si así se hiciera, perdería sentido la frase (como por ejemplo para la flecha que conservamos en la última). Empezamos a sospechar que el parecido es sólo aparente cuando vemos que la frase de lógica de proposiciones $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$ es una tautología, en tanto que $(A \subset (B \cup C)) \to ((A \subset B) \vee (A \subset C))$, es falsa en general.

Otro caso notable : $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$, es una tautología, pero $A = c(B) \leftrightarrow \neg(A = B)$ es falsa en general (sólo válida hacia la derecha, pero no hacia la izquierda). Aún otra diferencia importante: $(p \leftrightarrow F) \vee (p \leftrightarrow V)$ es tautología en lógica de proposiciones, en tanto que $P = \varnothing \vee P = U$ no lo es, aunque sí lo son tanto $P = \varnothing \vee P \neq \varnothing$, como $P = U \vee P \neq U$. Esto resulta claro si se tiene en cuenta que $A \subset B \leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$ (o $\forall x(Ax \to Bx)$ o $\forall x(\neg Ax \vee Bx)$ o, en forma conjuntista, $c(A) \cup B = U$). Para un universo del discurso finito con sólo dos elementos se observa que la frase $A \subset B$ es 'más grande': entonces la frase $A \subset B$ dice que $(Aa \to Ba) \wedge (Ab \to Bb)$, o sea $(\neg Aa \vee Ba) \wedge (\neg Ab \vee Bb)$. Como Aa, Ba, Ab, Bb son proposiciones (llamémoslas respectivamente p, q, r, s), la expresión $A \subset B$ resulta tener 'más de dos letras' al retraducirse a lógica de proposiciones, quedando $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$. La complicación se aprecia mejor cuando se ve que no es cierta en general la frase de lógica de clases $\forall x(Ax \vee Bx) \to ((\forall x\ Ax) \vee (\forall x\ Bx))$ (cuyo formato conjuntista sería $(A \cup B = U) \to ((A = U) \vee (B = U))$, pues la frase diría, $((Aa \vee Ba) \wedge (Ab \vee Bb)) \to ((Aa \wedge Ab) \vee (Ba \wedge Bb))$, (falsa en general, por ejemplo, cuando A tiene sólo el elemento 'a' y B tiene sólo el elemento 'b') que, al sustituir las proposiciones por los nombres que les dimos antes, adquiere la forma proposicional $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \to ((p \wedge r) \vee (q \wedge s))$, falsa en general en lógica de proposiciones (es indeterminada y, por ello, no tautológica). La diferencia fundamental está en que en lógica de clases hay operadores '$\wedge$' camuflados en '$\forall$' ($\forall x(Ax \to Bx)$), y suprimidos por convenio notacional en la formulación $A \subset B$.

IV-5. Solución:

Son: 1) $A \cup U = U$; 2) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 3) $A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$.

1) Aplicando sucesivamente la propiedad de c(A), $U = A \cup c(A)$, la propiedad asociativa, la idempotente y, de nuevo, la definición de U, se tiene: $A \cup U = A \cup (A \cup c(A)) = (A \cup A) \cup (c(A)) = A \cup c(A) = U$.

2) Aplicando sucesivamente la propiedad de c(A), $\varnothing = A \cap c(A)$, la propiedad asociativa, la idempotente y, de nuevo, la definición de $\varnothing$, se tiene: $A \cap \varnothing = A \cap (A \cap c(A)) = (A \cap A) \cap (c(A)) = A \cap c(A) = \varnothing$.

3) Aplicando sucesivamente la propiedad distributiva y la idempotente, se tiene: $A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B)$, lo cual indica que basta con demostrar una de las dos igualdades. Elegimos la ecuación $A \cup (A \cap B) = A$. Aplicando sucesivamente el axioma de existencia de neutro, la propiedad distributiva, haciendo uso de la propiedad 1) y aplicando de nuevo el axioma de existencia de neutro, se tiene la sucesión de igualdades: $A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cap (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$.

