Lineare Algebra 1

Prof. Dr. Peter Schneider *

WS 2008 – 2009

*geTEXt von Julia Wolters

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitende Diskussion Linearer Gleichungssysteme 4

2 Grundstrukturen 15
2.1 Gruppen 15
2.2 Körper 16
2.3 Vektorräume 17

3 Die Strukturtheorie der Vektorräume 21

4 Lineare Abbildungen 33

5 Lineare Gleichungssysteme 53

6 Basis Wechsel 57

7 Faktorräume 67

8 Determinanten 71

Erkläuterungen der Verschiedenen Satzarten

- Definition
- Behauptung
  - Lemma = Hilfssatz
  - Satz, Proposition, Theorem = Hauptaussage
  - Corollar = Folgerung

Impressum

Erstellt von Prof. Dr. Peter Schneider pschnei@math.uni-muenster.de

Verfasst in MikTeX 2.7 for Windows von Julia Wolters

Korrigierte Fassung bis Kapitel 7, Stand: 28. Januar 2009

Korrekturen bitte per mail an julia.wolters@uni-muenster.de

1 Vorbereitende Diskussion Linearer Gleichungssysteme

Beispiel 1:

$$\begin{array}{r|rrrcl|} \text{I} & 2\text{x} & -\text{y} & +3\text{z} & = & \text{a} \\ \text{II} & 5\text{x} & & -4\text{z} & = & \text{b} \\ \text{III} & -6\text{x} & +8\text{y} & +7\text{z} & = & \text{c} \end{array}$$

1. Schritt: $I \cdot 3$, $III + I$

$$\begin{array}{r|rrrcl|} \text{I} & 6\text{x} & -3\text{y} & +9\text{z} & = & 3\text{a} \\ \text{III} & & +5\text{y} & +16\text{z} & = & 3\text{a} + \text{c} \end{array}$$

2. Schritt: $I \cdot \frac{5}{2}$, $I - II$

$$\begin{array}{r|lcl|} \text{I} & 5\text{x} - \frac{5}{2}y + \frac{15}{2}z & = & \frac{5}{2}a \\ \text{II} & -\frac{5}{2}y + \frac{23}{2}z & = & \frac{5}{2}a - b \end{array}$$

3. Schritt: $II \cdot 2$,

$$\begin{array}{r|rrcl|} \text{II} & -5\text{y} & +23\text{z} & = & 5\text{a} - 2\text{b} \\ \text{III} & 5\text{y} & +26\text{z} & = & 3\text{a} + \text{c} \end{array}$$

4. Schritt: $III + II$

$$\begin{aligned} 39z &= 8a - 2b + c \\ z &= \frac{8a - 2b + c}{39} \end{aligned}$$

5. Schritt: z in III aus dem 2. Schritt einsetzten:

$$\begin{aligned} 5y + 16 \cdot \left(\frac{8a - 2b + c}{39} \right) &= 3a + c \\ y &= \frac{-11a + 32b + 23c}{195} \end{aligned}$$

6. Schritt: z und y in I einsetzten:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{-11a + 32b + 23c}{195} + 3 \cdot \left(\frac{8a - 2b + c}{39} \right) &= a \\ x &= \frac{-65a + 31b + 4c}{195} \end{aligned}$$

Ergebnis: Für jedes vorgegebene a, b, c besitzt dar Gleichungssysteme genau eine Lösung x, y, z.

Beispiel 2:

$$\begin{array}{r|llll|l} \text{I} & 2\text{x} & +\,3\text{y} & +\,4\text{z} & = & \text{a} \\ \text{II} & 4\text{x} & +\,3\text{y} & +\,4\text{z} & = & \text{b} \\ \text{III} & \text{x} & & & = & \text{c} \end{array}$$

1. Schritt: Aus III folgt x = c:

$$\begin{array}{r|llll|l} \text{I} & 3\text{y} & +\,4\text{z} & = & \text{a - 2c} & \\ \text{II} & 3\text{y} & +\,4\text{z} & = & \text{b - 4c} & \end{array}$$

beachte: $a - 2c = b - 4c$ ist genau dann der Fall, wenn $a = b - 2c$ ist.

1. Fall $a \neq b - 2c$, dann besitzt das Gleichungssystem keine Lösung x, y, z!
2. Fall $a = b - 2c$, dann $y = \frac{a-2c}{3} - \frac{4}{3}z$, also $c, \frac{2c}{3} - \frac{4}{3}z, z$ ist für jedes z eine Lösung, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen.

Beispiel 3:

$$\begin{array}{r|llll|l} \text{I} & \text{x} & +\,3\text{y} & +\,2\text{z} & = & \text{a} \\ \text{II} & 2\text{x} & +\,6\text{y} & +\,4\text{z} & = & \text{b} \\ \text{III} & 4\text{x} & +\,9\text{y} & +\,6\text{z} & = & \text{c} \end{array}$$

1. Fall: $b \neq 2a$ oder $c \neq 3a$, dann gibt es keine Lösung.
2. Fall: $b = 2a$ und $c = 3a$, dann sind $x = a - 3y - 2z, y, z$ Lösungen.

Beobachtungen: Bezeichne $\mathbb{L}$ die Menge aller Trippel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, welche das gegeben Gleichungssystem löst. $\mathbb{L}$ heißt die Lösungsmenge.

(1) $\mathbb{L}$ kann leer, kann aus genau einem Element bestehen oder kann unendlich viele Elemente enthalten.

1. Frage: Gibt es Regeln dafür, wann welcher Fall eintritt?

(2) Im 3. Beispiel mit $a = b = c = 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} c - 3y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \text{ frei wählbar} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -3y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seien y_1, z_1 (z.B. $y_1 = 2, z_1 = 5$) und y_2, z_2 (z.B. $y_2 = -1, z_2 = \frac{1}{2}$) vorgegeben, dann sind $\begin{pmatrix} -3y_1 - 2z_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3y_2 - 2z_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ beides Lösungen.
"Addition" dieser beiden Spalten ergibt:

$$\begin{pmatrix} -3y_1 - 2z_1 - 3y_2 - 2z_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2) \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $y := y_1 + y_2, z := z_1 + z_2$ ist wieder eine Lösung.

2. Frage: Besitzt $\mathbb{L}$ zusätliche Struktur?
Gibt es einfache Rechnungsoperationen, mit denen man aus bekanntes Lösungen neue Lösungen erzeugen kann?
3. Frage: Gibt es ein Algorithmus, um die Lösung zu finden?
4. Beobachtungen: Es wurden nur die Standartrechenoperationenen benutzt. Wir werden den Zahlbereich axiomatisieren.
$\rightsquigarrow$ "Körper" ist eine Menge, deren Elemente man addieren und multiplizieren kann mit den üblichen Rechenregeln.

Zunächst sei unser Zahlbereich der "Körper" der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Wiederholung der Rechenregeln:

1) Reelle Zahlen kann man addieren, dabei gilt:
   $(a + b) + c = a + (b + c)$ "assoziativ"
   $a + b = b + c$ "kommutativ"
   $0 + a = a$ "Null Element"
   $a + (-a) = 0$ "Inverses Element"

2) Reelle Zahlen kann man multiplizieren, dabei gilt:
   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ "assoziativ"
   $a \cdot b = b \cdot c$ "kommutativ"
   $1 \cdot a = a$ "Eins Element"
   $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ "Inverses Element"

3) Distributivgesetz:
$$a(b + c) = ab + ac$$

Definition: (Spaltenvektor) Vorgegeben sei eine natürliche Zahln $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Der reelle n-dimensionale Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Spalten $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ bestehend aus n reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.

Die Elemente in $\mathbb{R}^n$ liefert genaue Spaltenvektoren (oder auch nur Vektoren). Vorhin in dem Beispiel war $\mathbb{L}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

Definition: (Skalarmultiplikation, Summe) Seien $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ zwei Spaltenvektoren und sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, dann heißt der Spaltenvektor

$c\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}$ die Skalarmultiplikation von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ mit c und

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ die Summe von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Es gelten folgende Rechenregeln:

(Abkürzende Schreibweise: Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden mit unterstrichenen Kleinbuchstaben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ist bezeichnet, $\left(\text{z.B. } \underline{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right)$

$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$	"assoziativ"
$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$	"kommutativ"
$\underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$	"Nullvektor"
$\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$	"inverses Element"

Beweis für *assoziativ*:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ \vdots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ \vdots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right)$$

Subtraktion von Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für die Skalarmultiplikation:

Seien $c, d \in \mathbb{R}$ und $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

1) $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$

2) $c(d \cdot \underline{a}) = (cd)\underline{a}$ (assoziativ)

3) $(c+d)\underline{a} = c\underline{a} + d\underline{a}$ (distributiv)
$c(\underline{a} + \underline{b}) = c\underline{a} + c\underline{b}$

Beweis: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

zu 2)

$$c\,(d \cdot \underline{a}) = c\begin{pmatrix} da_1 \\ \vdots \\ da_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(da_1) \\ \vdots \\ c(da_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (cd)a_1 \\ \vdots \\ (cd)a_n \end{pmatrix} = (cd)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (cd)\underline{a}$$

zu 3)

$$\begin{aligned} c\,(\underline{a} \cdot \underline{b}) &= c\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = c\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(a_1 + b_1) \\ \vdots \\ c(a_n + b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 + cb_1 \\ \vdots \\ ca_n + ca_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cb_1 \\ \vdots \\ cb_n \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = c\underline{a} + c\underline{b} \end{aligned}$$

Definition: (Matrix) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ vorgegeben, eine reelle $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ ist eine rechteckige Anordnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von reellen Zahlen $\underbrace{a_{ij}}_{\substack{\text{i = Zeilenindex} \\ \text{j = Spaltenindex}}} \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 2×2 Matrix (“quadratisch”)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 2×3 Matrix

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 3×2 Matrix

Spezialfälle: $n = 1$, $m \times 1$ Matrix ist das selbe, wie ein Spaltenvektor im $\mathbb{R}^m$.
$m = 1$, $1 \times n$ Matrix besteht aus genau einer Zeile (ein Zeilenvektor).

Wozu sind Matrizen gut?
Antwort: "Matrizen beschreiben gewisse Abbildungen zwischen Standardvektorräumen."
Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $m \times n$ Matrix. Die zugehörige Abbildung ist:

$$\begin{aligned} l_A \quad : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ := \quad & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ l_A \quad &= \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} x_1 & & +5x_3 \\ 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = a_1 \\ 5x_1 & & -4x_3 & = a_2 \\ -6x_1 & +8x_2 & +7x_3 & = a_3 \end{pmatrix}$$

Definiere:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \\ -6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$l_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Exkurs über Abbildungen

Seien M und N zwei vorgegebene Mengen.

Definition: (Abbildung) Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ von der Menge M in die Menge N eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet. Man schreibt:

$$f : M \to N, x \mapsto f(x) := \text{ Vorschrift}$$

Redeweisen:
M heißt die Ausgangs- oder Urbildmenge von f.
N heißt die Ziel- oder Bildmenge von f.
f bildet x auf $f(x)$ ab, bzw. $f(x)$ ist das Bild von x unter f.
Sei $y \in N$ vorgegeben, dann heißt jedes $x \in M$ mit $f(x) = y$ ein Urbild von y unter f.
$f(M) = \{f(x) : x \in M\}$ ist eine Teilmenge von N und heißt Bild von f.

Beispiele:

1) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 5x^2 + 3x - 1 = f(x)$ sind Abbildungen.

2) A eine $m \times n$ - Matrix, dann ist $l_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ eine Abbildung.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$, $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$, also:
   $\to y < 0$ besitzt kein Urbild unter f
   $\to y > 0$ besitzt die Urbilder $\pm\sqrt{y}$
   $\to y = 0$ besitzt das Urbild 0.

Definition: (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv) Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt:

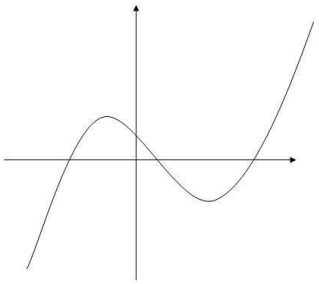
1) *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (In Worten: jedes $y \in N$ besitzt höchstens ein Urbild.)

2) *surjektiv*, wenn zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ existiert, mit $f(x) = y$.

3) *bijektiv*, falls injektiv und surjektiv ist, d.h. zu jedem $y \in N$ existiert genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ ist weder injektiv, noch surjektiv.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \mapsto 2n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv ($f(\mathbb{N})$ = gerade natürliche Zahlen)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x + 5$ ist bijektiv.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion mit Graph:



Problem für diese Vorlesung: Wie kann ich einer Matrix A ansehen, ob die zugehörige Abbildung l_A eine dieser Eigenschaften hat?

Definition: (Kompositum) Seien $g : L \to M$ und $f : M \to N$ zwei vorgegebene Abbildungen. Dann heißt

$$f \circ g : L \to N; x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$$

das Kompositum bzw. die Hintereinanderausführung der Abbildungen f und g.

Anmerkungen:

1) $f \circ g$ macht nur Sinn, wenn Zielmenge von g gleich Ausgangsmenge von f gilt.
2) Die Reihenfolge in $f \circ g$ ist sehr wichtig, z.B. gelte $L = M = N$, dann sind beide Hintereinanderausführungen $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert. Aber im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$.

Notation: Ist M irgendeine Menge, so heißt $id_M : M \to M,\ x \mapsto x$ die identische Abbildung von M.

Definition: (Umkehrabbildung)
Sei $f : M \to N$ eine gegebene Abbildung, dann heißt eine Abbildung $g : N \to M$ eine Umkehrabbildung für f, falls gilt: $g \circ f = id_M; g(f(x)) = x\ \forall x \in M$ und $f \circ g = id_N; f(g(y)) = y\ \forall y \in N$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - 2$ hat Umkehrabbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 2$

Lemma: Für eine Abbildung $f : M \to N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i f ist bijektiv

ii f besitzt eine Umkehrabbildung

Beweis: ii ⇒ i
Sei also g eine Umkehrabbildung für f injektiv, seien $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1 = a_M(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = a_M(x_2) = x_2$$

surjektiv: Sei $y \in N$, setze $x := g(y) \in M$

$$f(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(y) = id_N(y) = y$$

also ist x Urbild von y unter f.
i ⇒ ii
Sei f bijektiv, d.h. zu jedem $y \in N$ existiert genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.
Definiere $g : N \to M$
y → das eindeutig bestimmte Element $x \in M$ mit $f(x) = y$, das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f
also $f(g(y)) = y$ per Konstruktion ⇒ $f \circ g = id_N$
andererseits:

$$\begin{aligned} g(\underbrace{f(x)}_{y}) &= \text{das eindeutig bestimmte Urbild von f(x) unter f} \\ &= \text{x} \\ \Rightarrow g \circ f &= \text{id}_M \end{aligned}$$

■

Lemma: $f : M \to N$ besitzt höchstens eine Umkehrabbildung
Beweis: Seien $g : N \to M$ und $h : N \to M$ zwei Umkehrabbildungen für f.
zu zeigen: $g = h$
beachte obiges Lemma ⇒ f $\underbrace{\text{ist bijektiv.}}_{\exists x \in M : f(x) = y}$ Nun

$$\begin{aligned} \text{g(y)} &= g(f(x)) = (g \circ f)(x) = id_M(x) = x \\ \text{h(y)} &= h(f(x)) = (h \circ f)(x) = id_M(x) = x \\ \Rightarrow g(y) &= \text{h(y)} \end{aligned}$$

■

Notation: Besitzt $f : M \to N$ eine Umkehrabbildung, so wird diese mit $f^{-1} : N \to M$ bezeichnet.

Fortsetzung des 1. Kapitels

Sei $\begin{matrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \dots & +a_{mn}x_1 & = b_n \end{matrix}$ ein lineares Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$) mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Bilde die $m \times n$-Matrix $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, Kurzform $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ bzw. $l_A(\underline{x}) = \underline{b}$,
wobei $l_A = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$
$\mathbb{L} :=$ Lösungsmenge dieses Linearen Gleichungssystems $= \{x \in \mathbb{R}^n : l_A(\underline{x}) = \underline{b}\}$ = Menge aller Urbilder von $\underline{b}$ unter der Abbildung l_A.

1. Frage: Wann ist $\mathbb{L}$ nicht leer?
2. Frage: Fall $\mathbb{L} \neq \varnothing$, was kann man über $\mathbb{L}$ sagen? (z.B. wie groß ist $\mathbb{L}$?)
Betrachte das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_1 = 0 \end{array}$$

Kurzform: $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$, bzw. $l_A(\underline{x}) = \underline{0}$
zugehörige Lösungsmenge $\mathbb{L}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : l_A(\underline{x}) = \underline{0}\}$.

Grundlengende Beobachtungen:
Die Abbildung $l_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist "linear", d.h. ist mit Addition und Skalarmultiplikation von Spaltenvektoren verträglich.

1. $l_A(\underline{x} + \underline{y}) = l_A(\underline{x}) + l_A(\underline{y})$ für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

zu 1.

$$l_A(\underline{x} + \underline{y}) = l_A\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}(x_i + y_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}(x_i + y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^n a_{1i}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i + \sum_{i=1}^n a_{1i}y_i \end{pmatrix}$$

2. $l_A(c \cdot \underline{x}) = c \cdot l_A(\underline{x})$ für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $c \in \mathbb{R}$.

zu 2.

$$\begin{aligned} l_A(c \cdot \underline{x}) &= l_A\left(\begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}(c \cdot x_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}(c \cdot x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ c \cdot \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix} \\ &= c \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix} = cl_A(\underline{x}) \end{aligned}$$

Konsequenzen für $\mathbb{L}_0$ und $\mathbb{L}$

- $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{L}_0 \Rightarrow l_A(\underline{x}) = \underline{0}$ und $l_A(\underline{y}) = \underline{0} \overset{1.}{\Rightarrow} l_A(\underline{x} + \underline{y}) = l_A(\underline{x}) + l_A(\underline{y}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{L}_0$
- $\underline{x} \in \mathbb{L}_0$ und $c \in \mathbb{R} \overset{2.}{\Rightarrow} l_A(c \cdot \underline{x}) = c \cdot l_A(\underline{x}) = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow c \cdot \underline{x} \in l_A$

Ergebnis: $\mathbb{L}_0$ ist ein "Untervektorraum" des $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbb{L}_0$ ist abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation von Spaltenvektoren.

Ziel für später: Wie können Untervektorräume im $\mathbb{R}^n$ aussehen?

