Lineare Ungleichungen mit Bruchtermen

Beim Lösen von Bruchungleichungen spielen die Nennerterme eine besondere Rolle. Da der Nenner nicht gleich Null sein darf, muß zunächst die Definitionsmenge D bestimmt werden. Anhand eines Beispiels wollen wir ein Rechenverfahren für das Lösen von Ungleichungen mit Bruchtermen entwickeln.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L der Ungleichung $\frac{2x-3}{x+1} > 1$ auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

Lösung:

$\boxed{1.}$ *Bestimmen der Definitionsmenge D:*

Da der Nenner nicht gleich Null sein darf, muß das Element -1 aus der Definitionsmenge ausgeschlossen sein.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$\boxed{2.}$ *Ungleichung in die Form $T > 0$ überführen:*

Die Äquivalenzumformung auf die Form $T > 0$ erfolgt mit Hilfe der Sätze $\boxed{S_n}$, $\boxed{M+}$, $\boxed{M\cdot}$.

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1$$
$$\frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0$$
$$\frac{2x-3}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} > 0$$
$$\frac{x-4}{x+1} > 0$$

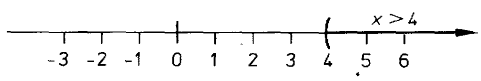
$\boxed{3.}$ *Fallunterscheidung:*

$\boxed{\text{1. Fall}}$ Aus $\frac{T_1}{T_2} > 0$ folgt, daß Zähler und Nenner größer als Null sind.

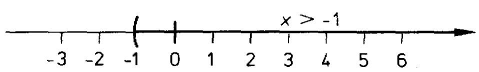
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{x-4}{x+1} > 0$$
$$\Rightarrow \quad T_1 > 0 \wedge T_2 > 0$$
$$T_1 : x - 4 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 4}$$
$$T_2 : x + 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > -1}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{x > 4 \wedge x > -1}$$

Es gilt: $L_1(x > 4 \wedge x > -1) = L_{T_1}(x > 4) \cap L_{T_2}(x > -1)$

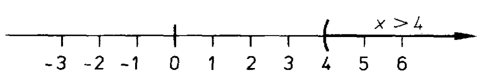
$L_{T_1} = \{x \in D \mid x > 4\}$



$L_{T_2} = \{x \in D \mid x > -1\}$



$L_1 = L_{T_1} \cap L_{T_2} = \{x \in D \mid x > 4\}$



2. Fall Aus $\frac{T_1}{T_2} > 0$ folgt, daß Zähler und Nenner kleiner als Null sind.

$$\frac{T_1}{T_2} < 0$$

$$\Rightarrow \quad T_1 < 0 \wedge T_2 < 0$$

$$T_1: \quad x - 4 < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 4}$$

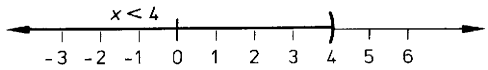
$$T_2: \quad x + 1 < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < -1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x < 4 \wedge x < -1}$$

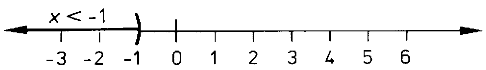
Es gilt:

$$L_2(x<4 \wedge x<-1) = L_{T_1}(x<4) \cap L_{T_2}(x<-1)$$

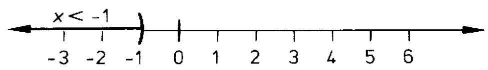
$$L_{T_1} = \{x \in D \mid x < 4\}$$



$$L_{T_2} = \{x \in D \mid x < -1\}$$



$$L_2 = L_{T_1} \cap L_{T_2} = \{x \in D \mid x < -1\}$$

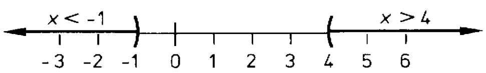


4. *Bestimmen der Lösungsmenge L:*

Beide Fälle führen zu einer Menge von Zahlen (L_1 oder L_2), die die Ungleichung erfüllen. Die gesamte Lösungsmenge erhalten wir aus der *Vereinigung* dieser beiden Mengen.

$$L_1 = \{x \in D \mid x > 4\}$$
$$L_2 = \{x \in D \mid x < -1\}$$
$$L = L_1 \cup L_2$$
$$L = \{x \in D \mid x > 4 \vee x < -1\}$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung kann auch mit Hilfe der Intervallschreibweise angegeben werden.



$$\underline{\underline{L = \mathbb{R} \setminus [-1, 4]}}$$

Beispiel:

Bestimmen Sie $L = \left\{ x \in D \;\middle|\; \frac{9}{x+6} > \frac{4}{x+1} \right\}$.