IV-6. Solución:

El diagrama de Venn-Euler 'muestra' (ayuda), pero no demuestra. Es decir, con él, se tiene una impresión sensorial que facilita casi siempre la comprensión, pero no se tiene un proceso deductivo válido. Para mostrar la falsedad del razonamiento basta, sobre un cuadro que represente el universo de los 'atractivos', trazar dos redondeles o curvas cerradas, que, en general, están intersectadas. Una simbolizará la clase de los estudiantes y otra la de las chicas. Una simple inspección muestra que no todos los estudiantes tienen que ser chicas. Por supuesto que esto no probaría ni demostraría nada. Empecemos por formular el razonamiento. Sea E, 'es estudiante', A, 'es atractivo', C, 'es chica'. Entonces las premisas son P1: $\forall x(Ex \rightarrow Ax)$ y P2: $\forall x(Cx \rightarrow Ax)$; la conclusión tiene la forma $\forall x(Ex \rightarrow Cx)$; niegue la conclusión, escríbala junto con las premisas y escriba todo en forma clausulada. Comprobará que no puede llegar a la cláusula vacía. Además, escrito el "razonamiento" en forma conjuntista queda P1: $E \subset A$, P2: $C \subset A$, y conclusión $E \subset C$; un contraejemplo sencillo para probar su falsedad es el caso particular en que C sea vacío y ni A ni E lo sean y ambos sean iguales: entonces las premisas son verdaderas, en tanto que la conclusión es falsa.

IV-7. Solución:

a) $(R\cup S)'xy \leftrightarrow (R\cup S)yx \leftrightarrow (Ryx \vee Syx) \leftrightarrow (R'xy \vee S'xy) \leftrightarrow (R'\cup S')xy$.

b) $(RoS)'xy \leftrightarrow (RoS)yx \leftrightarrow \exists z(Ryz \wedge Szx) \leftrightarrow \exists z(R'zy \wedge S'xz) \leftrightarrow \exists z(S'xz \wedge R'zy) \leftrightarrow (S'oR')xy$.

c) $((RoQ)oA)xy \leftrightarrow \exists z((RoQ)xz \wedge Azy) \leftrightarrow \exists tz(Rxt \wedge Qtz \wedge Azy) \leftrightarrow \exists t(Rxt \wedge \exists z(Qtz \wedge Azy)) \leftrightarrow \exists t(Rxt \wedge (QoA)ty) \leftrightarrow (Ro(QoA))xy$.

Los cuantificadores existenciales pueden entrar y salir sin problemas a pesar de que en el interior de los paréntesis hay '$\wedge$', ya que todas las variables han sido nombradas con diferente letra.

IV.8. Solución:

Como las tablas de verdad son interpretaciones, pueden aplicarse a la prueba de ambas. Efectivamente, en bivalente son tautologías.

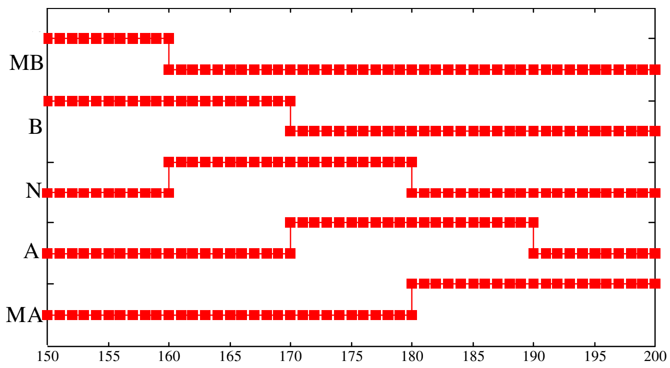
En lógica trivalente $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$ (una forma de modus ponens) es mín(1, 1 - $(p\wedge(p\rightarrow q))$ + q) = mín(1, 1 - mín(p, mín(1, 1-p+q)) + q), que p.ej. para p=1/2 y q=0, da 1/2 (y no 1), luego no es tautología. En lógica trivalente $(\neg q\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow\neg p$ (id. de modus tollens) es mín(1, 1-$(\neg q\wedge(p\rightarrow q))$+(1-p)) = mín(1, 2-p-mín(1-q, mín(1, 1-p+q))), que p. ej. para p =1 y q=1/2, da 1/2 (y no 1), luego no es tautología.