Annahme: $\mathbb{L} \neq \varnothing$, Sei etwa $\underline{z} \in \mathbb{L}$
Behauptung: $\mathbb{L} = \{\underline{z} + \underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{L} : 0\}\ (= \underline{z} + \mathbb{L}_0)$
Beweis: " $\geq$", sei $x \in \mathbb{L}_0$, $l_A(\underline{z} + \underline{x}) \overset{1.}{\Rightarrow} l_A(\underline{z}) + l_A(\underline{x}) = \underline{b} + \underline{0} = \mathbb{L}_0 \Rightarrow \underline{z} + \underline{x} \in \mathbb{L}$
"$\leq$", sei $y \in \mathbb{L}$, setzte $\curvearrowleft := \underline{y} - \underline{z}$, dann sicherlich $\underline{y} = \underline{z} + \underline{x}$

$$\begin{aligned} l_A(\underline{x}) &= l_A(\underline{y} - \underline{z}) \leq l_A(\underline{y} + (-1)\underline{z}) \overset{1.}{=} l_A(\underline{y} + l_A((-1)\underline{z}) \overset{2.}{=} l_A(\underline{y}) + (-1)l_A(\underline{z}) \\ &= l_A(\underline{y}) - l_A(\underline{z}) = \underline{b} - \underline{b} = 0 \\ &\Rightarrow \underline{x} \in \mathbb{L}_0 \end{aligned}$$

■ Versuch: Sei $U \leq \mathbb{R}^n$ ein Unterverktorraum. Finde Spaltenvektoren $\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^r$, so dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^r \to U; \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} \mapsto c\underline{x}^{(1)} + \ldots + c_r\underline{x}^{(v)}$$

2 Grundstrukturen

Notation: Sind M und N zwei Mengen, so heißt die Menge $M \times N := \{(m,n) : m \in M, n \in N\}$ das cartesische Produkt oder auch die Produktmenge von M und N.

2.1 Gruppen

Definition: (Gruppe) Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \longrightarrow G;\ (g,h) \mapsto g \cdot h$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) (Assoziativgesetz) $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$ für alle $g, h, k \in G$.

(ii) es existiert ein Element $e \in G$ mit $e \cdot g = g \cdot e = g$ für alle $g \in G$.

(iii) zu jedem $g \in G$ existiert ein $g' \in G$ mit $g \cdot g' = g' \cdot g = e$.

Lemma: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, dann gilt:

i. Das Element e im Axiom (ii) ist eindeutig bestimmt

ii. für jedes $g \in G$ ist das Element g' im Axiom (iii) eindeutig bestimmt.

Beweis:

i. Seien $e_1, e_2 \in G$ mit $e_1 \cdot g = g \cdot e_1 = g$, $e_2 \cdot g = g \cdot e_2 = g$ für alle $g \in G$.
betrachte:
$$e_1 \overset{g \cdot e_2 = g}{=} e_1 \cdot e_2 \overset{e_1 \cdot g = g}{=} e_2$$

ii. Sei $g \in G$ und seinen $g', g'' \in G$ mit $g \cdot g' = g' \cdot g = e$, $g \cdot g'' = g'' \cdot g = e$.
betrachte:
$$g' \overset{(ii)}{=} g' \cdot e = g' \cdot (g \cdot g'') \overset{(i)}{=} (g' \cdot g) \cdot g'' = e \cdot g'' \overset{(i)}{=} g''$$

Konventionen zur Notation:

- $\cdot$ heißt die Multiplikation in G, üblicherweise schreibt man einfach $gh := g \cdot h$
- Das Element $e \in G$ aus (ii) heißt das neutrale Element oder auch das Einselement von G (manchmal schreibt man 1 statt e).
- Das nach (ii) zu $g \in G$ existierende Element wird das inverse Element genannt und mit g^{-1} bezeichnet.

Beachte: $(g^{-1})^{-1} = g$, denn: $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$
setze $h := g^{-1}, h' := g$, dann $h \cdot h' = h' \cdot h = e$, also ist h' unser inverses Elment zu h, bzw. $h' = h^{-1}$

Beispiele:

1) $(\mathbb{Z},+)$, $0, -m$; $(\mathbb{Q},+)$; $(\mathbb{R},+)$; $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $1, \frac{1}{a}$; $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$

2) Sei X irgendeine vorgegebene Menge.
Setze

$$G := Per(X) := \text{ Menge aller bijektiven Abbildungen } f : X \longrightarrow X$$
$$\cdot := \circ = \text{ Kompositum von Abbildungen}$$

Einselement ist id_X
inverses Elemen zu f ist inverse Abbildung f^{-1}

Hier gilt das Kommutativgesetz nicht (falls X mindestens 3 Elemente enthält)

3) In der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ betrachte die Menge G alle Drehungen um den Ursprung 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360° := Hintereinanderausführung

Definition: Eine Gruppe $(G,\cdot)$ heißt kommutativ oder abelsch, falls das Kommutativgesetz $g \cdot h = h \cdot g$ für alle $g, h \in G$ erfüllt ist.

Weitere Konventionen:

- In einer kommutativen Gruppe G schreibt man meistens
  $+$, statt $\cdot$ (und redet von Addition, statt Multiplikation),
  0 statt 1 bzw. e (man redet vom Nullelement statt Einselement),
  $-g$ statt g^{-1}
- Statt "Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe" sagt man meist nur "Sei G eine Gruppe"

2.2 Körper

Definition: Ein Körper ist ein Trippel $(K,\cdot,+)$ bestehtend aus einer Menge K und zwei Abbildungen

$$\cdot : K \times K \longrightarrow K (\text{der "Multiplikation"})$$
$$+ : K \times K \longrightarrow K (\text{der "Addition"})$$

so dass folgende Bedinungen erfüllt sind:

(i) $(K,+)$ ist kommutative Gruppe (0 bezeichne das neutrale Element),

(ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe (1 bezeichne das neutrale Element),

(iii) (Distributivgesetz) $a \cdot (b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in K$.

Beispiele: $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$K = \{0, 1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	0

ist ein Körper.

Ausblick auf Algebra: Zu jeder Primzahl p gibt es "genau einen" Körper K mit p Elementen

Weitere Rechenregeln in Körpern:

1. $0 \cdot a = 0$, für alle $a \in K$, denn

$$\begin{aligned} 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a + (0 \cdot a + (-(0 \cdot a))) &\overset{\text{assoziativ}}{=} (0 \cdot a + 0 \cdot a) + (-(0 \cdot a)) \\ &\overset{\text{distributiv}}{=} (0 + 0) \cdot a + (-(0 \cdot a)) \\ &= 0 \cdot a + (-(0 \cdot a)) = 0. \end{aligned}$$

2. Wir setzen $a - b := a + (-b)$, dann gilt
   - $(-a) \cdot b = -(ab)$, d.h. $(-a) \cdot b$ ist das inverse Element bezüglich Addition zu ab also zz[1]:

$$\begin{aligned} & (-a) \cdot b + ab = 0 \\ \overset{\text{distributiv}}{\Rightarrow} \quad & ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b \overset{1.}{=} 0 \end{aligned}$$

   - $a - (b - c) = a - b + c$

2.3 Vektorräume

Definition: (Körper) Sei K ein fest vorgegebener Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Trippel $(V, \cdot, +)$ bestehend aus einer Menge V und zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} \cdot &: K \times V \longrightarrow V \text{(der "Skalarmultiplikation")} \\ + &: V \times V \longrightarrow V \text{(der "Addition")} \end{aligned}$$

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

[1] zu zeigen

(i) $(V,+)$ ist eine kommutative Gruppe,

(ii) (Assoziativität) $a\cdot(b\cdot v)=(ab)\cdot v$ für alle $a,b\in K$ und $v\in V$,

(iii) $1\cdot v=v$ für alle $v\in V$,

(iv) (Distributivität) $(a+b)\cdot v=av+bv$ für alle $a,b\in K$ und $v\in V$,
$a\cdot(v+w)=av+aw$ für alle $a\in K$ und $v,w\in V$.

Konventionen:
Die Elemente $v\in V$ heißen Vektoren.
Ist klar, welcher Körper K gemeint ist, dann spricht man einfach von Vektorräumen.

Sei V ein K-Vektorraum,
Konventionen: $v-w:=v+(-w)$ für $v,w\in V$.

Rechenregeln:

- $(-a)\cdot v=-(a\cdot v)$ für alle $a\in K$ und $v\in V$,
- $a\cdot(-v)=-(a\cdot v)$ für alle $a\in K$ und $v\in V$,
- $0\cdot v=0$ für alle $v\in V$
- $a\cdot 0=0$ für alle $v\in V$

Beispiele:

1. $K=\mathbb{R}, V=\mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{L}=$ "Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystem
$\mathbb{L}\subseteq\mathbb{R}^n$ Untervektorraum
abeschlossen und Addition und Skalarmultiplikation
$\Rightarrow\mathbb{L}$ ist ein Vektorraum
3. $K=\mathbb{Q}, V=\mathbb{Q}^n$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum
4. K beliebiger Körper, $K^n:=n$-dimensionaler Standard-K-Vektorraum
$:=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}, a_1,\dots,a_n\in K\right\}$ ist ein K-Vektorraum bzgl.

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}\text{ und }c\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}ca_1\\ \vdots\\ ca_n\end{pmatrix}$$

Definition: Eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, wenn gilt:

(i) Für alle $v, w \in U$ ist auch $v + w \in U$;

(ii) Für alle $a \in K$ und $v \in U$ ist auch $a \cdot v \in U$

Beobachtung:

- $U \neq \varnothing \Rightarrow$ es existiert mindestens ein $v \in U \underset{(ii)}{\Rightarrow} \underbrace{0}_{=0} \cdot v \in U$
- Sei $v \in U$ beliebig, dann gilt wegen (ii) auch $\underbrace{(-1) \cdot v}_{=-(1 \cdot v)=-v} \in U$

Das bedeutet $(U, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
Axiome für Skalarmultiplikation auf U sind automatisch erfüllt.
Also ist U selbst mit der von V auf U eingeschränkten Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum

Sei $\{U\}_{i \in I}$ eine vorgegebene Familie von Untervektorräumen von V.

Konstruktion I: $U := \bigcap_{i \in I} U_i$ ist wieder ein Untervektorraum von V. Dann seien $v, w \in U \Rightarrow v, w \in U_i$ für jedes $i \in I$
$\underset{U_i \text{ ist Untervektorraum}}{\Rightarrow} v + w \in U_i$ für jedes $i \in I \Rightarrow v + w \in U$
analog für Skalarmultiplikation $\setminus$ Untervektorraum

Kostruktion II: Die Summe

$$U := \sum_{i \in I} U_i := \left\{ U_{i_1} + U_{i_2} + \ldots + U_{i_r} : \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq I \text{ bel. unendliche Teilmenge, } u_{i_j} \in U_{i_j} \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{i \in I} u_i : u_i \in U_i, \text{ alle bis auf endlich } u_i \text{ sind der Nullvektor} \right\}$$

ist wieder ein Untervektorraum von V. Denn: seien $\sum_{i \in I} u_i$ und $\sum_{i \in I} v_i$ zwei Vektoren in U, d.h. $u_i, v_i \in U_i$ und $\begin{matrix} u_i = 0 & \text{für } i \notin \{i_1, \ldots i_r\} \subseteq I \\ v_i = 0 & \text{für } i \notin \{j_1, \ldots j_r\} \subseteq I \end{matrix}$
setze $w_i := u_i + v_i \in U_i$, denn $w_i = 0$ für $i \notin \{i_1, \ldots i_r\} \cup \{j_1, \ldots j_r\} =: A \subseteq I$

$$\left(\sum_{i \in I} u_i \right) + \left(\sum_{i \in I} v_i \right) = \left(\sum_{i \in A} u_i \right) + \left(\sum_{i \in A} v_i \right) = \left(\sum_{i \in A} (u_i + v_i) \right) = \left(\sum_{i \in A} w_j \right) \left(\sum_{i \in A} w_i \right) \in U$$

sei $c \in K$, dann $c \cdot \left(\sum_{i \in I} u \right) = c \left(u_{i_1} + \ldots + u_{i_r} \right) = \underset{\in U_{i_1}}{cu_{i_1}} + \ldots + \underset{\in U_{i_r}}{cu_{i_r}} = \sum_{i \in I} \underset{\in u_i}{(cu_i)} \in U$

Beachte: $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \sum_{i \in I} U_i$ im Allgemeinem kein Untervektorraum. Sei $u_{i_0} \in U_{i_0}$, setze $u_i := 0$

für $i \neq i_0$ dann ist $u_{i_0} = \sum_{i \in I} u_i \in \sum_{i \in I} U_i \Rightarrow U_{i_0} \subseteq \sum_{i \in I} U_i$ für alle i_0

Beispiele: V ist Untervektorraum von V.
$\{0\}$ ist Untervektorraum von V.

Konventionen: Ist $I = \{1, \ldots, r\}$, so schreibt man einfacher $U_1 + \ldots U_r$ statt $\sum_{i \in I} U_i$.

3 Die Strukturtheorie der Vektorräume

Sei V ein K-Vektorraum
Sei $v_1, \dots v_r \in V$ endlich viele vorgegebene Vektoren.

Definition:

1. Jeder Vektor $v \in V$ von der Form $v = a_1v_1 + \dots + a_rv_r$ mit $a_i \in K$ heißt eine *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \dots v_r$.

2. $\langle v_1, \dots, v_r \rangle :=$ Teilmenge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots v_r = \{a_1v_1 + \dots + a_rv_r : a_i \in K\}$ heißt der von $v_1, \dots v_r$ erzeugte *Untervektorraum* [2]

Satz 3.1 *i.* $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ *ist der kleinste Untervektorraum von V, welcher die Vektoren* $v_1, \dots, v_r$ *enthält.*

ii. $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$

Beweis:

i. $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ *ist ein Untervektorraum, denn*

$$\begin{aligned}(a_1v_1 + \dots a_rv_r) + (b_1v_1 + \dots + b_rv_r) &= (a_1v_1 + b_1v_1) + \dots + (a_rv_r + b_rv_r) \\ &= (a_1 + b_1)\, v_1 + \dots (a_r + b_r)\, v_r\end{aligned}$$

$c(a_1v_1 + \dots a_rv_r) = ca_1v_1 + \dots ca_rv_r$
$v_i = 0_{v_1} + \dots + 0_{v_{i-1}} + 1_{v_i} + 0_{v_{i+1}} + \dots + 0_{v_r}$
also $v_1, \dots, v_r \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$
Sei nun $U \subseteq V$ *ein beliebiger Untervektorraum mit* $v_1, \dots, v_R \in U$. *U abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation* $\Rightarrow$ *alle Linearkombinationen der* $v_1, \dots v_r$ *liegen auch in U, d.h.* $\langle v_1, \dots, v_r \rangle \subseteq U$

ii. Vorab: Sei $v \in V$, *dann ist* $\langle v \rangle = \{av : a \in K\}$

$$\begin{aligned}\langle v_1, \dots, v_r \rangle &= \{a_1v_1 + \dots + a_rv_r,\ a_i \in K\} \\ &= \{a_1v_1 : a_1 \in K\} + \{a_2v_2 : a_2 \in K\} + \dots + \{a_rv_r : a_r \in K\} \\ &= \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle\end{aligned}$$

Definition: Ein Vektorraum V heißt *endlich erzeugt*, wenn endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ existieren, so dass $V = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. Außerdem heißt $\{v_1, \dots v_r\}$ dann ein *Erzeugendensystem* von V.

[2] UVR, oder auch Unterraum

Beispiel:

1. $V = K^n$ $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $e_1, \ldots, e_n$ ist ein Erzeugendensystem für K^n (insbesondere ist K^n endlich erzeugt), denn

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $V = K^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   nach i) ist $\{v_1, v_2\}$ ein Erzeugendensystem, also auch $\{v_1, v_2, v_3\}$, aber

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 &= (a_1 - a_2)\, v_1 + 0 \cdot v_2 + a_2 \cdot v_3 \\ &= (a_1 - a_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   besitzt mind. zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination des Erzeugendensystems.
   ziehe beide Darstellungen von einander ab → ergibt

$$0 = -a_2 v_2 - a_2 v_2 + a_2 v_3$$

Definition: Eine endliche Familie von Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ von V heißt *linear abhängig*, falls $a_1, \ldots, a_r \in K$ existiert mit

i) mind. ein $a_i \neq 0$

ii) $a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r = 0$

Beispiele:

3. $\{v_1, v_2, v_3\} \in K^2$ aus obigen Beispiel 2.

4. Ein einzelner Vektor $v_1 \in V$ ist linear abhängig, genau dann, wenn $v_1 = 0$ ist, denn $v_1 = 0$, dann $1 \cdot v_1 = 0 \Rightarrow v_1$ linear abhängig
umgekehrt sei v_1 beliebig linear abhängig, d.h. es existiert ein $a \in K$, $a \neq 0$ mit $a \cdot v_1 = 0$, dann
$$0 = a^{-1}(av_1) = \left(a^{-1}a\right)v_1 = 1v_1 = v_1$$

5. a) ist unter den $v_1, \ldots, v_r$ der Nullvektor enthalten, so isind $v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig, dann sei $v_1 = 0$, dann $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_{i-1} + 0v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_r$

   b) kommt unter den $v_1, \ldots, v_r$ ein Vektor mind. doppelt vor, so sind $v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig, dann gelte $v_i = v_j$ für zwei Indizes $i < j$, dann $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_{j-1} + (-1)v_j + 0v_{j+1} + \ldots + 0v_r = 1v_i + (-1)v_j = v_i - v_j = 0$

Satz 3.2 *Für Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ sind folgende Bedingungen äquivalent*

i $v_1, \ldots, v_r$ *sind linear abhängig*

ii *es ex. ein Index i, so dass sich der Vektor v_i schreiben lässt als Linearkombination der übrigen Vektoren $v_1 \ldots v_{i-1}\ v_{i+1} \ldots v_r$*

iii $\langle v_1 \ldots v_r \rangle$ *lässt sich durch eine geeignete Wahl von r-1 Vektoren erzeugen.*

Beweis: *(i $\Rightarrow$ ii)*
Nach Voraussetzung ex. $a_1 \ldots a_r \in K$, nicht alle $a_i = 0$ mit $a_1v_1 + \ldots + a_rv_r = 0$
Wähle ein i mit $a_i \neq 0$, dann

$$a_iv_i = -a_1b_1 - \ldots - a_{i-1}v_{i-1} - a_{i+1}v_{i+1} - \ldots - (a_r)v_r$$

multiplizieren mit a_i^{-1}, dann

$$v_i = \frac{a_1}{a_i}b_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i}v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}v_{i+1} - \ldots - \left(\frac{a_r}{a_i}\right)v_r$$

(ii $\Rightarrow$ iii)
Nun gilt nach Voraussetzung $v_i = b_1v_1 + \ldots + b_{i-1}v_{i-1} + b_{i+1}v_{i+1} + \ldots + b_rv_r$ für ein geeignetes i.
Behauptung: $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{r-1}, \ldots v_r \rangle$
Klar ist, dass das "$\supseteq$" gilt:

$$c_1v_1 + \ldots + \underbrace{c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1}}_{\subset\langle v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},v_r\rangle} + \ldots + c_rv_r = c_1v_1 + \ldots + c_{i-1}v_{i-1} + \underbrace{0v_i + c_{i+1}v_{i+1}}_{\subset\langle v_1 \ldots v_r\rangle} + \ldots + c_rv_r$$

"$\subseteq$"
Sei $c_1v_1 + \ldots + c_rv_r \in \langle v_1 \ldots v_r \rangle$ ein beliebiger Vektor.

$$\begin{aligned} c_1v_1 + \ldots + c_r + v_r &\Leftrightarrow c_1v_1 + \ldots + c_{i-1}v_{i-1} + c_i(b_1v_1 + \ldots + b_{i-1}v_{i-1} + b_{i+1}v_{i+1} + \ldots + b_rv_r) + c_{i+1}v_{i+1} + \ldots + c_rv \\ &\Leftrightarrow (c_1 + c_1b_1)v_1 + \ldots + (c_{i+1} + b_{i+1}c_i)v_{i+1} + \ldots + (c_r + c_rb_r) \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_r \rangle \end{aligned}$$

(iii ⇒ ii) nach Vor. gelte $\langle v_1, \ldots, \underset{\in v_i}{v_r} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_r \rangle$
$\Rightarrow v_i$ *lässt sich schreiben als Linearkombination von*

$$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_r \text{ etwa } v_i = a_1 v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots + a_r v_r$$

denn

$$0 = a_1 v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} - a_i v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots + a_r v_r$$

also sind $v_1, \ldots, v_r$ *linear abhängig.*

Corollar 3.3 *Ist der Vektor* $w \in V$ *eine Linearkombination der Vektoren* $v_1, \ldots, v_r$ *so sind die Vektoren* $v_1, \ldots, v_r, w$ *linear abhängig.*

Definition: *Die Vektoren* $v_1, \ldots, v_r \in V$ *heißen linear unabhängig, falls sie nicht linear abhängig sind:*

$$0 = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r \text{ mit } a_i \in K \text{ stehts folgt } a_1 = \ldots = a_i = 0$$

Beispiel: $K^n \ni e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

Satz 3.4 *Seien* $v_1, \ldots, v_r \in V$ *linear unabhängig, dann beschreibt jeder Vektor in* $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ *genau eine Darstellung als Linearkombination der* $v_1, \ldots, v_r$.