Lösung:

1. $L = \left\{ x \in D \;\middle|\; \frac{9}{x+6} > \frac{4}{x+1} \right\}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, -1\}$

2. $T > 0$

$$\frac{9}{x+6} - \frac{4}{x+1} > 0$$

$$\frac{5x - 15}{(x+6)(x+1)} > 0$$

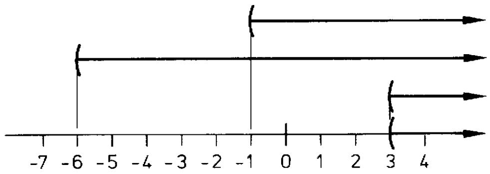
3. $\dfrac{T_1}{T_2} > 0$

$\Rightarrow T_1 > 0 \wedge T_2 > 0$

$\Rightarrow 5x - 15 > 0 \wedge (x+6)(x+1) > 0$

$\Rightarrow$ **a** $x > 3 \wedge x > -6 \wedge x > -1$

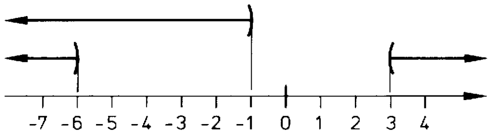
Beide Faktoren von $T_2 > 0$



$L_1 = \{x \in D \,|\, x > 3\}$

$\Rightarrow$ **b** $x > 3 \wedge x < -6 \wedge x < -1$

Beide Faktoren von $T_2 < 0$



$L_2 = \emptyset$

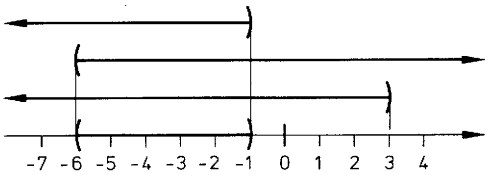
$\dfrac{T_1}{T_2} > 0$

$\Rightarrow T_1 < 0 \wedge T_2 < 0$

$\Rightarrow 5x - 15 < 0 \wedge (x+6)(x+1) < 0$

$\Rightarrow$ **a** $x < 3 \wedge x > -6 \wedge x < -1$

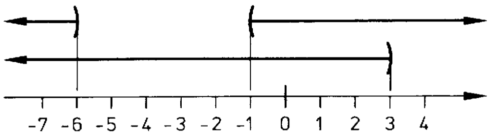
1. Faktor von $T_2 > 0$,
2. Faktor von $T_2 < 0$.



$L_3 = \{x \in D \,|\, -6 < x < -1\}$

b $x < 3 \wedge x < -6 \wedge x > -1$

1. Faktor von $T_2 < 0$,
2. Faktor von $T_2 > 0$

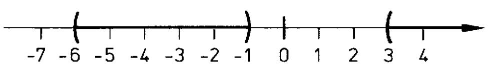


$L_4 = \emptyset$

4. $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

$L = L_1 \cup \emptyset \cup L_3 \cup \emptyset = L_1 \cup L_3$

$\underline{\underline{L = \{x \in D \,|\, x > 3 \vee -6 < x < -1\}}}$



2. Bestimmen Sie Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Bruchungleichungen. Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden. Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

a) $\frac{1}{x} > 3$ c) $\frac{10}{x+2} < 4$ e) $\frac{x}{x^2} > 10$

b) $\frac{2}{x} > -4$ d) $\frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$ f) $\frac{x+1}{x^2-1} < 2$

Bestimmen Sie die Lösungsmengen mit Hilfe der Zahlengeraden! Machen Sie einige Stichproben!

▸ **27.** a) $\frac{x}{x+3} > \frac{2}{x+3}$ b) $\frac{x}{x-2} < \frac{5}{x-2}$ c) $\frac{4}{x-5} \geqq \frac{x}{x-5}$

▸ **28.** a) $\frac{x+1}{x-4} > 0$ b) $\frac{x-2}{x-3} \leqq 0$ c) $\frac{x+5}{x+1} > 0$

▸ **29.** a) $\frac{3}{x+1} \geqq 1$ b) $\frac{6}{x-1} < 3$ c) $\frac{8}{x+4} > 2$

▸ **30.** a) $\frac{x-1}{x+3} > 2$ b) $\frac{x-3}{x-5} < 2$ c) $\frac{3x-4}{x-2} \geqq 4$

▸ **31.** a) $\frac{x-3}{3x-2} > \frac{1}{2}$ b) $\frac{x+2}{2x+3} \leqq \frac{1}{3}$ c) $\frac{2x-4}{4x-3} > \frac{2}{3}$

2. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Bruchungleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$:

a) $\frac{4}{x-1} > 1$ **b)** $\frac{20}{z-2} < 10$ **c)** $\frac{x+1}{x-1} \leq 2$

d) $\frac{x+2}{x} > \frac{x}{x-2}$ **e)** $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{0{,}5x-1}$ **f)** $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} < 0$

g) $\frac{x+2}{x-4} < \frac{2x+4}{x+4}$