<u>Capítulo V.</u>

V-1. Solución:

Este ejercicio está resuelto como si la variable "altura" fuese discreta (de 2 en 2 centímetros); si se supone que es una variable continua, la resolución es análoga a la del ejercicio 1 y los tramos de aproximación estarían inclinados.

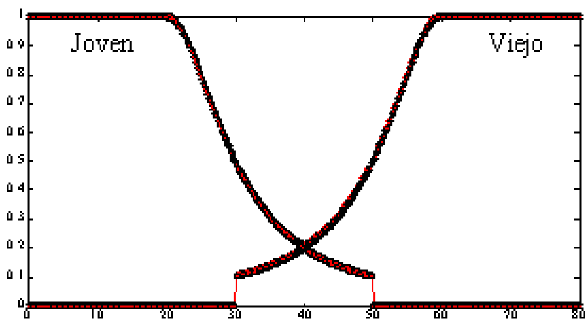
a) Para no superponer las gráficas, las separamos:

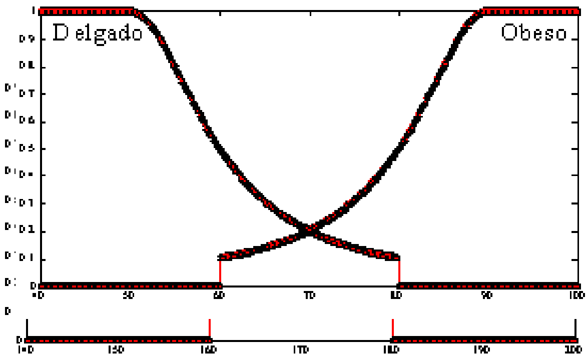


b) N queda definido como el conjunto de las estaturas mayores o iguales que 160, pero menores o iguales que 180, o sea 160, 162, 164, … , 178, 180. El conjunto A está definido como el conjunto de las estaturas mayores o iguales que 170, pero menores o iguales que 190, o sea 170, 172, …, 188, 190. Dado que la intersección borrosa tiene por función de pertenencia el mínimo de ambas, el conjunto 'borroso' N∩A está definido como el conjunto de las estaturas mayores o iguales que 170, pero menores o iguales que 180, o sea 170, 172,…, 178, 180.

V-2. Solución:

a) Veamos las gráficas.





b) Como joven está en contradicción con viejo, y a pesar de ser un $\wedge$, se usa el máximo: $\mu(\text{joven} \cap \text{viejo}) = \text{máx}(\mu(\text{joven}), \mu(\text{viejo}))$, y no el mínimo. Considerando la superposición de las dos gráficas, es fácil el cálculo de la función máximo; el punto de corte de ambas gráficas viene dado por

$$1 / (1+0.01((a-20)^2)) = 1 / (1 + 0.01((a-60)^2)),$$

donde el acento circunflejo denota 'elevado a'. Esta ecuación origina tanto $a-20 = +(a-60)$, que no da solución significativa en este caso, como $a-20 = -(a-60)$, cuya solución es $a = 40$. La función de pertenencia viene dada entonces por:

$\mu = 1,$ si $a \leq 20$.

$\mu = 1/(1 + 0.001((a-20)^2)),$ si $20 \leq a \leq 40$.

$\mu = 1/(1 + 0.001((a-60)^2)),$ si $40 \leq a \leq 60$.

$\mu = 1,$ si $a \geq 60$.

c) Calculemos hasta 80 los valores del conjunto borroso A, cuya función de pertenencia es μ(joven) y calculemos desde 20 hasta 100 los valores del conjunto borroso B, cuya función de pertenencia es μ(delgado).