Beweis: *Sei* $v \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$. *Seien* $v = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r = b_1 v_1 + \ldots + b_r v_r$ *zwei Darstellungen, dann*

$$\begin{aligned} (a_1 - b_1) v_1 + \ldots + (a_r + b_r) v_r &= 0 \\ v_1, \ldots, v_r \text{ linear abhängig} &\Rightarrow a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_r - b_r = 0 \\ &\Rightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_r = b_r \end{aligned}$$

Definition: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ bilden eine *Basis* von V, falls sie linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem sind.

Beispiele: $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ bilden eine Basis, die sog. Standardbasis.

Erläuterung: $v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis von V, dies bedeutet:

"Jeder Vektor $r \in V$ lässt sich in genau einer Weise als Linearkombination $r = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ darstellen."

Umformulierung: Die Abbildung $K^n \to V, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1V_1 + \ldots + a_nV_n$ ist bijektiv. Fragen:

- Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?
- Was kann man über die Anzahl von Vektoren in einer Basis sagen?

Beobachtung: K^2, Standardbasis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vorgegeben sei ein $a \neq 0$ in K. Beh.: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls Basis von K^2.

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1v_1 + a_2v_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 = b_1 - a_1 = b_1 - a^{-1}b_2 \\ a_1 = a^{-1}b_2 \end{matrix}$

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum.

Satz 3.5 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei $v_1, \ldots, v_r$ ein Erzeugendensystem von V, und seien $u_1, \ldots, u_s \in V$ linear unabhängige Vektoren, dann lassen sich die $u_1, \ldots, u_s$ durch Hinzufügegen geeigenter Vektoren unter den $v_1, \ldots, v_r$ zu einer Basis von V ergänzen.*

Beweis: *Setze $A := \{u_1, \ldots, u_s\}$, $C := \{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s\rangle$ sind eine Teilmenge $A \supseteq B \subseteq C$, welche linear unabhängig ist und maximal viele Elemente enthält.*
Mache Liste aller B mit $A \subseteq B \subseteq C$ (Liste enthält A)
Streiche alle linear Abhängigen B aus der Liste (A wurde nicht gestrichen).
In der verbleibenden Liste suche ein B mit möglichst vielen Elementen heraus. Letzteres bedeutet insbesondere

$$\text{jedes } B \subsetneq B' \subseteq C \text{ ist linear abhängig}$$

(sonst müsste B' in der verbleibenden Liste vorkommen, hätte aber auch mehr Elemente als B).
beachte: $B = \{u_1, \ldots, u_s, \text{ einige } v's\}$

Behauptung: B ist eine Basis, B ist linear unabhängig, nach Wahl, also bleibt zu zeigen, dass $B = \{w_1, \ldots, w_j\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Nach Voraussetzung gilt $\langle v_1, \ldots, v_r\rangle = V$, also genügt es zu zeigen, dass $v_1, \ldots, v_r \in \langle w_1, \ldots, w_r\rangle$ (denn dann $V = \langle v_1, \ldots, v_r\rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_r\rangle \subseteq V$).
Nehme irgendein v_i her.

Beweis: (Durch Widerspruch!)
Annahme: $v_1 \notin \langle w_1, \ldots, w_j\rangle$ insbesondere $v_1 \notin B$, also $B \subsetneq B' = B \cup \{v_i\} \subseteq C$
wegen der Maximalität von B ist B' linear abhängig, also ex. $a_1, \ldots, a_j$ $a \in K$, nicht alle $= 0$ mit $a_1w_1 + \ldots + a_jw_j + av_i = 0$

Zwischenbehauptung: $a \neq 0$, denn sonst $a_1w_1 + \ldots + a_jw_j = 0$ mit mind. einem $a_i \neq 0$. Das

ist ein Widerspruch, da die $w_1, \ldots, w_j$ linear abhängig gewählt waren.

$\left.\begin{matrix} \{v_1, \ldots, v_r\} & \text{Erzeugendensystem von } V \\ u_1, \ldots, u_s & \text{linear unabhängig in } V \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ die $u_1, \ldots, u_s$ lassen sich durch geeignete v's zu einer Basis ergänzen.

Bemerkung:

- Die leere Menge $\varnothing$ von Vektoren in V ist linear unabhängig
- $V = \{0\}$ besitzt die leere Menge $\varnothing$ als Basis.

Corollar 3.6 *Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum, dann besitzt V eine Basis, genauer gilt:*

a) Jede Familie linear unabhängiger Vektoren lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

b) Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Teilmenge, welche eine Basis ist.

Beweis:

b) Sei also $v_1, \ldots, v_r$ ein beliebiges Erzeugendensystem. Wende dem Austauschsatz an auf die leere Menge (als Menge von linear unabhängigen Vektoren)

a) Sei $a_1, \ldots, a_s$ ein vorgegebene Familie von linear unabhängigen Vektoren. Wähle irgendein Erzeugendensystem und wende Austauschsatz an.

Lemma 3.7 *Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V und seien $v, w \in V$ beliebig vorgegeben. Dann sind $v, w_1, u_2, \ldots, u_n$ linear abhängig.*

Beweis: *Schreibe* $\begin{matrix} v = a_1u_1 + \ldots + a_nu_n \\ w = b_1u_1 + \ldots + b_nu_n \end{matrix}$, $a_i, b_i \in K$
1. Fall $a_1 = 0$, *dann*

$$\begin{aligned} v &= a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \\ \Rightarrow 0 &= -v + 0w + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \\ &\Rightarrow v, w, u_2 \ldots u_n \text{ linear abhängig} \end{aligned}$$

2. Fall $b_1 = 0$, *dann* $0 = 0v - w + b_2u_2 + \ldots + b_nu_n$
3. Fall $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$, *dann* $b_1v = b_1a_2u_2 + \ldots + b_1a_nu_n$ *und* $a_1w = a_1b_2u_2 + \ldots + a_1 + b_nu_n$ *subtrahieren:*

$$\begin{aligned} b_1v - a_1w &= (b_1a_2 - a_1b_2)\, u_2 + \ldots (b_1a_n - a_1b_n)\, u_n \\ 0 &= -b_1v + a_1w + (b_1a_2 - a_1b_2)\, u_2 + \ldots (b_1a_n - a_1b_n)\, u_n \end{aligned}$$

Satz 3.8 *Sei $v_1, \ldots, v_r$ ein Erzeugendensystem und $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V, dann gilt stets $n \leq r$*

Beweis: *Betrachte $u_2, \ldots u_n$ sind linear unabhängig, wende darauf den Austauschsatz an: $a_1, \ldots, a_n$ lässt sich dann durch v's zu einer Basis ergänzen.*
Wegen Lemma 7 genügt ein geeignetes v_i. Also ist $v_{i_0}, u_2, \ldots, u_n$ wieder eine Basis von V.
Wiederhole diesen "Austausch", lasse u_2 weg $\rightsquigarrow v_{i_1}, u_3, \ldots, u_n$
Austauschsatz + Lemma 7 $\Rightarrow$ ex. v_{i_2}, so dass $v_{i_1}, v_{i_2}, u_3, \ldots, u_n$ wieder eine Basis ist.
Weiter suckzessive für alle u's (n Schritte).
Endresultat: Basis der Form $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$.
Beachte: v_{i_1} bis v_{i_n} sind paarweise verschieden (da linear unabhängig) $\Rightarrow n \leq r$

Corollar 3.9 *Je zwei Basen eines endlich-erzeugten VR V haben die gleiche Anzahl von Elementen.*

Beweis: *Sei $v_1, \ldots, v_r$ die Basis und $u_1, \ldots, u_n$ die andere Basis. Satz 8 $\Rightarrow n \leq r$.*
Nimm $u_1, \ldots, u_n$ als Erzeugendensystem, $v_1, \ldots, v_r$ als Basis. Satz 8 $\Rightarrow r \leq n$.
Insgesamt: $n = r$

Definition: Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, die Anzahl von Vektoren in einer Basis von V heißt die Dimension von V (Notation: dim V, bzw. $\dim_k V$)
Beispiel: $\dim K^n = n$

Bemerkung: Sei dim V = n, dann gilt:

i) Mehr als Vektoren in V sind stehts linear abhängig.

ii. jedes Erzeugendensystem von V muss mindestens n Vektoren enthalten.

Beweis:

i. Seien $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig
Cor. 6.a $\Rightarrow v_1, \ldots, v_r$ lassen sich zu Basis von V ergänzen $\Rightarrow r \leq n$.

ii. Cor. 6 $\Rightarrow$ jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis und damit mindestens n Vektoren.

Satz 3.10 *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $U \subseteq V$ ein UVR, dann ist U ebenfalls endlich erzeugt mit $\dim U \leq \dim V$, außerdem gilt $U = V$ genau dann, wenn $\dim U = \dim V$.*

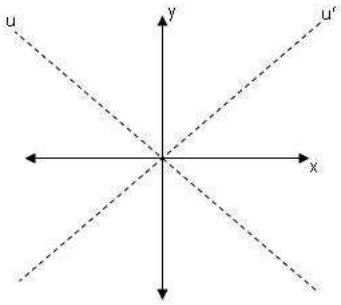
Beweis: *betrachte Mengen von linear unabhängigen Vektoren in U sind auch linear unabhängig V.*
also ist die Anzahl von Vektoren in einem solchen Menge $\leq n := \dim V$
deswegen existiert eine Menge $u_1, \ldots, u_m$ von linear unabhägen Vektoren in U mit maximal vielen Vektoren.

Behauptung: $u_1, \ldots, u_m$ ist Basis von U ($\dim U = m \leq n \dim V$), nur zz, dass $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$.
Sei $u \in U$ beliebig mit $u \neq u_1, \ldots, u_m$ dann hat die Menge $\{u, u_1, \ldots, u_m\} \subseteq U$ m+1 Elemente.
Maximalität von $m \Rightarrow u, u_1, \ldots, u_m$ sind linear unabhängig, also $au, a_1u_1 + \ldots + a_mu_m = 0$ wobei nicht alle alle Skalare $a, a_1, \ldots, a_m$ gleich Null sind, denn notwendiger Weise $a \neq 0$ (sonst $a_1u_1 + \ldots a_mu_m \leq 0$ und nicht alle $a_1, \ldots, a_m = 0$ WIDERSPRUCH zu $u_1, \ldots, u_m$ linear unabhängig).
Also $n = -a^{-1}a_1u_1 + \ldots + -a^{-1}a_mu_m \in \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$. Es gelte $\dim U = \dim V = n$.

Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von U.
Behauptung: $u_1, \ldots, u_n$ ist auch Basis von V (dann $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle \overset{\Downarrow}{=} V$)
jedenfalls sind $u_1, \ldots, u_n$ linear unabhängig in V
Cor. 6.a $\Rightarrow u_1, \ldots, u_n$ lassen sich zu Basis von V erhängen, hat n Elemente per Annahme $\Rightarrow u_1, \ldots, u_n$ war schon Basis von V.

Definition: Sei V ein Vekotorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum; Ein Komplement von U in V (ein zu U in V komplementärer Unterraum) ist ein Unterraum $U' \subseteq V$ mit $U \cap U' = \{0\}$ und $U + U' = V$

Beispie: $\mathbb{R}^2$



Erläuterung: Sei $v \in V$ *2. Bedingung* $\Rightarrow v = u + u'$ mit geeigneten $u \in U$ und $u' \in U'$ *1. Bedingung* $\Rightarrow$ obige Summendarstellung ist eindeutig, denn sei $v = u_1 + u_1'$ ebenfalls mit $u_1 \in U, u_1' \in U'$ $u + u' = u_1 + u_1' \Rightarrow U \ni u - u_1 = u_1' - u' \in U \Rightarrow u - u_1 = u_1' - u' = 0$ $\Rightarrow u = u_1, u' = u_1'$ mit anderen Worten: die Abbildung $U \times U' \to V; (u, u') \mapsto u + u'$ ist bijektiv.

Satz 3.11 *Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann existiert stets ein Komplement U' zu U in V.*

Beweis: *Wähle Basis $u_1, \ldots, u_m$ von U.*
Cor. 6.a ergänze zu Basis $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}', \ldots, u_n'$ von V
definiere: $U' := \langle u_{m+1}', \ldots, u_n' \rangle$
Behauptung: U' ist ein Komplement von U

- $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$, $U' = \langle u'_{m+1}, \ldots, u'_n \rangle$ auch $V = \langle u_1, \ldots, u_m, u'_{m+1}, \ldots, u'_n \rangle$
  sei $v \in V$ beliebig, schreibe $v = \underbrace{a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m}_{\in U} + \underbrace{a_{m+1} u'_{m+1} + \ldots + a_n u'_n}_{\in U'} \Rightarrow V = U + U'$

- sei $v \in U \cap U'$, dann $v = b_1 u_1 + \ldots + b_m u_m$ für geeignete Skalare $b_1, \ldots, b_m \in K$
  $v = c_{m+1} u'_{m+1} + \ldots + c_n u'_n$ für geeigenete $c_{m+1}, \ldots, c_n \in K$
  $\Rightarrow b_1 u_1 + \ldots + b_m u_m - c_{m+1} u'_{m+1} - \ldots - c_n u'_n = 0$
  $\Rightarrow b_1 = \ldots = b_m = c_{m+1} = \ldots c_n = 0 \Rightarrow v = 0$

Beachte: $\dim v = n = m + (n - m) = \dim U + \dim U'$

Satz 3.12 *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und seien U_1 und U_2 Unterräume von V, dann gilt:*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 \cap U_2 + \dim (U_1 + U_2)$$

Beweis:

1. *Fall: Es gelte $U_1 \cap U_2 = \{0\}$*
   seien $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von U_1 und $u'_1, \ldots, u'_s$ eine Basis von U_2
   Behauptung: $u_1, \ldots, u_r, u'_1, \ldots, u'_s$ ist Basis von $U_1 + U_2$
   $(\dim (U_1 + U_2) = r + s = \dim U_1 + \dim U_2, \dim U_1 \cap U_2 = \dim \{0\} = 0)$
   - $U_1 + U_2 = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle + \langle u'_1, \ldots, u'_s \} = \langle u_1, \ldots, u_r, u'_1, \ldots, u'_s \rangle$
   - *sei* $b_1 u_1 + \ldots + b_r u_r + c_1 u'_1 + \ldots + c_s u'_s = 0 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{b_1 u_1 + \ldots + b_r u_r}_{\in U_1} = \underbrace{-c_1 u'_1 - \ldots - c_s u'_s}_{\in U_2}}_{\in U_1 \cap U_2 \{0\}}$

     $\Rightarrow b_1 = \ldots = b_r = c_1 = \ldots = c_s = 0$

2. *Fall: allgemeine Situation: betrachte $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$ als Unterraum von U_2*
   Satz 11 $\Rightarrow$ existiert Komplement U von $U_1 \cap U_2$ in U_2, also $(U_1 \cap U_2) + U = U_2$
   $(U_1 \cap U_2) \cap U = \{0\}$
   wende 1. Fall an auf Vektorraum U_2 und seine Unterräume $U_1 \cap U_2$ und U bekomme:

   $$\dim U_1 \cap U_2 + \dim U = (\dim U_1 \cap U_2) + U = U_2$$

   Beachte $U_1 \cap \underbrace{U}_{\subseteq U_2} = (U_1 \cap U_2) \cap U = \{0\}$ könne also 1. Fall auch anwenden auf die Unterräume U_1 und U bekommen

   $$\dim U_1 + \dim U = \dim (U_1 + U)$$

   also : $U \subseteq U_2 \Rightarrow U_1 + U \subseteq U_1 + u_2$
   andererseits $(U_1 \cap U_2) + U = U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 = U_1 + (U_1 \cap U_2) + U \subseteq U_1 + U \Rightarrow U_1 + U =$

$U_1 + U_2$
somit

$$\dim U_1 + \dim U = \dim (U_1 + U_2)$$

Insbesondere: $U \subseteq V$ und U' Komplement zu $U \Rightarrow \dim U + \dim U' - \dim V$

Bemerkung: Sei V ein beliebiger K-VR:

- Eine Familie $\{v_i\}_{i \in I}$ von Vektoren in V heißt Erzeugendensystem von V, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ schreiben lässt als

  $$v = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_{i_r} \text{ mit } a_1, \ldots, a_r \in K$$

  für endlich viele geeignete Indezes $i_1, \ldots, i_r \in I$

  $$\left(v = \sum_{i \in I} a_i v_i, \text{ mit } a_i \in K, \text{ von denen höchstens endlich viele } \neq 0 \text{ sind.} \right)$$

- Eine Familie $\{v_i\}_{i \in I}$ von Vekotren in V heißt linear unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ die Vektoren $\{v_i\}_{i \in J}$ linear unabhängig.