A = [0/1, 20/1, 40/0.2, 60/0, 80/0] , y

B = [20/1, 40/1, 60/0.5, 80/0, 100/0],

lo que, por la regla del mínimo, da la matriz μ(i, j) = mín(μA(i), μB(j)), que representada por sus diferentes filas es [1, 1, 0.5, 0, 0; 1, 1, 0.5, 0, 0; 0.2, 0.2, 0.2, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0].

V-3. Solución:

Elijamos p. ej. que P tiene 50 años, pesa 60 kg. y mide 180 cm. Obtenemos de las funciones los siguientes valores: μP(joven) = 0; μP(viejo) = 0.5; μP(alto) = 0.5; μP(bajo) = 0; μP(delgado) = 0.5; μP(obeso) = 0. Entonces:

a) μP(viejo) = 0.5, ya visto.

b) μP(delgado $\vee$ obeso) = máx(μP(delgado), μP(obeso)) = 0.5.

c) μP(joven$\wedge$alto$\wedge$delgado) = mín(μP(joven), μP(alto), μP(delgado)) = mín(0, 0.5, 0.5) = 0. Es un mínimo por ser independientes los predicados, ya que con 50 años se es adulto. Si se hubiera elegido, p. ej. la edad de 5 años, la juventud estaría ligada a la estatura y al peso y se habría utilizado un máximo.

d) μP(bajo $\rightarrow$ obeso) = mín(μP(bajo), μP(obeso)) = mín(0, 0) = 0.

e) μP(joven $\rightarrow$ alto; si no, bajo). Es un condicional ampliado:

máx(mín(μP(joven), μP(alto)), mín(1-μP(joven), μP(bajo))) =

máx(mín(0, 0.5), mín(1, 0)) = 0.

f) También es un condicional ampliado.

máx(mín(μP(obeso), μP(viejo)), mín(1-μP(obeso), μP(joven))) =

máx(mín(0, 0.5), mín(1, 0)) = 0.

g) μP(muy delgado) = (μP(delgado))^2, donde el circunflejo es 'elevado a'; así se tiene (0.5)^2 = 0.25. Para calcular μP(casi obeso), usamos el criterio de la raíz, que es el más fácil para obtener la dilatación, por lo que dilat. = (μP(obeso))^(1/2) = 0; 'casi' se obtiene aplicando dilat(dilat) = 0; observe que dilat(dilat) viene dada por una raíz cuarta cuando se utiliza este criterio. Por último, el ejercicio nos propone el cálculo de un '$\vee$', por lo que se trata de un máximo: 0.25.

h) μP(bastante joven) = int(con(μP(joven))) = int(con(0)) = int(0^2) = int(0) = 2(0^2) = 0. Se ha elegido int(μ) = 2(μ^2), por ser $\mu = 0 \leq 0.5$.

μP(algo alto) = (μP(alto))^(1/2) =(0.5)^(1/2); μP(muy delgado) ya se ha calculado antes y vale 0.25. Como las tres están unidas por un '$\wedge$', se trata de un mínimo (con la salvedad hecha en el apartado anterior), luego el resultado es 0.

V-4. Solución:

Recordemos que las definiciones son: muy baja ≡ muy B ≡ estaturas por debajo de 160 cm.; baja ≡ B ≡ estaturas próximas a 160 cm. comprendidas entre 150 y 170 cm.; normal ≡ N ≡ estaturas próximas a 170 cm. comprendidas entre 160 y 180 cm.; alta ≡ A ≡ estaturas próximas a 180 cm. comprendidas entre 170 y 190 cm.; muy alta ≡ muy A ≡ estaturas por encima de 180. Entonces:

a) Es falsa.

b) Es verdadera.

c) Es verdadera.

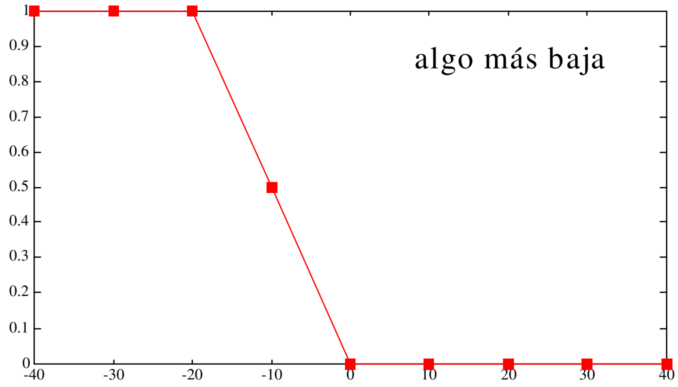
d) Es verdadera.