- Eine Familie $\{v_i\}_{i \in I}$ heißt Basis von V, falls sie ein Erzeugendensystem und linear unabhängig ist.
  Dies bedeutet: Zu jedem $v \in V$ ex. eindeutig bestimmte $i_1, \ldots, i_r \in I$ und $a_1, \ldots, a_r \in K$, so dass

  $$v = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_{i_r}$$

  Der Austauschsatz von Steiniz bleibt richtig. Jeder VR besitzt eine Basis. Je zwei Basen eines VR V sind gleichmächtig. Dimension von V = Kardinalität einer Basis.

Beipiele für einem unendlich dim. VR

- $\mathbb{R}$ Vektorraum aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reelen Zahlen
- $C([0,1], \mathbb{R}) := \mathbb{R} - VR$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

Seien V_1, V_2 zwei beliebige VR. Beachte das Produkt $V_1 \times V_2$ (also Menge).
Definiere Addition auf $V_1 \times V_2$ durch $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

Behauptung: Dadurch wird $V_1 \times V_2$ zu einer abelschen Gruppe.
Beweis:

$$\begin{aligned}
((u_1, u_1) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\
&= ((u_1 + v_1) + w_2, (u_2 + v_2)\, w_2) \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2)) \\
&= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\
&= (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2))
\end{aligned}$$

Nullvektor: (0,0)
Inverse: $-(v_1, v_2) = (-v_1, -v_2)$

Definiere: Skalarmultiplikation auf $V_1 \times V_2$ durch

$$a(v_1, v_2) = (av_1, av_2)$$

Bemerkung: Dadurch wird $V_1 \times V_2$ zu einem K-VR
Beweis:

$$\begin{aligned}(a(b(v_1, v_2))) &= (a(bv_1, bv_2)) \\ &= (a(bv_1), a(bv_2)) \\ &= ((ab)v_1, (ab)v_2) \\ &= (ab)(v_1, v_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) &= a(v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (a(v_1 + w_1), a(v_2 + w_2)) \\ &= (av_1 + aw_1, av_2 + aw_2) \\ &= ((av_1, av_2) + (aw_1, aw_2)) \\ &= a(v_1, v_2) + a(w_1, w_2)\end{aligned}$$

Definition: Der Vektorraum $V_1 \times V_2$ heißt das *direkte Produkt*, oder auch die *direkte Summe* von den VR $V_1 \times V_2$. Statt $V_1 \times V_2$ schreibt man auch $V_1 \otimes V_2$ (direktes Produkt) und $V_1 \oplus V_2$ (direkte Summe)

Wir haben die Untervektorräume

$$V_1' := V_1 \times \{0\} = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, v_2 = 0\}$$

$$V_2' := \{0\} \times V_2 = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, v_1 = 0\}$$

Dabei gilt: $V_1' \cap V_2' = \{(0,0)\}$
$V_1' + V_2' = V_1 \times V_2$, da $(v_1, v_2) = (\overset{\in V_1'}{v_1}, 0) + (\overset{\in V_2}{0}, v_2)$
Also sind V_1' und V_2' zueinander komplementäre UR von $V_1 \oplus V_2$ Insbesondere $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1') + \dim V_2'$
Die Abbildung $V_1 \to V_1'; v_1 \mapsto (v_1, 0)$ ist bijektiv (hierbei handelt es sich um einen sogenannten Isomorphismus von VR)

Sei etwa $w_1, \ldots, w_r$ eine Basis von v_1. Dann ist $(w_1, 0), \ldots, (w_r, 0)$ eine Basis von V_1'. Denn: Sei $(v_1, 0) \in V_1'$ beliebig. Dann $v = a_1 w_1 + \ldots + a_r w_r$ eindeutig daraus folgt:

$$\begin{aligned}(v, 0) &= (a_1 w_1 + \ldots + a_r w_r, 0) = (a_1 w_1, 0) + \ldots + (a_r w_r, 0) \\ &= a_1(w_1, 0) + \ldots + a_r(w_r, 0) \text{ eindeutig.}\end{aligned}$$

Somit $\dim V_1' = \dim V_1$, analog $\dim V_2' = \dim V_1$
Ergebnis: $\dim (V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Beispiel: $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}; \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

4 Lineare Abbildungen

Seien V und W zwei K-VR
Definition: Eine lin. Abb. $f : V \to W$ ist eine Abb., für welche gilt

i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V$

ii) $f(av) = a \cdot f(v)\ \forall a \in K, v \in V$

Beispiele:

1) Sei $A = (a_{ij})$ ein $m \times n$ Matrix mit Einträgen in K. Dann ist die Abbildung

$$L_A : K^n \to K^m; \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \end{pmatrix}$$

linear.

2. Gegeben sei eine Familie $B = (v_1, \ldots, v_r)$ von Vektoren in V. Dann ist

$$i_B : K^r \to V; \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} \mapsto c_1 v_1 + \ldots + c_r v_r = \sum_{i=1}^{r} c_i v_i$$

eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} i_B\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix}\right) = i_b \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_r + d_r \end{pmatrix} &= (c_1 d_1) v_1 + \ldots + (c_r d_r) v_r \\ &= (c_1 v_1 + \ldots + c_r v_r) + (d_1 v_1 + \ldots + d_r v_r) \\ &= i_B \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} + i_B \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$i_B\left(a \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}\right) = (ac_1) v_1 + \ldots + (ac_r) v_r = a(c_1 v_1 + \ldots + c_r v_r) = a i_B \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}$$

3) Seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von V. Dann ist die Abbildung

$$\sigma : U_1 \oplus U_2 \to V; (u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$$

linear.

$$\begin{aligned}\sigma\left((u_1,u_2)+(u_1',u_2')\right) &= \sigma\left(u_1+u_1',u_2+u_2'\right)\\ &= \left(u_1+u_1'\right)+\left(u_2+u_2'\right)=\left(u_1+u_2\right)+\left(u_1'+u_2'\right)\\ &= \sigma\left((u_1,u_2)\right)+\sigma\left((u_1',u_2')\right)\end{aligned}$$

$$\sigma\left(a\left(u_1,u_2\right)\right)=\sigma\left((au_1,au_2)\right)=au_1+au_2=a\left(u_1+u_2\right)=a\cdot\sigma\left((u_1,u_2)\right)$$

Bemerkung: Ist $f: V \to W$ linear, so gilt $f(0)=0$ und $f\left(v_1-v_2\right)=f\left(v_1\right)-f\left(v_2\right)$ für alle $v_1, v_2 \in V$
Beweis: $f(0)=f(0v)=0f(v)=0$

$$f\left(v_1-v_2\right)=f\left(v_1+(-1)v_2\right)=f\left(v_1\right)+f\left((-1)v_2\right)=f\left(v_1\right)+(-1)f\left(v_2\right)=f\left(v_1\right)-f\left(v_2\right)$$

Lemma 4.1 *Sei $f: V \to W$ linear, $\forall v_1,\ldots,v_n \in V$ und $a_1,\ldots,a_n \in K$ gilt dann:*

$$f\left(a_1v_1+\ldots+a_nv_n\right)=a_1f\left(v_1\right)+\ldots+a_nf\left(v_n\right)$$
$$\left(f\left(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_if\left(v_i\right)\right)$$

Beweis: *(durch vollständige Induktion nach n)*
IA. $n=1$

$$f\left(a_1v_1\right)=a_1f\left(v_1\right) \text{ nach Axiom ii}$$

IV. Behauptung sei richtig für n

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}n+1\left(a_iv_i\right)\right) &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\right)+\left(a_{n+1}v_{n+1}\right)\right)\\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\right)+f\left(a_{n+1}v_{n+1}\right)\\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\right)+a_{n+1}+f\left(v_{n+1}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_if\left(v_i\right)+a_{n+1}f\left(v_{n+1}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}a_if\left(v_i\right)\end{aligned}$$

Definition: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt

i) $\ker(f) := \{v \in V : f(v) = 0\}$ der Kern von f

ii) $im(f) := \{w \in W : w = f(v) \text{ für ein } v \in V\}$ das Bild von f (manchmal auch einfach mit $f(V)$ bezeichnet).

Lemma 4.2 *i) Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv, so ist auch $f{-}1 : W \to V$ linear*

ii) Mit $g : U \to V$ und $f : V \to W$ ist auch $f \circ g : U \to W$ linear.

Beweis:

i) zz: $f^{-1}(a_1w_1 + a_2w_2) = a_1f^{-1}(w_1) + a_2f^{-1}(w_2)\ \forall a_i \in K, w_i \in W$
setzte: $v_i := f^{-1}(w_1) \in V$, dann rechte Seite $= a_1v_1 + a_2v_2$
andererseits:

$$\begin{aligned} f(a_1v_1 + a_2v_2) &\underset{f \text{ linear}}{=} a_1f(v_1) + a_1f(a_2) \\ &= a_1f\left(f^{-1}(w_1)\right) \\ &= a_1w_1 + a_2w_2 \end{aligned}$$

wende f^{-1} an: $a_1v_1 + a_2v_2 = f^{-1}(a_1w_1 + a_2w_2)$ also linke Seite ebenfalls gleich $a_1v_1 + a_2v_2$

ii)

$$\begin{aligned} f \circ g(a_1v_1 + a_2v_2) &= f(g(a_1v_1 + a_2v_2)) \\ &\underset{g \text{ linear}}{=} f(a_1g(v_1) + a_2g(v_2)) \\ &\underset{f \text{ linear}}{=} a_1f(g(v_1))\, a_2f(g(v_2)) \\ &= a_1(f \circ g)(v_1) + a_2(f \circ g)(v_2) \end{aligned}$$

Definition:

a) Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt ein Isomorphismus von V auf W (zwischen V und W).

b) Zwei K-VR V und W heißten isomorph (im Zeichen $V \cong W$), falls es mind. einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt.

Beachte: (Lemma 2 $\Rightarrow$)

- f Isomorphismus $\Rightarrow f^{-1}$ Isomphismus
- $V \cong W \Rightarrow W \cong V$

- $U \cong V$ und $V \cong W \Rightarrow U \cong W$

Lemma 4.3 *Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus und sei $\{v_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V, dann $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ eine Basis von W*

Beweis: *(für V endlich erzeugt, also Basis $v_1, \ldots, v_n$)*
zz. $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ist Basis von W
sei $w \in W$, setzte $v := f^{-1}(w) \in V$, dann haben wir eine eindeutige Darstellung $v = a_1w_1 + \ldots + a_nv_n$.
Wende f an: ergibt eindeutige Darstellung $w = f(v) = f(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) \underset{f \text{ linear}}{=} a_1f(v_1) + \ldots + a_nf(v_n)$

Satz 4.4 (Klassifikationssatz für Vektorräume) *Für zwei Vektorräume V und W gilt*

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Insbesondere gilt: $V \cong K^n$ mit $m := \dim V$

Beweis: *(für V und W endlich erzeugt)*

1. Schritt: *Es gelte $V \cong W$, d.h. ex. ein Isomorphismus $f : V \to W$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V, also insbesondere $u = \dim V$*
Lemma 3 $\Rightarrow f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ist Basis von $W \Rightarrow n = \dim W$

2. Schritt: *Sei $u := \dim V$ und $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V.*
dann wissen wir aus Kapitel 2, dass die Abbildung $f : K^n \to V; \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ bijektiv ist.
Unter "Beispielen" nachgerechnet, dass f linear ist, also ist $f : K^n \to V$ ein Isomorph, somit $K^n \cong V$, bzw. $V \cong K^n$

3. Schritt: *Es gelte $\dim V = \dim W =: n$, 2. Schritt $\Rightarrow$ ex. Isomorphismus $\begin{matrix} f : K^n \to V \\ g : K^n \to V \end{matrix} g \circ f^{-1} : V \xrightarrow{f^{-1}} K^n \xrightarrow{g} W$ sicherlich bijektiv.*
Lemma 2 $\Rightarrow g \circ f^{-1}$ ist linear, also ist $g \circ f^{-1} : V \to W$ ein Isomorphismus.

Satz 4.5 *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann gilt:*

i) $ker(f)$ ist Unterraum von V

ii) $im(f)$ ist Unterraum von W.

Beweis:

i) Seien $v_1, v_2 \in ker(f)$, also $f(v_1) = 0 = f(v_2)$, seien $a_1, a_2 \in K$ beliebig, dann $f(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) = a_10 + a_20 = 0$, d.h. $a_1v_1 + a_2v_2 \in ker(f)$

ii) Seien $w_1, w_2 \in im(f)$, also $w_1 = f(v_1)$ für geeigenete $v_i \in V$, dann $a_1w_1 + a_2w_2 = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) = f(a_1v_1 + a_2v_2) \in im(f)$

Satz 4.6 *Für eine beliebige Abbildung $f : V \to W$ gilt*

$$f\ injektiv \Leftrightarrow ker(f) = \{0\}$$

Beweis: *"$\Rightarrow$" Sei $v \in ker(f)$, dann haben die Vektoren V und 0 das gleiche Bild $f(v) = 0 = f(0)$*
$f\ injektiv \Rightarrow v = 0$
"$\Leftarrow$" $v_1, v_2 \in V$ beliebig mit $f(v_1) = f(v_2)$, dann $f(v_1 - v_2) \overset{f\ linear}{=} f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in ker(f)$
per Annahme gilt $v_1 - v_2 = 0$, also $v_1 = v_2$

Satz 4.7 *Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt*

$$\dim V = \dim ker(f) + \dim im(f)$$

Beweis: *Sei $v_1, \ldots, v_s$ eine Basis vom $ker(f)$. Sei $w_1, \ldots, w_r$ eine Basis von $im(f)$*
zz: $s + r = \dim V$
wähle Vektoren $v_{s+1}, \ldots, v_{s+r} \in V$ mit $f(v_{s+j}) = w_j\ \forall 1 \le j \le r$
genauere Beh.: $v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_{s+r}$ ist eine Basis von V.
Sei $v \in V$ beliebig, dann $f(v) \in im(f)$, also $f(v) = b_1w_1 + \ldots + b_rw_r$ eindeutige Darstellung.
setzte $v' : b_1v_{s+1} + \ldots + b_rv_{s+r} \in V$
beachte:

$$\begin{aligned} f(v - v') &= f(v) - f(v') \\ &= f(v) - f(b_1v_{s+1} + \ldots + b_rv_{s+r}) \\ &= f(v) - (b_1f(v_{s+1}) + \ldots + b_rf(v_{s+r})) \\ &= f(v) - (b_1w_1 + \ldots + b_rw_r) = 0 \end{aligned}$$

also $v - v' \in ker(f)$, somit eindeutige Darstellung

$$v - v' = a_1v_1 + \ldots + a_sv_s$$

Insgesamt: $v = a_1v_1 + \ldots + a_sv_s + b_1v_{s+1} + \ldots + b_rv_{s+r}$ eindeutige Darstellung.

Corollar 4.8 *Sei $f : V \to W$ linear und V, W endlich erzeigt, dann gilt*

i) f injektiv $\Rightarrow \dim V \le \dim W$

ii) f *surjektiv* $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$

Beweis:

i) f *injektiv* $\Rightarrow \dim(ker(f)) = 0$
Satz 7 $\Rightarrow \dim V = \dim im(f) = W$

ii) f *surjektiv* $\Rightarrow im(f) = W$
$\Rightarrow \dim im(f) = \dim W$
Satz 7 $\Rightarrow \dim V = \dim ker(f) + \dim W \geq \dim W$.

Corollar 4.9 *Sei* $f : V \to W$ *eine lineare Abbildung und gelte* $\dim V = \dim W < \infty$. *Dann sind äquivalent*

i) f *ist injetiv*

ii) f *ist surjektiv*

iii) f *ist ein Isomorphismus*

Beweis: *iii)* $\Rightarrow$ *i) und iii)* $\Rightarrow$ *ii) ist klar*
i) bzw. ii) $\Rightarrow$ *iii) Satz 7 sagt* $\dim ker(f) + \dim im(f) \overset{Vor.}{=} \dim W$
gelte i)
$\Rightarrow ker(f) = \{0\} \Rightarrow \dim W = \dim im(f)$
$\overset{Satz 3.10}{\Rightarrow} im(f) = w \Rightarrow f$ *ist surjektiv und damit bijektiv*

gelte ii)
$\Rightarrow im(f) = W \Rightarrow \dim im(f) = \dim W$
$\Rightarrow \dim W \leq \dim ker(f) + \dim W$
$\Rightarrow \dim ker(f) = \{0\}$
$\Rightarrow \dim ker(f) = \{0\} \overset{Satz 4.6}{\Rightarrow} f$ *ist injektiv und somit bijektiv.*

Satz 4.10 *Seien* V *und* W K*-VR, sei* $v_1, \ldots, v_n$ *eine Basis von* V *und seien* $w_1, \ldots, w_n \in W$ *beliebige vorgegebene Vektoren, dann ex. genau eine lineare Abbildung* $f : V \to W$

Beweis: *Definiere Abbildung* $f : V \to W$; $V = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \mapsto f(v) = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n$
offensichtlich gilt

$$f(v_i) = w_i(\text{ in dem Fall ist } a_i = 1, a_j = 0 \text{ für } j \neq 1)$$

zz: f *ist linear:*

- $f(v+v') = f(v) + f(v')$
  $v' = a'_1v_1 + \ldots + a'_nv_n$, *dann* $(v+v') = (a_1+a'_1)v_1 + \ldots + (a_n+a'_n)v_n$
  nun per Def. $f(v+v') = (a_1+a'_1)w_1 + \ldots + (a_n+a'_n)w_n$
  $f(v) = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n$
  $f(v') = a'_1w_1 + \ldots + a'_nw_n$
  auf der rechten Seite oberste LK [3] *= Summe der beiden unteren LKs*

- $f(cv) = cf(v)\ \forall c \in K$
  dann $cv = ca_1v_1 + \ldots + ca_nv_n$
  also $f(cv) = ca_1w_1 + \ldots + ca_nw_n = c(a_1w_1 + \ldots + a_nw_n) = cf(v)$
  dies zeigt Existenz für Eindeutigkeit
  $f(v) = f(a_1v_1 + \ldots a_nv_n) \overset{f\ linear}{\longrightarrow} a_1f(v_1) + \ldots + a_nf(v_n) \overset{f(v_i)=w_i}{\longrightarrow} a_1w_1 + \ldots a_nw_n$

Beschreibung von linearen Abbildungen durch Matrizen

Notation: Für zwei Vektorräume V und W bezeichne $Hom_K(V,W)$:= Menge aller LA [4] $f : V \to W$

Ab jetzt seien V und W endlich erzeugt.
Fixiere Basen $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $w_1, \ldots, w_n \in W$. Sei $f : V \to W$ eine bel. LA. Schreibe:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

fasse die Koeffizienten $a_{ij} \in K$ zusammen zu einer $m \times n$-Matrix

$$A_f := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Merke: Die Koeffizienten von der Darstellung $f(v_i)$ bilden die i-te Spalte von A_f.

Notation: $M_{m\times n}(K)$ = Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen von K.

Satz 4.11 *Die Abbildung* $Hom_k(V,W) \to M_{m\times n}(K); f \mapsto A_f$ *ist bijektiv.*

Beweis: *folgt unmittelbar aus Satz 10*
Beachte: Die Matrix A_f *bestimmt die Bildvektoren* $f(v_i)$

Injektivität: Seien f und g mit $A_f = A_g \Rightarrow f(v_1) = g(v_1), \ldots, f(v_n) = g(v_n)$ *Satz 10* $\Rightarrow f = g$

[3] Linearkombination
[4] Lineare Abbildung

Surjektivität: Sei $B = (b_{ij}) = M_{m\times n}(K)$ ein bel. Matrix, setze

$$\begin{aligned} U_1 &= b_{11}w_1 + \ldots + b_{m1}w_1 \\ &\vdots \qquad\qquad \in W \\ U_n &= b_{1n}w_n + \ldots + b_{mn}w_n \end{aligned}$$

Satz 10 $\Rightarrow cxf \in Hom_k(V,W)$ mit $f(v_i) = u_i - b_1w_1 + \ldots + b_mw_m \Rightarrow A_f = B$
$f \longmapsto A_f$ legt f eindeutig fest

Frage: Kann man mit Hilfe von A_f eine Abbildungsvorschrift für f gewinnen?

Sei $V \ni v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ mit $x_j \in K$
Schreibe $f(v) = y_1w_1 + \ldots + y_mw_m$ mit $y_i \in K$
rechne:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n\right) = x_1f(v_1) + \ldots + x_nf(v_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_jf(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_ijw_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_ja_{ij}w_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i\right)w_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}x_j\right)w_1 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{m} a_{nj}x_j\right)w_n \end{aligned}$$

Eindeutigkeit der Basisdarstellung $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y_1 &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ &\vdots \\ y_m &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{aligned} \qquad \underline{\text{Ergebnis:}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Abstrakt Formulierung:

$$\begin{array}{ccccc} x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \in & V & \xrightarrow{f} & W & \ni y_1w_1 + \ldots + y_mw_m \\ & i_B \uparrow\cong & & \cong\uparrow i_c & \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in & K^n & \xrightarrow[L_{A_f}]{} & K^n & \ni \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \end{array}$$

ist kommutativ, d.h. $(B = \{v_1, \ldots, v_n\}, c = \{w_1, \ldots, w_n\})$ $f = i_B = i_V = L_{A_f}$

Fragen:

1. Wie drückt sich das Kompositum von LA durch die zugehörige Matrix aus?
2. Wie sieht man der Matrix A_f an, ob f injektiv oder surjektiv oder Isomorphismus ist?
3. Was passiert mit A_f, wenn man andere Basen nimmt?
   Kann man durch "geschickte" Wahl der Basen die Matrix A_f möglichst "einfach" machen?

Satz 4.12 *$Hom_K(V,W)$ ist ein K-VR der Dimension $\dim V$, $\dim W$. Dabei sind die Addition gegeben durch $(f+g)(v) := f(v)+g(v)\ \forall v \in V$ und die Skalarmultiplikation durch $(af)(v) := a \cdot f(v)\ \forall v \in V, a \in K$*

Beweis:

- *$f+g$ ist ebenfalls linear:*

$$\begin{aligned}(f+g)(a_1v_1+a_2v_2) &= f(a_1v_1+a_2v_2)+g(a_1v_1+a_2v_2)\\ &= a_1f(v_1)+a_2f(v_2)+a_1g(v_1)+a_2g(v_2)\\ &= a_1\left(f(v_1)+g(v_2)\right)+a_2\left(f(v_2)+g(v_2)\right)\\ &= a_1(f+g)(v_1)+a_2(f+g)(v_2)\end{aligned}$$

- *af ist ebenfalls linear:*

$$\begin{aligned}(af)(a_1v_1+a_2v_2) &= a\cdot f(a_1v_1+a_2v_2) = a\left(a_1f(v_1)+a_2f(v_2)\right)\\ &= a\cdot a_1\cdot f(v_1)+a\cdot a_2\cdot f(v_2) = a_1\left(a\cdot f(v_1)\right)+a_2\left(a\cdot f(v_2)\right)\\ &= a_1(af)(v_1)+a_2(af)v_2\end{aligned}$$

Nachrechnen der Axiome exemplarisch für zwei: Assoziativität der Addition:

$$\begin{aligned}\left[(f+g)+h\right](v) &= (f+g)(v)+h(v) = \left(f(v)+g(v)\right)+h(v)\\ &\overset{\text{Assoziativität in } W}{=} f(v)+\left(g(v)+h(v)\right) = f(v)+(g+h)(v)\\ &= \left[f+(g+h)\right](v)\\ &\Rightarrow\quad (f+g)+h = f+(g+h)\end{aligned}$$

Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}\left[(a+b)f\right](v) &= (a+b)f(v) \overset{\text{Distributivgesetz in } W}{=} a\cdot f(v)+b\cdot f(v) = (af)(v)+(bf)(v)\\ &= (af+bf)(v)\\ &\Rightarrow\quad (a+b)f = af+bf\end{aligned}$$

Übrigens:

- Nullelement in $Hom_k(V,W)$ = Nullabbildng $0(v) := 0\ \forall v \in V$
- (-f)(v) = -f (v) $\forall v \in V$

für Dimensionsformel seien V und W endlich erzeugt.
zwei alternative Beweise:

1. (direkter Beweis durch Angabe einer Basis)
   wähle Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W.
   $\forall 1 \leq j_0 \leq n$ und $1 \leq i_0 \leq m$ existiert nach Satz 10 genau eine lineare Abbildung $f_{i_0 j_0} : V \to W$ mit $f_{i_0 j_0}(v_j) := \begin{cases} w_{i_0}, & \text{für } j = j_0 \\ 0, & \text{für } j \neq j_0 \end{cases}$
   Behauptung: Die m linearen Abbildungen $f_{i_0 j_0}$ bilden eine Basis von $Hom_k(V,W)$
   genauer: $f \in Hom_k(V,W)$ dazu haben wir die Matrix $A_f = (0_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ bzgl. der gewählten Basen.
   es gilt
   $$f = \sum_{1\leq j_0 \leq n \; j \leq i_0 \leq m \leq m} a_{i_0 j_0} f_{i_0 j_0}$$

2. Benutze nachfolgende Bemerkung und Satz 11
   Bemerkung:
   (i) $M_{m\times n}(K)$ ist ein K-Vektorraum bzgl.
   $$(a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} := (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$$
   $$c\,(a_{ij})_{ij} := (ca_{ij})_{ij}$$
   (ii) Die Abbildung $Hom_K(V,W) \overset{\cong}{\to} M_{m\times n}(K)$ ist ein Isomorphismus $f \mapsto A_f$

Beweis:

(i) $M_{m\times n}(K) \cong K^{mn}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist Isomorphismus

(ii) wissen schon aus Satz 11, dass die Abbildung bijektiv ist, bleibt zz. dass die Abbildung linear ist.
nach wie vor $v_1 \ldots, v_n$ Basis von V, $w_1, \ldots, w_m$ Basis von W
seien $f, g \in Hom_K(V,W) \rightsquigarrow A_f(a_{ij}), Ag = (b_{ij})$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, g(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$$

dann $(f+g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m (a_i j + b_{ij}) w_j$
$\Rightarrow A_{f+g} = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} = A_f + A_g$
außerdem $(cf)(v_j) = cf(v_i) = c\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m (ca_{ij}) w_i \Rightarrow A_{cf} = cA_f$

Definition: *Eine lineare Abbildung $L : V \to K$ heißt eine Linearform (auf V)*
$V^k = Hom_K(V,K)$ heißt Dualraum von (zu) V
Wissen schon aus Satz 12: $\dim V^* = \dim V$
Sei V endlich erzeugt:

Menge	$\longrightarrow$	Menge
Alle Unterräume von V	$\longleftarrow$	alle Unterräume von V^*
U	$\longmapsto$	$U^\perp$
${}^\perp L$	$\longleftarrow$	L

Diese beiden Abbildung sind invers zueinander.

Satz 4.13 *Sei V endlich erzeugt und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist*

$$U^\perp := \{L \in V^* L(0) = 0 \ \forall u \in U\} \ (\Leftrightarrow L(U) = \{0\} \Leftrightarrow U \subseteq ker(L))$$

Ein Unterraum von V^* und es gilt $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$

Beweis: *1. Schritt: $U^\perp$ ist Unterraum. Seien $L_1, L_2 \in U^\perp$, $L_1(u) = L_2(u) = 0$ für alle $u \in U$, denn $(a_1 L_1 + a_2 L_2)(u) = (a_1 L_1)(u) + (a_2 L_2)(u) = a_1 L_1(u) + a_2 L_2(u) = 0$ für alle $u \in U$*
$\Rightarrow a_1 L_1 + a_2 L_2 \subseteq U^\perp$
2. Schritt: Wähle ein Komplement $U' \subseteq V$ zu U, also $V = U \oplus U'$, bzw $V = U + U', U \cap U' = \{0\}$
wissen: $\dim U + \dim U' = dim V$
betrachte Abbildung $Hom_K(V,K) = V^* \supseteq U^\perp \xrightarrow{r} (U')^* = Hom_K(U',K)$ $L \to L \setminus U' :=$ Einschränkung von Lauf U.

- r ist eine Lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
[r(a_1 L_1 + a_2 L_2)](u') &= (a_1 L_1 + a_2 L_2)(u') = a_1 L_1(u') + a_2 L_2(u') \\
&= a_1(r(L_1)(u') + a_2(r(L_2)(u')) = (a_1 r(L_1))(u') + (a_2 r(L_2))(u') \\
&= (a_1 r(L_1) + a_2 r(L_2))(u') \ \forall u \in U \\
&\Rightarrow r(a_1 L_1 + a_2 L_2) = a_1 r(L_1) + a_2 r(L_2)
\end{aligned}$$

- r ist bijektiv
- r ist injektiv: sei $l \in U^\perp$ mit $\underset{l|U', d.h. l(u')=0 \ \forall u' \in U'}{r(l) = 0}$
  $l(u) = 0$ für alle $u \in U$

$$\Rightarrow L(v) = L(u) + L(u') = 0 \Rightarrow L = 0$$

- r ist surjektiv: sei $L' : U' \to K$ Linearform vorgegeben (also $L' \in (U')^*$), gesucht $L : V \to K$ mit $\underset{-L(U)=0}{L \in U^\perp}$ und $\underset{-L(U')=L'}{r(L) = L'}$

definiere $L : V \to K$; $v \mapsto L'(U')$ klar aus der Definition $L(U) = 0$ (für $V - U \in U$ ist $u' = 0$ und damit $L'(u') = 0$)
$u + u'$ mit $u \in U$, $u' \in U'$ eindeutig.
bleibt zz L ist linear
$v_1, v_2 \in V$ schreibe $v_1 = u_1 + u_1'$, $v_2 = u_2 + u_2'$ mit $u_1 \in U$, $u_1' \in U'$, dann

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \underset{\in U}{(a_1 u_1 + a_2 u_2)} + \underset{\in U'}{(a_1 u_1' + a_2 u_2')}$$

$$L(a_1 v_1 + a_2 v_2) - L'(a_1 u_1' + a_2 u_2') = a_1 L'(u_1') + a_2 L'(u_2') = a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2)$$

Satz 4.14 *Sei V endlich erzeugt und sei $L \subseteq V^*$ ein UR, dann ist*
$^\perp L = \{v \in V : l(v) = 0 \ \forall l \in L\}$ *ein Unterraum von V mit*

$$\dim L + \dim^\perp L = \dim V \text{ und } {}^\perp(L^\perp) = L$$

Beweis: *1. Schritt:* $U \subseteq {}^\perp(U^\perp)$ *dann sei* $v_0 \in U$.
zz $v_0 \in {}^\perp(U^\perp) = \{v \in V : l(v) = 0 \ \forall l \in U^\perp\}$
also zz. $l(v_0) = 0 \ \forall l \in U^\perp = \{l \in V^* : l(v) = 0 \ \forall v \in U\}$, *aber* $v_0 \in U$, *also* $l(v_0) = 0$

2. Schritt: Sei $l \in V^*$ *eine beliebige Linearform* $\neq 0$, *dann gilt* $\dim(\ker l) = \dim V - 1$. *Denn* $l : V \to K$ *ist surjektiv wegen* $l \neq 0$, *ex.* $v_0 \in V$ *mit* $l(v_0) := a_0 \neq 0$
nun $a \in K$ *beliebig, setzte* $c := a \cdot a_0^{-1}$, *dann* $l(cv_0) = cl(v_0) = a \cdot a_0^{-1} \cdot a_0 = a$
$\dim(\ker l) = \dim V - \dim(im\, l) = \dim V - 1$.

3. Schritt: Seien $v_1, v_2 \in {}^\perp L$, *dann* $l(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 l(v_1) + a_2 l(v_2) = 0 \ \forall l \in L$, *also* $a_1 v_1 + a_2 v_2 \in {}^\perp L$

4. Schritt: Beweis des Satzes per Induktion nach $\dim L$:
Induktionsanfang: $L = \{0\}$, *dann* $^\perp L = V$ *und* $(^\perp L)^\perp = V^\perp = \{0\} = L$ *und* $\dim L + \dim^\perp L = \dim\{0\} + \dim V = \dim V$
Induktionsannahme: Beh. sei richtig für alle Unterräume L der Dimension r
Induktionschluss: Sei $\tilde{L} \subseteq V^*$ *ein Unterrum der Dimension $r + 1$.*

wähle Basis $l_1, \ldots, l_{r+1}$ *von* $\tilde{L}$
setzt $L := \langle l_1, \ldots, l_r \rangle \subseteq \tilde{L}$ *mit* $\dim L = r$
$\overset{IA}{\Rightarrow}$ *a)* $\dim L + \dim^{\perp} L = \dim V$
b) $({}^{\perp}L)^{\perp} = L$
beachte:

$$\begin{aligned}
{}^{\perp}\tilde{L} &= \left\{v \in V : l(v) = 0 \ \forall l \in \tilde{L}\right\} \\
&= \{v \in V : (a_1 l_1 + \ldots + a_{r+1} l_{r+1})(v) = 0 \ \forall a \in K\} \\
&= \{v \in V : l_1(v) = \ldots = l_r(v) = l_{r+1}(v) = 0\} \\
&= \{v \in V : l_1(v) = \ldots = l_r(v) \ \textit{und} \ l_{r+1}(v) = 0\} \\
&= \{v \in V : l(v) = 0 \ \forall l \in L \ \textit{und} \ l_{r+1}(v) = 0\} \\
&= \{v \in^{\perp} L : l_{r+1}(v) = 0\} = \ker({}^{\perp}L \underset{l_{r+1}}{\to} L) =^{\perp} \tilde{L}
\end{aligned}$$

Behauptung: $l_{r+1}|{}^{\perp}L$ *ist nicht die Nullabbildung, aber wäre es die Nullabbildung, so würde folgen* $l_{r+1} \in ({}^{\perp}L)^{\perp} \overset{Ind.Ann.,b}{=} L$
WIDERSPRUCH, da $l_1, \ldots, l_r, l_{r+1}$ *linear unabhängig, also Vorraussetzng des 2. Schritts ist erfüllt und somit*

$$\dim^{\perp} \tilde{L} = \dim(\ker(l_{r+1}|{}^{\perp}L)) = \dim^{\perp} L - 1$$

andererseits $\dim \tilde{L} = \dim L + 1$
nun $\dim \tilde{L} + \dim^{\perp} \tilde{L} = \dim L + 1 + \dim^{\perp} L - 1) \dim V$
wissen schon nach Schritt 1, dass $L \subseteq ({}^{\perp}L)^{\perp}$
also bleibt zu zeigen, dass $\left({}^{\perp}\tilde{L}\right)^{\perp} = \dim \tilde{L}$

$$\dim \left({}^{\perp}\tilde{L}\right)^{\perp} \overset{Satz13}{=} \dim V - \dim^{\perp} \tilde{L} = \dim V - \left(\dim V - \dim \tilde{L}\right) = \dim \tilde{L}$$

∎

Nachtrag: 1. Schritt $L \subseteq ({}^{\perp}L)^{\perp}$
sei $l_0 \in L$ bel., zz. $l_0 \in ({}^{\perp}L)^{\perp} = \{l \in V^* : l({}^{\perp}L) = \{0\}\} = \{l \in V^* = l(v) = 0 \ \forall v \in^* L\}$
aber ${}^{\perp}L = \{v \in V : l(v) = 0 \ \forall l \in L\}$
$l_0 \in L \Rightarrow l_0(v) = 0 \ \forall v \in^{\perp} L$ also für L_0 erfüllt, d.h. $l_0 \in ({}^{\perp}L)^{\perp}$

Corollar 4.15 *Sei* V *endlich erzeugt, für jeden Untervektorraum* $U \subseteq V$ *gilt* ${}^{\perp}(U^{\perp}) = U$

Beweis: $(*) \Rightarrow U \subseteq^{\perp} (U^{\perp})$
also genügt zz, dass $\dim U = \dim ({}^{\perp}U)^{\perp}$

$$\dim^{\perp} (U^{\perp}) \overset{Satz18}{=} \dim V - \dim U^{\perp} \overset{Satz13}{=} \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$$

Lemma 4.16 *Die Abbildung* $K^n \to (K^n)^*; \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto l_{\underline{a}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ *ist ein Isomorphismus*

Beweis: *Dies ist ein Spezialfall der Bemerkung nach Satz 12:*

$$Hom_K(V,W) \to M_{m\times n}(K); f \mapsto A_f$$

angewendet auf $V = K^n; w = k$ *und die Standardbasen* $(K^m)^* = Hom_K(K^m, K) \to K^m; f \mapsto A_f = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_m) \end{pmatrix}$ *ist invers zu der Abbildung in der Behauptung.*

Denn $l_{\underline{a}}(e_1) = l_{\underline{a}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a_1, \ldots, l_{\underline{a}}(e_m) = a_m$

also $f = l_a \mapsto A_f = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$$

beliebig. beachte Spalten $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \vdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$

Definition: (Spaltenrang) *Der Spaltenrang von A ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten der Matrix A (ist eine Zahl zwischen 0 und min(m,n))*

beachte Zeilen $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \vdots, \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in K^n$