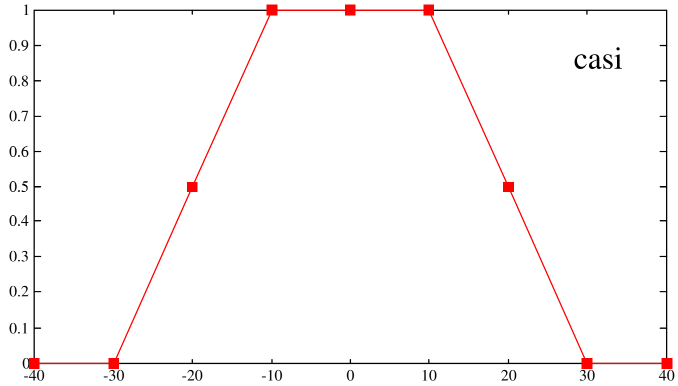
e) Aquí no hay predicados diversos, como en la anterior, sino sujetos diversos. La frase equivale a 'Luis es de estatura normal y ($\wedge$) Antonio es de estatura normal', donde '$\wedge$' es el operador de lógica bivalente de proposiciones (no hay problema de borrosidad). Entonces, y como ambas son verdaderas por cumplir las especificaciones de los conjuntos dados, su conjunción también lo es.

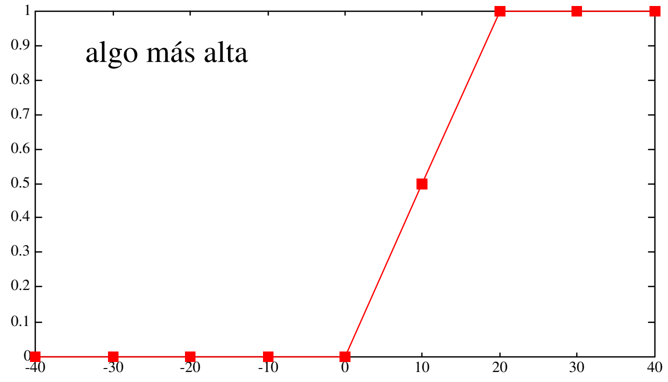
f) Igual, se trata de una implicación material, $\rightarrow$, no borrosa, entre las dos, que es verdadera por serlo su antecedente y su consecuente (o si se prefiere aquí la interpretación borrosa, el mínimo de los dos valores de verdad, 1 o V para ambos, sigue siendo 1).

V-5. Solución:

a) Representación de los conceptos 'algo más baja', 'casi iguales', y 'algo más alta'.







b) Sean L, E, O, las respectivas estaturas

L-E = 120-130 = -10; E-O = 130-145 = -15; L-O = 120-145 = -25.

Numeramos las sentencias con romanos, i) a v). Así:

i) 0.5. Con la tabla es fácil.

ii) -15 no tiene representación; procedemos a calcularla por interpolación lineal entre los puntos de la segunda gráfica. Buscamos el punto (-15, μ) entre los puntos (x1, μ1) = (-20, 0.5) y (x2, μ2) = (-10, 1). La recta que pasa por dos puntos es (x-x1)/(x2-x1) = (μ-μ1)/(μ2-μ1), donde los subíndices hacen referencia a los puntos y x = -15. Sustituyendo y resolviendo la ecuación se tiene μ(-15) = 0.75.

iii)O-E = 145-130 = 15. Lo mismo que en el caso anterior, pero usando la tercera gráfica, interpolamos el punto (15, μ) entre (10, 0.5) y (20,1), de lo que resulta también μ(15) = 0.75.

iv) Simbolizaremos el 'casi' por '~'. La pregunta es, en realidad, cuádruple. Hay que calcular los tres 'casi' y luego, por ser independientes las tres expresiones, se elige el valor mínimo de los valores asociados a ellas (son independientes, p.ej. el acontecimiento L ~ O, no tiene nada que ver con el acontecimiento E ~ L). Se usa naturalmente la segunda gráfica.