Definition: (Zeilenrang) *Der Zeilenrang von A ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilen der Matrix A (mit einer Zahl zwischen 0 und min(m,n))*

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Zeilenrang = 1, Spaltenrang = 1

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Zeilenrang = 2, Spaltenrang = 2

Seien m, n natürliche Zahlen, K ein Körper und $A \in M_{m\times n}(K)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\left(\text{oder kurz } (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = (a_{ij})_{ij}\right)$
Sei $l_A : K^n \to K^m$ die zugeordnete K-lineare Abbildung, d.h.

$$l_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{Def}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ mit } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \in K \tag{1}$$

Feststellung 1: Die Spalten von A bilten ein Erzeugendensystem von $im(l_A)$; insbesondere gilt $\dim(im(l_A)) = Spaltenrang(A)$

Feststellung 2 Für $1 \le i \le m$ sei $\lambda_1 := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ die i-te Zeigle der Matrix A. λ_i kann als Linearform auf K^n aufgefasst werden. (d.h. $\lambda_1 \in (K^n)^*$)

$$\lambda_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{def.}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \in K \tag{2}$$

(Beachte: Dahinter steckt Lemma 16: $(K^n)^* \simeq K^n$)

Sei $L := \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_m \rangle \subseteq (K^n)^*$ der von $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ aufgespannte Unterraum von $(K^n)^*$

Behauptung: ${}^{\perp}L = \ker(l_A)$ (als Untervektorräume von K^n)

Beweis: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in^* L \overset{Def.}{\Leftrightarrow} \forall \lambda \in L : \lambda(x) = 0 \Leftarrow \forall 1 \le i \le m : \lambda_i(x) = 0$

(Für die Implikation "⇒" beachte, dass jedes $\lambda \in L$ geschrieben werden kann als $\lambda = \mu_1\lambda_1 + \ldots + \mu_m\lambda_m$ mit geeigneten Skalaren $\mu_1, \ldots, \mu_m \in K$. Gilt also $\lambda_1(x) = \ldots = \lambda_m(x)$, so auch $\lambda(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i\lambda_i\right)(x) = 0$)
Nach (1) und (2) ist die letzte Aussage äquivalent dazu, dass $x \in ker(L_A)$, dann

$$l_A(x) l_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_m(x) \end{pmatrix}$$

Aus der Behauptung folgt nun

$$\begin{aligned} dim(im(l_A)) &= n - dim(ker(l_A)) \text{ (nach Dimensionsformel aus Satz 7)} \\ &= n - \dim({}^{\perp}L) \text{ (nach Behauptung)} \\ &= \dim(L) \text{ (Satz 14)} \\ &\overset{Def}{=} Zeilenrang(A) \end{aligned}$$

Ende der Feststellung 2

Nach Feststellung 1 gilt $\dim(im(l_A))) = Spaltenrang(A)$. Also gilt

Satz 4.17 *Seien m,n natürliche Zahlen, K ein Körper, dann gilt für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$: Zeilenrang (A) = Spaltenrang (A)* ∎

Definition: Für m, n, K, A wie eben heißt $rang(A) := Spaltenrang(A) (= Zeilenrang(A))$ der Rang von A

Seien V bzw. W endlich erzeugte K-Vektorräume mit Basen $\}v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \ldots, w_m\}$: Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist Matrix $A_f = (a_{ij})_{ij} \in M_{m\times n}(K)$ zugeordnet vermöge $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ (siehe Diskussion von Satz 11)

Satz 4.18 *Es gilt $rang(A_f) = \dim(im(f))$.*

Beweis: *Wir haben schon einmal das folgende kommutative Diagramm betrachtet. hierbei sind φ und ψ Isomorphismen*

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{j=1}^{n} x_j v_j & V & \xrightarrow{f} & W & \sum_{i=1}^{m} y_i w_i \\ \uparrow & \varphi \uparrow & & \uparrow \psi & \uparrow \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & K & \xrightarrow{l_{A_f}} & K^m & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \end{array}$$

(Kommutativität bedeutet: $f \circ \varphi = \psi \circ l_A$
Damit gilt einerseits $im(f)) f(V) = f(\varphi(K^n)) = (f \circ \varphi)(K^n) = (\psi \circ l_{A_f})(K^n)) \psi\left(l_{A_f}(K^n)\right) = \psi(im\left(l_{A_f}\right)$ Andererseits ist die Einschränkung $\psi \left| im\left(l_{A_f}\right) : im\left(l_{A_f}\right) \to \psi\left(im\left(l_{A_f}\right) (\subseteq W)\right)\right.$ von ψ auf den Unterraum $im\left(l_{A_f}\right) \subseteq K^m$ ein Isomorphismus auf ihr Bild
(beachte ψ injektiv $\Rightarrow \psi(l_A)$ ist erst recht injektiv jede Abbildung ist surjektiv auf ihrem Bild
Daher gilt

$$\begin{aligned} \dim(\psi(im(l_A))) &= \dim(im(l_A)) \text{ Satz 4} \\ &= Spaltenrang(A_f) \text{ Feststellung 1} \\ &\overset{Def.}{=} ranf(A_f) \end{aligned}$$

■

Corollar 4.19 *i) f surjektiv* $\Leftrightarrow rang(A_f) = \dim(W) (= Zeilenzahl(A_f))$

ii) f injektiv $\Leftrightarrow rang(A_f) = \dim(V) (= Spaltenzahl(A_f))$

Beweis:

i)

$$\begin{aligned} f surjektiv &\Leftrightarrow im(f) = f(V) = W \\ (Satz 10) &\Leftrightarrow \dim(im(f)) = \dim(W) \\ (Satz 18) &\Leftrightarrow rang(A_f) = \dim(W) \end{aligned}$$

.

ii) f injektiv $\Leftrightarrow ker(f) = 0$ *(Satz 6)*

$$\begin{aligned} \Rightarrow rang(A_f) &\overset{Satz 18}{=} \dim(im(f)) \\ &= \dim(V) - \dim(ker(f)) (Dimensionsformel : Satz 7) \\ &= \dim V, \text{ da } ker(f) = 0 \end{aligned}$$

$\dim(V)$, *da* $ker(f) = 0$

Umgekehrt gilt nach Dimensionsformel stets $\dim(im(f)) = \dim V - \dim(ker(f))$
Gilt also $rang(A_f) = \dim(V)$*, so folgt nach Satz 18:* $\dim(ker(f)) = 0$
Also gilt $ker(f) = 0$*, weshalb f injektiv ist (siehe Satz 6)* ■

Sei $\dim(V) = \dim(W)$, also A_f quadratisch

Corollar 4.20 $f : V \to W$ *(mit V und W endlich erzeugt mit gleicher Dimension) ist ein Isomorphismus* $\Leftrightarrow rang(A_f)$ *ist maximal (d.h. gleich* $\dim(V) = \dim(W)$*)*

Beweis: *Wegen* $\dim(V) = \dim(W)$ *ist nach Corollar 9 f ein Isomorphismus, gdw f surjektiv ist.*
Nach Cor. 19 ist dies gleichbedeutend mit $rang(A_f) = \dim(W)$ ■

Definition: Es sei n eine natürliche Zahl, K ein Körper und $A \in M_{n\times m}(K)$. Die Matrox A heißt regulär, wenn $rang(A) = n$
(Man sagt auch "A hat maximalen / vollen Rang"; nicht reguläre quadratische Matrixen heißen singulär).

Bemerkung: Wir werden erst später Verfahren kennenlernen um den Rang einer Matrix zu bestimmen.
Um die Regularität einer quadratischen Matrix zu untersuchen, werden wir ihr später ein Element des Grundkörpers (die sogenannte Determinante $det(A)$) zuordnen und zeigen

$$\text{A regulär} \Leftrightarrow det(A) \in K^x$$

z.b. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ regulär $\Leftrightarrow det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{def.}{=} ad - bc \in K^x$

Matrizenmultiplikation

Seien m, n, l natürliche Zahlen, K Körper. Betrachte die Abbildung

$$\underset{(A,B)}{M_{m\times n}(K)} \times M_{n\times l}K \to \underset{A\cdot B}{M_{m\times l}K}$$

definiert durch $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{jk})_{jk}$, dann ist $AB = (c_{ik})_{ik}$ mit

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}bjk \text{ für } \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le k \le l \end{matrix}$$

Lemma 4.21 *Seien $U \overset{g}{\to} V \overset{g}{\to} W$ zwei lineare Abbildungen und seien Basen der drei Vektorräume gewählt, für die zugehörigen Matrizen gilt dann*

$$A_{f\circ g} = A_f \cdot A_g$$

Beweis:

dim	n		m		l
	U	$\xrightarrow{g}$	V	$\xrightarrow{f}$	W
	k		j		i
Basen	$u_1, \dots, u_n$		$v_1, \dots v_m$		$w_1, \dots, w_l$
	$A_{f\circ g} = (c_{ki})$		$A_g(b)$		$A_f = (a)$
	$n\times l - Matrix$				
	$(f \circ g)(u_i) = \sum_{k=1}^{l} c_{ki}w_k$				

andererseits ist

$$(f \circ g)(u_i) = f(g(u_i)) = f\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ji}v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} b_{ji}f(v_j) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \sum_{k=1}^{l} a_{kj}w_k = \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}b_{ji}\right)w_k$$

also gilt:

$$\text{Eintrag von } A_{f\circ g} \text{ an Stelle } (k,i) = c_{ki} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \underset{\text{laufen durch k-te Zeile von } A_f}{a_{kj}} \quad \overset{\text{laufen durch i-te Spalte von } A_g}{b_{ji}}}_{=\text{Eintrag von } A_fA_g \text{ an Stelle } (k,i)}$$

Satz 4.22 *Sei A eine $n \times n$-Matrix, dann ist A regulär gdw eine $n \times n$-Matrix B es. mit $AB = BA = E_n$* [5]

Beweis: *Nach Cor. 20 gilt:*

$$\begin{aligned} A \text{ regulär} &\Leftrightarrow l_A : K^n \to K^n \text{ ist ein Isomorphismus} \\ &\Leftrightarrow \text{ex. } lA\text{: } l_B : K^n \to K^n \text{ mit } \underbrace{l_A}_{=l_{AB}} \circ l_B = l_B \circ \underbrace{l_A}_{=l_{BA}} = \underbrace{id_{K^n}}_{=l_{E_n}} \\ &\overset{Satz11}{\Leftrightarrow} \exists B \text{ mit } AB = BA = E_n \end{aligned}$$

Satz 4.23 *Die Menge $Gl_n(K) :=$ alle regulären $n \times n$ Matrizen ist eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation (die allgemeine lineare Gruppe zu n)*

Beweis:

- *E_n ist Einselement*
$$AE_n = A \text{ denn } \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot e_{ji} = a_{ki}$$
$$E_n A = A \text{ analog}$$
- *Existenz des Inversen: Satz 22*
- *Assoziativgesetz: $A, B, C \in Gl_n(K)$*
für zugehörige lA gilt $(l_A \circ l_B) \circ l_C = l_A \circ (l_B \circ l_C)$
Lemma 21: $l_{(AB)C} = l_{A(BC)}$
Satz 11 $\Rightarrow (AB)C = A(BC)$
- *bleibt zu zeigen: mit $A, B \in Gl_n(K)$ gilt auch $AB \cdot Gl_n(K)$*
$$\begin{aligned} A, B \text{ regulär} &\underset{Cor20}{\Rightarrow} l_A, l_B \text{ sind Isomorphismen} \\ &\Rightarrow \underset{Lemma21 l_{AB}}{l_A \circ l_B} \text{ ist Isomorphismus} \\ &\overset{Cor20}{\Rightarrow} AB \text{ ist regulär} \end{aligned}$$

Beispiele:

1. n = 1
$$GL_1(K) = \{a \in K, a \neq 0\} = K^\times$$
[6] (kommutative) Gruppe bzgl. Multiplikation

[5] Einheitsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

[6] $K^\times := K \setminus \{0\}$

2. für $n \geq 2$ ist $GL_n(K)$ nicht kommutativ: n = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrizen sind in jedem Köper K ungleich.

Bemerkung: Zu jedem Vektorraum V ist $GL(V) :=$ Menge aller Isomophimen $f : V \to V$ eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderschaltung von Abbildungen.
Wähle Basis von V. Dann ist $GL(V) \to GL_{\dim V}(K); f \mapsto A_f$ nach Satz 11 bijektiv und nach Lemma 21 ein Homomorphismus von Gruppen
also $GL(V)$ und $GL_{\dim V}(K)$ sind "isomorphe Gruppen".

5 Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = y_n \end{array}$$

lineares Gleichungssystem in n Unbekannten x_j mit m Gleichungen über K

Kurzschreibweise: $A\underline{x} = \underline{y}$ wobei $A := (a_{ij})$, $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Lösungmenge $L_{\underline{y}} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\} \leq K^n$

Satz 5.1 *Äquivalent sind folgende Bedingungen*

i. $A\underline{x} = \underline{y}$ *besitzt mindestens eine Lösung (d.h.* $L_{\underline{y}} \neq 0$*)* $\forall \underline{y} \in K^m$

ii. rang $A = M$ *(insbesondere muss dann* $m \leq n$ *gelten)*

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} A_{\underline{x}} = \underline{y} & \Leftrightarrow & l_A : K^m \to K^n \text{ erfüllt } l_A(\underline{x}) = \underline{y} \\ L_{\underline{y}} \neq 0 & \Leftrightarrow & ex.\underline{x} \in K^n \text{ mit } l_A(\underline{x}) = \underline{y} \\ also : i. & \Leftrightarrow & l_A \text{ ist surjektiv } \Leftrightarrow im(l_A) = K^m \Leftrightarrow \dim im(l_A) = m \end{array}$$

$$\underset{m\times n-Matrix}{A}\ \underset{\in K^n}{\underline{x}} = \underset{\in K^m}{\underline{y}}$$

Bemerkung 5.2 $A\underline{x} = \underline{y}$ *ist lösbar (d.h.* $L_{\underline{y}} \neq 0$*) gdw Rang (A) = rang(A* $\underline{y}$*)*

Beweis: *Sei* $A = (\underbrace{\underline{a}_1|\ldots|\underline{a}_n}_{Spalten\ von\ A})$*, dann "*$A\underline{y}$*"* $= (\underline{a}_1|\ldots|\underline{a}_n|\underline{y}) \in M_{m\times(n+1)}(K)$

$$\begin{array}{rcl} rang\, A & = & \text{Maximalanzahl von linear unabhängigen Spalten unter den } \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in K^n \\ & = & \dim \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_2 \rangle \text{ (Folgerung aus dem Austauschsatz)} \\ rang(A\underline{y}) & = & \dim \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{y} \rangle \end{array}$$

nun: rang(A) = rang(A $\underline{y}$*)* $\Leftrightarrow \dim \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle = \dim \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{y} \rangle$
Diese Unterräume sind ineinander enthalten $\Leftrightarrow \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{y} \rangle \Leftrightarrow \underline{y} \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$,

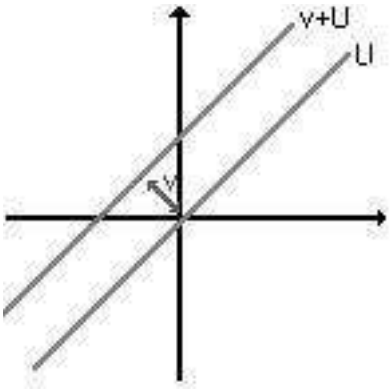
dh. ex $x_1, \ldots, x_n \in K$ *mit* $\underline{y} = x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_n\underline{a}_n \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{y}$ *mit* $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Definition: Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum in einem bel. VR V und sei $v \in V$ ein vorgegebener Vektor, dann heißt die Teilmenge

$$v + U := \{v + u : u \in U\}$$

ein *offner Unterraum* von V oder eine *Nebenklasse* von U in V.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$



1-dim Unterräume = Geraden durch 0
ihere Nebenklasse = sämtliche Geraden

Lemma 5.3 *Für $U \subseteq V$ Unterraum und bel. Vektoren $v, w \in V$ gilt:*

i. $v + U$ *und* $w + U$ *sind gleich oder disjunkt,*

ii. $v + U = w + U$ *gdw* $v - w \in U$

Beweis: *i. / ii. Es gelte* $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$*, dann zz.* $v + U = w + U$
nach Annahme ex. ein x im Durchschnitt, also $x = v + u_1 = w + u_2$ *mit* $u_1, u_2 \in U$
also $v - w = u_2 - u_1 \in U$ *(“⇒” in ii. ist damit schon gezeigt.)*
betrachte bel. Vektor $v + U \ni v + \underbrace{u}_{\in U} = v - w + w + u = w + (v - w) + u = w + \underbrace{u_2 - u_1 + u}_{\in U} \in v + U$

$\to w + U \subseteq v + U \Rightarrow w + U = v + U$*, damit i gezeigt*
diese Rechnung zeigt auch die Implikation “⇐” in ii

Satz 5.4 *i.* $L_0 := \{\underline{x} \in K^n : A\underline{x} = 0\}$ *ist ein Unterraum K^n der Dimension n-rang(A).*

ii. ist $\underline{\xi} \in K^n$ *eine Lösung von* $A\underline{x} = \underline{y}$ *(d.h.* $\underline{\xi} \in L_{\underline{y}}$*), so gilt*

$$L_{\underline{y}} = \xi + L_0$$

Beweis:

i. seien $\underline{\zeta}$ und $\underline{\theta}$ in L_0, d.h. $A\underline{\zeta} = 0$ und $A\underline{\theta} = 0$, dann auch $A(b\underline{\zeta}+c\underline{\theta}) = b(A\underline{\zeta})+c(A\underline{\Theta} = 0$, also $b\underline{\zeta} + c\underline{\theta} \in L_0$, d.h. L_0 ist ein unterraum für die Dimensionsbestimmung betrachte die lA

$$l_A : K^n \to K^m$$

wir wissen

a) $L_0 = \ker(l_A)$

b) $rang(A) = \dim im(l_A)$ *(Feststellung 1)*

c) $n = \dim K^n = \underset{\overset{1)}{=}\dim L_0}{\dim \ker(l_A)} + \sim \underset{\overset{2)}{=}rang(A)}{im(l_A)}$

ii. Sei $\underline{\theta} \in L_0$, also $A\underline{\theta} = 0$, dann

$$A(\underline{\zeta} + \underline{\theta} = A(\underline{\zeta}) + A(\underline{\theta}) = \underline{y} + 0 = \underline{y}$$

d.h. $\underline{\zeta} + \underline{\theta} \in L_{\underline{y}} \Rightarrow \underline{\zeta} + L_0 \subseteq L_{\underline{y}}$, setzte $\underline{\theta} := \underline{\zeta} - \underline{\zeta}$, dann $A\underline{\theta} = A\underline{\zeta} - A\underline{\zeta} = y - \underline{y} = 0 \Rightarrow \theta \in L_0$, also $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}$

Beweis nicht vollständig

Corollar 5.5 *Sei $\underline{\xi} \in K^n$ eine Lösung von $A\underline{x} = \underline{y}$, dann ex. Vektoren $\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_r \in K^n$ mit $r := n - rang(A)$, so dass sämtliche Lösungen von $A\underline{x} = \underline{y}$ gerade die Vektoren*

$$\underline{\xi} + b_1\underline{\xi}_1 + \ldots + b_r\underline{\xi}_r \text{ mit } b_1, \ldots, b_r \in K$$

sind.

Corollar 5.6 *Ist rang(A) = N (dann notwendigerweise: $n \leq m$), so besitzt $A\underline{x} = \underline{y}$ für alle $\underline{y} \in K^m$ höchstens eine Lösung.*

Beweis: $\dim L_0 = n - rang(A) = 0$

Satz 5.7 *Äquivalent sind:*

i. $A\underline{x} = \underline{y}$ besitzt für jedes $\underline{y} \in K^m$ genau eine Lösung, nämlich $\underline{x} := A^{-1}\underline{y}$

ii. $m = n$ und A ist regulär

Beweis: *i. $\Rightarrow$ ii.* $\underset{\text{immer min. eine Lösung}}{\text{Satz 5.1}} \Rightarrow rang(A) = m$

$\underset{\text{immer genau eine Lösung}}{\text{Satz 4}} \Rightarrow L_0 = \{0\} = 0 = \dim L_0 = n - rang(A) = n - m \Rightarrow n = m$ *und rang(A)* $= n = m \Leftrightarrow A$ *ist regulär*

ii. A regulär $\Rightarrow A^{-1}$ ex. mit $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$, wende auf Gleichung $A\underline{x} = \underline{y}$ die Matrix A^{-1} an. Ergibt:

$$\begin{array}{ll} \underline{x} & = \underline{x}(A^{-1})(A\underline{x}) \quad = A^{-1}\underline{y} \\ & = (A^{-1}A)\underline{x} \quad\quad = E_n \end{array}$$

Alle Fragen beantwortet außer der nach einem Algorithmus zur korrekten Berechnung von Lösungen.

6 Basis Wechsel

Zur Erinnerung:
Seien V, W endlich erzeugte Vektorräume,
$v_1, \ldots, v_n$ Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ Basis von W
haben Isomorphismus $Hom_K(V,W) \overset{\cong}{\to} M_{m\times n}(K); f \mapsto A_f$

Nun seien andere Basen $v'_1, \ldots, v'_n$ von V und $w'_1, \ldots, w'_m$ von W gewählt, bekommen entsprechend Bijektion $Hom_K(V,W) \overset{\cong}{\to} M_{m\times n}(K); f \mapsto A_{f'}$

Frage: Wie hängen A_f und $A_{f'}$ zusammen?

Die Basiswechselmatrizen
$x = (\xi_{jk}) \in M_{n\times n}(K)$ gegeben durch $v_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk} \cdot v'_j$
$x = (\zeta_{jk}) \in M_{m\times m}(K)$ gegeben durch $w_i = \sum_{h=1}^{m} \zeta_{hi} \cdot w'_i$

Also:

1. $\underset{v_1,\ldots,v_n}{V} \overset{id_v}{\to} \underset{v'_1,\ldots,v'_n}{V}$ x ist die zugehörige Matrix zu id_v in diesen Basen.

2. $\underset{w_1,\ldots,w_n}{W} \overset{id_w}{\to} \underset{w'_1,\ldots,w'_n}{W}$ z ist die zugehörige Matrix zu id_w in diesen Basen.

3. $\underset{v_1,\ldots,v_n}{V} \underset{X}{\overset{id_v}{\longrightarrow}} \underset{v'_1,\ldots,v'_n}{V} \underset{\widetilde{X}}{\overset{id_v}{\longrightarrow}} \underset{v'_1,\ldots,v'_n}{V}$ nach IV Lemma 21

Feststellung x und z sind reguläre Matrizen (da sie bijektive lineare Abbildungen beschreiben). $X \cdot \widetilde{X}$ beschreibt $V \underset{E_n}{\overset{id_v}{\longrightarrow}} V \Rightarrow x \cdot \widetilde{x} = E_n^* \widetilde{x} = x^{-1}$

betrachte

$$\underbrace{\underset{v'_1,\ldots,v'_n}{V} \underset{X^{-1}}{\overset{id_v}{\longrightarrow}} \underset{v_1,\ldots,v_n}{V} \overset{f}{\underset{A_f}{\longrightarrow}} \underset{w_1,\ldots,w_m}{W} \underset{Z}{\overset{id_w}{\longrightarrow}} \underset{w'_1,\ldots,w'_m}{W}}_{A'_f} \Rightarrow \text{Lemma IV 2.1 } A'_f = Z A_f X^{-1}$$

6.1 (Festellung 1) *Multiplikation einer Matrix mit einer regulären Matrix von links oder von rechts ändert den Reng der Ausgangsmatrix nicht!*

Beweis: *Sei A die Ausgangsmatrix, also die beschreibende Matrix zu $\ell_A : K^n \to K^m$ bzgl. der Standardvektoren, sei $Z \in M_{m\times m}(K)$ irgendeine reguläre Matrix.*

Behauptung:

$$rang\,(ZA) = rang\,(A)$$

Fasse Z als Basiswechselmatrix auf:

$$\begin{array}{c} K^m \xrightarrow{id} K^m \\ (w_1,\ldots,w_n)=e_1,\ldots,e_m \quad w_j' := z\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

für x nehmen wir die Einheitsmatrix $E_n = x$ obige Formel wird beschrieben

$$\begin{array}{c} K^n \xrightarrow{l_A} K^m \\ e_1,\ldots,e_n \quad w_1',\ldots,w_m' \end{array}$$

wird beschreiben durch Matrix ZA um $rang\,(ZA) = \dim\,(im\,(\ell_A)) = rang\,(A)$ für Rechtsmultiplikation analog.

Satz 6.2 *Zu jeder linearen Abbildungen $f : V \to W$ lassen sich Basen $v_1,\ldots,v_n$ von V und $w_1,\ldots,w_m$ von W so wähle, dass die beschreibende Matrix die Gestalt*

$$A_f = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{0} \end{array}\right) \Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

Beweis: $\ker\,(f) \subseteq U$ *ein Unterraum, wähle Basis $v_1,\ldots,v_n$ von $\ker\,(f)$ ergänze zur Basis $v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n$ von V setze, $w_1 := f\,(v_{r+1}),\ldots,w_{n-r} := f\,(v_n) \in W$, beachte:*

- $\dim(\underbrace{\ker\,(f)}_{=r}) + \dim\,(im\,(f)) = \underbrace{\dim\,(V)}_{=n} \Rightarrow \dim\,(im\,(f)) = n - r$
- $f\,(v) = \left\langle \underbrace{f\,(v_1),\ldots,f\,(v_r)}_{=0 \text{ bilden auf Null ab}}, f\,(v_{r+1}),\ldots,f\,(v_n) \right\rangle = \langle w_1,\ldots,w_{n-r}\rangle$

$\Rightarrow w_1,\ldots,w_{n-r}$ *ist eine Basis von $im\,(f)$*

ergänze zur Basis $w_1, \ldots, w_{n-r}, w_{n-r+1}, \ldots, W_m$ von W.
Was ist die Matrix von f bzgl. dieser Basis?

$$A_f = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} f(v_1)=0 & \ldots & f(v_r)=0 & f(v_{r+1})=w_1 & f(v_{r+2})=w_2 & \ldots & f(v_n)=w_{n-r} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & & 0 & & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ & & & \vdots & \vdots & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Corollar 6.3 *Sei $A \in M_{m\times n}$ eine beliebige Matrix, dann existiert eine reguläre Matrix $Z \in M_{m\times m}(K)$ und $x \in M_{n\times n}(K)$*

$$Z \cdot A \cdot X = \left.\begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}\right\} rang(A)$$

Beweis: *Fasse A als beschreibende Matrix von $f = \ell_A : K^n \to K^m$ auf (bgzl. Standardbasen), wähle Basen zu f wie in Satz 2 $\rightsquigarrow$ ergibt beschreibende Matrix*

$$A'_f = \left.\begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}\right\} dim(im(f)),$$

dann $A'_f = Z \cdot A_f \cdot X^{-1}$ für geeignete reguläre Matrizen Z und X.

Spezialfall: *Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. In dieser Situation ist es naheliegend, sowohl für V als Ausgangsvektorraum als auch als Zielvektorraum die gleiche Basis $v_1, \ldots, v_n$ zu verwenden.*

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i \rightsquigarrow A_f = (a_{ij})$ sei $V'_1, \ldots, v'_n$ eine weitere Basis (wie der verwendeten für V in beiden Rollen) $\rightsquigarrow A'_f$, unsere allgemeine Formel spezialisiert sich zu $(X = Z)$

$$A'_f = Z \cdot A_f \cdot Z^{-1}$$

Warnung! Im Allgemeinen lässt sich die Basis $v_1, \ldots, v_n$ nicht so wählen (...), das A_f eine einfache Gestalt wie.

Mit diesem Problem werden wir uns später systematisch befassen (→ Eigenwerttheorie)

Definition: Elementare Zeilenumformungen einer Matrix sind

I. Addition einer Zeile zu einer anderen!

II. Multiplikation einer Zeile mit Skalar $c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ addiert 1 Zeile zur Dritten } \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31}+a_{11} & \ldots & a_{3n}+a_{1n} \\ a_{41} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Lemma 6.4 (Zeilenumformung) *III Vertauschen von zwei Zeilen.*

IV Addition des e-fachen einer Zeile $(e \in K$ *beliebig*$)$ *zu einer anderen!*
Lassen sich durch Kombination von I. und II. erreichen.

Beweis:

$$III \quad \underset{b}{a} \xrightarrow{I} \underset{a+b}{a} \xrightarrow{IV} a - \underbrace{(a+b)}_{a+b} = -b \xrightarrow{I} \underset{(a+b)-b=a}{-b} \xrightarrow{II} \underset{a}{b}$$

$$IV \quad \underset{\substack{o.B.d.A \\ c\neq 0}}{zwei\ Zeilen}\ \underset{b}{a} \xrightarrow[mit\ c\cdot]{II} \underset{b}{c\cdot a} \xrightarrow{I} \underset{b+c\cdot a}{c\cdot a} \xrightarrow[mit\ \cdot c^{-1}]{II} \underset{b+c\cdot a}{a}$$

Lemma 6.5 *Die Zeilenumformungen I. - IV. können durch Multiplikation von links mit einer geeigneten regulären Matrix erreicht werden.*

Es genügt I. und II. zu betrachten (wegen Lemma 4).

Seien $m, n \in \mathbb{N}, K$ Körper und $A \in M_{m\times n}(K)$

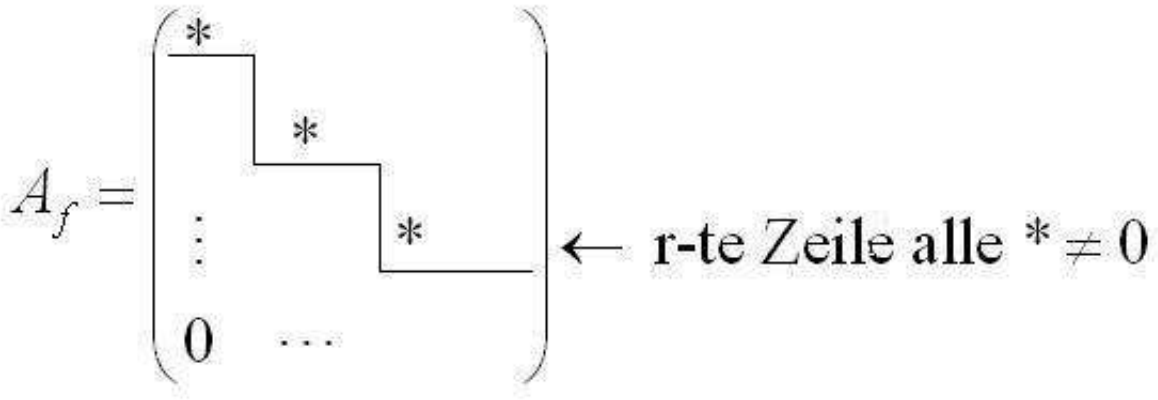
Defintion:
A hat Zeilenstufenform, falls es eine ganze Zahl r gibt mit $0 \leq r \leq m$, so dass mit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$

i. $\forall r \leq i \leq m \forall 1 \leq j \leq n : a_{ij} = 0.$

ii. $\forall 1 \leq i \leq r \exists 1 \leq j \leq n : a_{ij} \neq 0.$

iii. $\forall 1 \leq i \leq r : \min\{j | a_{ij} \neq 0\} \leq \{j | a_{i+1,j} \neq 0\}$

Grafische Veranschauung



Beispiel 1. $A = 0$ (Nullmatrix).
Hier ist $r = 0$ (Bedingung ii. und iii. sind leer, also wahr).

Beispiel 2. $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & \end{pmatrix}$.
$a_{11} \neq 0$, hier ist $r = 1$, Bedingung iii. ist immer noch leer.

Beispiel 3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r = 3.$

Beispiel 4. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
$(n \times n)$ Einheitsmatrix; r=n, so dass Bedingung i. leer ist.

Bemerkung: *Hat $A \in M_{m \times n}(K)$ Zeilenstufenform, so gilt $rang(A) = r$ = Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen.*

Beweis: *Der Fall $A = 0$ ist klar (Nullmatrix).*
Betrachte $rang(A)$ = Zeilenrang (A) = Dimension des von den Zeilen A aufgespannten

Unterraums in K^n. Für $1 \le i \le m$ sei $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ der i-te Zeilenvektor von A. Es gilt $\dim \langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \dim \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$, *da* $a_{r+1} = \ldots = a_m = 0$. *Aber die Vektoren* $\{a_1, \ldots, a_r\}$ *sind linear unabhängig! Sein also* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ *mit* $\lambda_i \cdot a_1 + \ldots + \lambda_r \cdot a_r = 0$ *und sei* $j := \min\{j | a_{1j} \neq 0\}$. *Dann lautet die* $j1$*−te Komponente von* $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot a_i : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot a_{ij_1}$. *Wegen Zeilenstufenform gilt* $a_{ij_1} = 0$ *für* $i \ge 2$. *Der Eintrag lautet also* $\lambda_1 \cdot a_{1j_1}$. *Ist dieser Null, so folgt* $\lambda_n = 0$, *da* $a_{1j_1} \neq 0$ *(nach Wahl von* j_1*). Es folgt* $\lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_r \cdot a_r = 0$ *und man erhält analog* $\lambda_2 = 0$ *etc. Damit sind* $\{a_1, \ldots, a_r\}$ *linear unabhängig und* $rang(A) = \dim \langle a_1, \ldots, a_r \rangle = r$

Satz 6.6 *i. Jede Matrix A kann durch elementare Zeilenumformung auf Zeilenstufenform gebracht werden.*

ii. Jede quadratisch reguläre Matrix kann durch elementare Zeilenumformung in die Einheitsmatrix überführt werden.

Beispiel zu i. $00\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(4)]{III} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(1)]{IV} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(2)]{IV}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(3)]{IV} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Beweis von Satz 6

i. Induktion nach m

$m = 1$, *dann ist A ein Zeilenvektor, hat also Zeilenstufenform* $m \mapsto m+1$. *Sei die Aussage wahr für m (bei beliebigen n) und sei* $A \in M_{(m+1)\times n}(K)$. *Ist* $A = 0$, *so ist nichts zu zeigen (Beispiel 1). Sei also* $A \neq 0$ *und* $A = (a_{ij})_{ij}$. *Setze* $j_1 = \min\{j \exists 1 \le i \le m+1 : a_{ij} \neq 0\}$ *und wähle* $1 \le i \le m+1$ *mit* $a_{ij_1} \neq 0$. *Vertausche Zeile* 1 *und i*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1j_1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m+1,j_1} & \ldots & a_{m+1,n} \end{pmatrix} \xrightarrow[1.\leftrightarrow i.]{III} \begin{matrix} \textit{Multipliziere Zeile 1 mit} \\ (a_{ij_1})^{-1} \textit{ da von Null verschieden.} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1j_1}* & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots & *\vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix} \xrightarrow[(a_{ij_1})^{-1}\cdot(1)]{II} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1* & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots & *\vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix} =: B = (b_{ij})$$

Für $2 \leq i \leq m+1$ addiere das $(-b_{ij_1})$- Fache der 1 Zeile zur i-ten Zeile

$$\xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & * & & * \end{pmatrix} =: \tilde{A}$$

Da $\widetilde{A} \in M_{m\times n}(K)$ lässt sich $\widetilde{A}$ durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen. Die Spalten 1 bis j_1 der erhaltenden Matrix sind nach wie vor Null. Dieselben Umformungen (angewendet auf C) führen C in Zeilenstufenform über.

ii. Sei $A \in M_{m\times n}(K)$ quadratisch regulär. Induktion nach $n(n=1)$. Dann ist (a_{11})...und es ist $a_{11} \neq 0$, da A regulär. Multiplikation mit a_{11}^{-1} führt auf $(1)\,(1\times 1)$ (Einheitsmatrix). $n \mapsto n+1$ Nach i. führen elementare Zeilenumformungen auf eine Matrix A_1 auf Zeilenstufenform. A_1 hat die Gestalt

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ \vdots & & b_{33} & \\ 0 & \cdots & & b_{m} \end{pmatrix}$$

ist auch die Matrix A_1 regulär. Wäre $b_{mn} = 0$, so $rang(A_1) < n$, denn es gäbe eine Nullzeile, dies steht aber im Widerspruch mit der Regularität $rang(A_1) = n$. Dann sind wegen Zeilenstufenform alle $b_{ii} \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$ Multipliziere die i-te Zeile

$$b_{ij}^{-1} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} =: C = (c_{ij})$$

Für $1 \leq i \leq n$ addiere das $(-c_{in})$-Fache der n-ten Zeile zur i-ten Zeile

$$\xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & * & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} =: \tilde{A} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Die Matrix A ist nun regulär! Nun wende die Induktionsvorraussetzung an auf $\widetilde{A}$. Die entsprechenden Umformungen angewendet auf

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0\,0 & \cdots\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

führen auf die Einheitsmatrix.