μ(L ~ O) = μ(120-145) = μ(-25), que tenemos que interpolar entre los puntos (-20, 0.5) y (-30, 0), lo que da μ(-25) = 0.25.

μ(L ~ E) = μ(120-130) = μ(-10) = 1.

μ(E ~ O) = μ(130-145) = μ(-15) = 0.75 (ya calculada antes).

El mínimo de las tres es 0.25.

v) Como μ(L ~ E) = 1 y μ(E ~ O) = 0.75, el mínimo pedido es 0.75.

V-6.Solución:

El consecuente es un '∨' borroso que se obtiene con los valores de la primera y tercera gráfica, esto es, calculando su máximo uno a uno; la implicación borrosa viene dada por el mínimo entre el antecedente (que está dado por la segunda gráfica) y el consecuente obtenido antes. Compruebe que el resultado es: μ = 0, para los valores -40, -30, 0, 30 y 40; y μ = 0.5, para los valores -20, -10, 10 y 20.

V-7. Solución:

Sea C, 'estación no muy fría'. Entonces parece que debemos escribir: $\mu(C) = 1\text{-}(\mu(A)\text{^}2)$ (donde el circunflejo se lee 'elevado a'), puesto que A es 'estación fría', el cuadrado de su función de pertenencia nos da la función de pertenencia asociada al modificador 'muy' (concentración) y el negador está representado por la unidad menos la nueva función de pertenencia. Así las cosas, escribimos para C:

[p/(1 - ((0.3)^2)), v/(1 - ((0.1)^2)), o/(1 - ((0.4)^2)), i/(1 - ((0.9)^2))]

o sea [p/0.91, v/0.99, o/0.84, i/0.19].

Las dos premisas del razonamiento vienen definidas por C y por el condicional ampliado $(A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)$. Esta segunda premisa lleva asociada una matriz porque el dominio de A es diferente del de B.

Primero, para $A \to B$, por el criterio del mínimo para la implicación, se tiene la matriz (en notación de filas sucesivas):

[0.3, 0.2; 0.1, 0.1; 0.4, 0.2; 0.8, 02] (1)

donde cada elemento (i,j) se obtiene de mín($\mu A(i)$, $\mu B(j)$).

Segundo, para $\neg A \to \neg B$ obtenemos el conjunto borroso $\neg A$, que es:

[p/0.7, v/0.9, o/0.6, I/0.1] , y el $\neg B$ que es [T1/0.2, T2/0.8].

La matriz asociada a $\neg A \to \neg B$, es:

[0.2, 0.7; 0.2, 08; 0.2, 0.6; 0.1, 0.1] (2)

con lo que aplicando el máximo, elemento a elemento, a (1) y (2), la matriz de la condicional ampliada es:

[0.3, 0.7; 0.2, 0.8; 0.4, 0.6; 0.8, 0.2].

Operando la lista de la función de pertenencia de C, dada por

[0.91, 0.99, 0.84, 0.19]

con la matriz anterior por el criterio maximin, (es decir máximo de los mínimos de cada fila de la primera matriz con cada columna de la segunda, elemento a elemento), se obtiene la matriz

[0.4, 0.8]

que origina el conjunto borroso para la sensación térmica,

[T1/0.4, T2/0.8]

A T1 de temperatura, que es baja, la "sensación de no mucho frío" tiene una función de pertenencia pequeña, y a T2, que es una temperatura más alta, le corresponde una "sensación de no mucho frío" mayor.

Suponga ahora que en vez de estimar "estación no muy fría" como 'no(muy(estación fría))', como lo hemos hecho, lo hubiésemos estimado como 'muy(no(estación fría))' (o sea 'muy (estación no fría)'). Resuelva el problema con esta interpretación.