Corollar 6.7 *st $A \in M_{n\times n}(K)$ regulär, so führen dieselben elementaren Zeilenumformungen, die A in id überführen, umgekehrt id in A^{-1} über.*

Beweis: *Nach Lemma 5 werden die Umformungen durch Linksmultiplikation mit regulären $(m \times n)$ Matrizen $B_1, \dots, B_r$ realisiert. D.h. $B_1, \dots, B_r \cdot A = id$ dann gilt auch $B_1, \dots, B_r \cdot id = A^{-1}$ rechtsmultiplikation mit A^{-1}*

Beispiel (Bestimmung von Inversen)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Betrachte $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ und frühre Zeilenumformung durch, die die linke Hälfte auf Zeilenstufenform bringen

$$(3) - \vec{2} \cdot (1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) 2 \cdot (3) \vec{-} (2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \dots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right)$$

A^{-1} Corollar 7

Machen sie die Probe es kommt die Einheitsmatrix wieder raus.

Bemerkung: *Man kann auch, die Spaltenumformungen betrachten. Diese werden durch Rechtsmultiplikation mit einer regulären Matrix realisiert. Satz 6 und Corollar 7 gelten entsprechend.*

Der Gauss-Algorithmus

Sei $A \cdot \underline{a} = \underline{b}$ ein vorgegebenes lineares Gleichungssystem. Etwa $A \in M_{m\times n}(K)$.
Vorbemerkung: *Sei B eine reguläre $m \times m$ Matrix und setze $\widetilde{A} := BA, \widetilde{\underline{b}} := B\underline{b}$. Dann sind die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme*

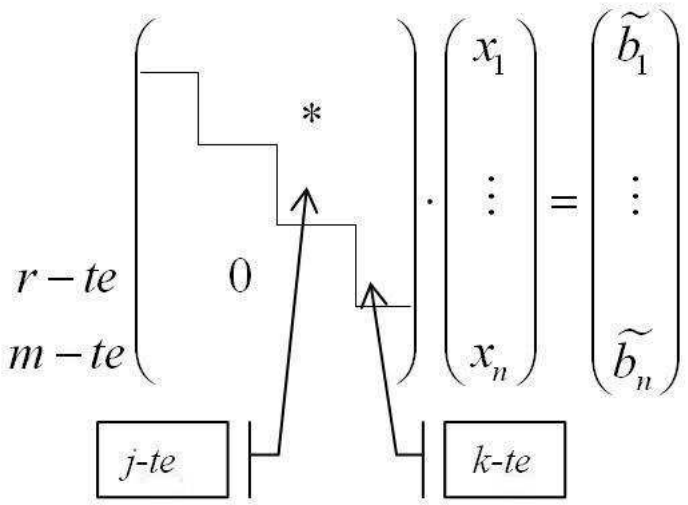
$$A\underline{x} = \underline{b} \text{ und } \widetilde{A}\underline{x} = \widetilde{\underline{b}}$$

Beweis:

$$\begin{array}{lll} A \cdot \underline{x} = \underline{b} \Rightarrow & BA \cdot \underline{x} & = B\underline{b} \quad \Rightarrow \widetilde{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \\ \widetilde{A} \cdot \underline{x} = \widetilde{\underline{b}} \Rightarrow & = \cancel{B}\cancel{B^{-1}}\left(\cancel{B}A\right) = A \cdot \underline{x} & = \underbrace{B^{-1}\widetilde{\underline{b}}}_{=\cancel{B}\cancel{B^{-1}}\left(\cancel{B}\underline{b}\right)=\underline{b}} \quad \Rightarrow A \cdot \underline{x} = \underline{b} \end{array}$$

$B^{-1}\widetilde{A}$

Folgerung: *Elementare Zeilenumformungen von A und simultane $\underline{b}$ ändern die gesuchte Lösungsmenge nicht. (Benutze Lemma 5, Satz 6.1) $\Rightarrow$ wir können A durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen. Simulatan anwenden auf $\underline{b}$*
$\widetilde{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$



$*$ = ungleich Null.

Fall 1
Die $r-te, (r+1)-r, \ldots, m-te$ Zeilen besteht nur aus Einträgen = 0.

1a. mindestens ein Eintrag von den $\widetilde{b}_r, \ldots, \widetilde{b}_m$ ist ungleich $0 \rightsquigarrow$ Gleichungssystem ist unlösbar.

1b. $\widetilde{b}_r = \ldots = \widetilde{b}_m = 0$ betrachte die $r-1-te$ Zeile.

$\widetilde{a}_{r-1,k} \cdot x_k + \widetilde{a}_{r-1,k+1} \cdot x_{k+1} + \ldots + \widetilde{a}_{r-1,n} \cdot x_n = \widetilde{b}_{r-1} \Rightarrow x_k = \frac{\widetilde{b}_{r-1} - \widetilde{a}_{r-1,k+1} \cdot x_{k+1} - \ldots - \widetilde{a}_{r-1,n} \cdot x_n}{\widetilde{a}_{r-1,k}}$ gebe $x_{k+1}, \ldots, x_n$ beliebig vor, berechne x_k (Extrembeispiel : $K = n$, dann $x_n = \frac{b_{r-1}}{\widetilde{a}_{r-1,n}}$) nun betrachte die $r-2$ Gleichung. $\underbrace{\widetilde{a}_{r-2,j}}_{\neq 0 \text{ mit } j<k} \cdot x_j + \widetilde{a}_{r-2,j+1} \cdot x_{j+1} + \ldots + \widetilde{a}_{r-2,n} \cdot x_n = \widetilde{b}_{r-2}$ setze die schon bestimmten $x_1, \ldots, x_n$ ein $x_j = \frac{\widetilde{b}_{r-2} \cdot a_{r-2,j+1} \cdot x_{j+1} - \ldots - \widetilde{a}_{r-2,n} \cdot x_n}{\widetilde{a}_{r-2,j}}$ wähle beliebig (falls $j+1 < k$) die $x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}$ berechne x_j so sukzessive weiter.

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cccc} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & =-2 \\ 3x_1 & -8x_2 & -2x_3 & =4 \\ x_1 & & +4x_3 & =-2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & =-2 \\ 3 & -8 & -2 & =4 \\ 1 & 0 & 4 & =-2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & =-2 \\ 0 & -2 & 1 & =-2 \\ 0 & 2 & 5 & =-4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & =-2 \\ 0 & -2 & 1 & =-2 \\ 0 & 0 & 6 & =-6 \end{array}\right)$$

erste Gleichung ist $-1x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$x_1 = \frac{-2-2x_2-x_3}{-1} = \frac{-2-1+1}{-1}$

$x_2 = 2$

zweite Gleichung ist $-2x_2 + x_3 = -2$ $\Rightarrow x_2 = \frac{-2-(-1)}{-2} = \frac{1}{2}$

unterste Gleichung ist $6x_3 = -6$ $\Rightarrow x_3 = -1$

Also Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechung der Inversen Matrix

Sei A eine reguläre $n \times n$ Matrix. (Satz 6 ii.) $\Rightarrow$ durch elementare Zeilenumformungen kann A in die Einheistmatrix E_n überführt werden.

Behauptung: *Wende die selbe Folge von elementaren Zeilenumformungen auf die Matrix E_n an, dass ergibt die inverse Matrix A^{-1}.*

Beweis: *Die konkrete Folge von Zeielnumformungen wird bewirkt durch Multiplikation von links mit einer regulären Matrix B also $BA = E_n \Rightarrow B = A^{-1}$ andererseits $BE_n = B = A^{-1}$*

Obiges Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; |I + II \cdot (-3) \; \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \; |I + III \; + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4-\frac{4}{3} & 1-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 3-\frac{4}{6} & 1-\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & 1-\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}_{Inverse}$$

$\frac{8}{3} - \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$\frac{2}{3} - \frac{10}{12} + \frac{1}{6} = 0$

$-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$

7 Faktorräume

Sei U ein Unterraum in einem Vektorraum V.
Erinnerung : Die Nebenklasse von U sind die Teilmengen in V von der Form $v + U := \{v + u : u \in U\}$ (Kapitel 5 Lemma 3) ((disjunkt oder gleich) wenn sie sich schneiden sind sie schon gleich)

i. $v_1 + U$ und $v_2 + U$ sind gleich oder disjunkt.

ii. $v_1 + U = v_2 + U \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$

Den Vektor v in $v+U$ nennt man einen Nebenklassenvertreter oder Nebenklassenrepräsentanten
Definition: $\underbrace{V/U}_{V \text{ modulo } U}$:= Menge aller Nebenklassen von U (in V).

V/U ist selbst ein Vektorraum, wie folgt definiert:
Addition:

$$\begin{array}{ccc} V/U \times V/U & \overset{+}{\to} & V/U \\ (v_1 + U, v_2 + U) & \mapsto & (v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \end{array}$$

Ist dies *wohldefiniert*? (Bzw. ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Nebenklassenvertreter?)
„⇐“

$$\begin{array}{l} v_1 + U = v_1' + U \\ v_2 + U = v_2' + U \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} v_1 - v_1' \in U \Rightarrow (v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') \in U \\ v_2 - v_2' \in U \Rightarrow (v_1 + v_2) + U = (v_1' + v_2') + U \end{array}$$

Skalarmultiplikation:
$K \times V/U \to V/U$
$(a,v) \mapsto a \cdot (v+U) := a \cdot v + U$
Ist dies *wohldefiniert*?
$v_1 + U = v_2 + U \Rightarrow_1 -v_2 \in U \Rightarrow a \cdot (v_1 - v_2) \in U \Rightarrow a \cdot v_1 - a \cdot v_2 \Rightarrow a \cdot v_1 + U = a \cdot v_2 + U$

Verifikation der Axiome geht repräsentenweise.

z.B. *Assoziativgesetz*

$$\begin{aligned} [(v_1 + U) + (v_2 + U)] + (v_3 + U) &= ((v_1 + v_2) + U) + (v_3 + U) \\ &= ((v - 1 + v_2) + v_3) + U - (v_1 + (v_2 + v_3)) \cdot U \\ &= (v_1 + U) + ((v_2 + v_3) + U) \\ &= (v_1 + U) + [(v_2 + U) + (v_3 + U)] \end{aligned}$$

Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} a \cdot (v_1 + U) + (v_2 + U) &= a \cdot ((v_1 + v_2) + U) \\ &= a \cdot (v_1 + v_2) + U \\ &= (a \cdot v_1 + a \cdot v_2) + U \\ &= (a \cdot v_1 + U) + (a \cdot v_2 + U) \\ &= a \cdot (v_1 + U) + a \cdot (v_2 + U) \end{aligned}$$

Nullvektor in v/U ist die Nebenklasse $0 + U - (v + U) = (-v) + U$

Satz 7.1 *V/U heißt der Faktorraum (oder auch Quotientenraum) von V nach dem Unterraum U. V/U ist ein K-Vektorraum $U \subseteq V$.*

Bemerkung 7.2 *i. Die Abbildung $pr = pr_U : V \to V/U$ ist linear und surjektiv. (Sie heißt Projektionsabbildung von V auf V/U).*

ii. $\ker(pr_U) = U$

iii. $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$

Beweis:

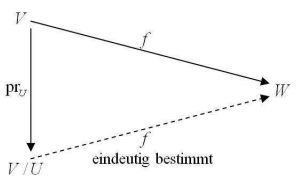
i. *„surjektiv“ ist offensichtlich.*
„linear“ $pr(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2) = (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2) + U = (a_1 \cdot v_1 + U) + (a_2 \cdot v_2 + U) = a_1 \cdot (v_1 + U) + a_2 \cdot (v_2 + U) = a_1 \cdot pr(v_1) + a_2 \cdot pr(v_2)$

ii. $\ker(pr) = \{v \in V : pr(v) = 0\} = \{v \in V : v + U = 0 + U\} = \{v \in V : v \in U\}$

iii. $\dim(V) = \dim(\ker(pr)) + \dim(im(pr)) = \dim(U) + \dim(V/U)$

Lemma 7.3 (Die universelle Eigenschaft) *Sei $f : V \to W$ eine beliebige lineare Abbildung gilt* $\ker(f) \supseteq U$*, so existiert genau eine linearen Abbildung $f : V/U \to W$ mit $f = \overline{f} \circ pr_U$*

Kommutative Diagramm



Beweis: *„Eindeutigkeit“*
$\overline{f}(v+U) = \overline{f}(pr_U(v)) = f(v)$

„Existenz“
definierte Abbildung $\overline{f}: V/U \to U$, $v+U \mapsto f(v)$
ist $\overline{f}$ *wohldefiniert?*

Beweis:
gelte $\underbrace{v_1+U = v_2+U}_{v_1-v_2 \in U}$
zu Zeigen : $f(v_1) = f(v_2)$
nach Voraussetzung gilt
$f(v_1-v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1) = f(v_2)$
$f(v_1) - f(v_2)$

$\overline{f}$ *linear*
$\overline{f}(a_1\cdot(v_1+U)+a_2\cdot(v_2+U)) = f((a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2)+U) = f(a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2) = a_1\cdot f(v_1) + a_2\cdot f(v_2) = a_1\cdot f(v_1+U)+a_2\cdot f(v_2+U)$

Satz 7.4 (Homomorphiesatz) *Für jede lineare Abbildung* $f: V \to W$ *sind die Vektorräume*

$$V/_{\ker(f)} \cong im(f)$$

ist isomorph.

Beweis: *Wende Lemma 3 an auf den Fall* $U := \ker(f)$. *Wir erhalten eine lineare Abbildung* $V/\ker(f) \to W$, $v+\ker(f) \mapsto f(v)$ *offensichtlich gilt* $im(\overline{f}) = im(f)$ *also gibt* $\overline{f}$ *eine surjektive lineare Abbildung* $f: V/\ker(f) \to im(f)$. $\overline{f}$ *ist injektive (also der gesuchte Isomorphismus) zu* $v+\ker(f) \in V/\ker(f)$ *mit* $\overline{f}(v+\ker(f)) = 0$ *also* $v \in \ker(f) \Rightarrow v+\ker(f) = 0+\ker(f)$

Satz 7.5 (Erster Isomorphiesatz) *Seien* U *und* U' *zwei Unterräume des Vektorrraums* V, *dann sind die Faktorräume* $U'/(U'\cap U) \cong (U'+U)/U$ *isomorph.*

Beweis: *Wende Lemma 3 an auf das Kompositum*

$$\begin{array}{ccccc} f: U' & \xrightarrow{\subseteq} & U'+U & \xrightarrow{\mathrm{pr}_U} & (U'+U)/U \\ u' & \longmapsto & & & u'+U \end{array}$$

$\ker(f) = \{u' \in U' : u' + U = 0 + U\} = \{u' \in U' : u' \in U\} = U' \cap U$ *also ist* $\overline{f} : U' / (U' \cap U) \to (U' + U)/U$, $u' + (U' \cap U) \mapsto u' + U$ *eine wohldefinierte lineare Abbildung.*

- $\overline{f}$ ist injektiv : Sei $u' + (U' \cap U) \in \ker(f)$, also $u' + U = 0 + U \Rightarrow u' \in U \cap U' \Rightarrow u' + (U' \cap U) = 0 + (U' \cap U)$
- $\overline{f}$ ist surjektiv : Beliebiger Vektor in $(U' + U)/U$ ist von der Form $(u' + u) + U$ mit $u' \in U', u \in U$, aber $(u' + u) + U = u' + U$, da $(u' + u) - u' = u \in U$, aber $(u' + u) + U = \overline{f}(u' + (U' \cap U))$

$\mathbb{R}^2/U$ = Menge der zu U parallelen Geraden

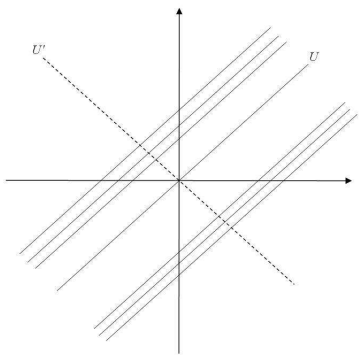


Bild : U' und V/U lassen sich bijektiv aufeinander abbilden.

Corollar 7.6 *Seien U und U' zueinander komplementäre Unterräume von V, dann ist $U' \to V/U$, $u' \mapsto u' + U$ ein linearer Isomorphismus.*

Beweis: *Spezialfall von Satz 5*
$U' \cap U = \{0\}, U' + U = V$

8 Determinanten

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$, gilt : A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Ausblick:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K) \quad \det(A) \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{(-1)^{sgn(\sigma)}}_{\text{Hälfte gerade/Hälfte ungerade}} \prod_{i=1}^{n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot$$

$a_{i\sigma(i)}$

Definition: *Seien $V_1, \dots, V_n$ und W beliebige Vektorräume. Eine Abbildung $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ heißt multilinear, falls sie in jeder Komponente linear ist, d.h. für jedes $1 \leq j \leq n$, beliebige Vektoren $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_j \in V_j, v_n \in V_n$ und beliebigen Skalaren $a, a' \in K$ gilt $b \cdot (v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, a \cdot v_j + a' \cdot v'_j, v_{j+1}, \dots, v_n) = a \cdot b \cdot (v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) + a' \cdot b \cdot (v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v'_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$*

Spezialfälle:

i. $W = k$ (Körper), dann spricht man von Multilinearform.

ii. $u = 2$, dann spricht man von bilinearen Abbildungen.

Erläuterungen:
Für $u = 2$ bedeutet die Bedingung

$$\begin{aligned} b \cdot (a \cdot v_1, a' \cdot v'_1, c \cdot v_2 + c' \cdot v'_2) &= a \cdot b \cdot (v_1, c \cdot v_2 + c' \cdot v'_2) + a' \cdot b \cdot (v'_1, c \cdot v_2 + c \cdot v'_2) \\ &= a \cdot (c \cdot b \cdot (v_1 \cdot v_2) + c' \cdot b \cdot (v_1 \cdot v'_2)) + a' \cdot (c \cdot b \cdot (v'_1, v_2) + c' \cdot b \cdot (v'_1, v'_2) + c' \cdot b \cdot \\ &= a \cdot c \cdot b \cdot (v_1 \cdot v_2) + a \cdot c' \cdot b \cdot (v - 1 \cdot v'_2) + a' \cdot c \cdot b\,(v'_1 \cdot v_2) + a' \cdot c' \cdot b \cdot (v'_1 \cdot v'_2) \end{aligned}$$

$(f : V_1 \times V_n \to W$ linear $f : (a \cdot (v_1 \cdot v_2 + a' \cdot (v'_1 \cdot v'_2))) = a \cdot f(v_1 \cdot v_2) + a' \cdot f(v'_1 \cdot v'_2) = f(a \cdot v_1 + a' \cdot v'_1, a \cdot v_2 + a' \cdot v'_2))$

Beispiel: $b : K^m \times K^m \to K$

$$b : K^m \times K^m \to K; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ :y_m \end{pmatrix} \longmapsto x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$$

Multilinearität:
$b : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W$ $\underset{\text{d.h. „linear in jeder Komponente“}}{\text{multilinear}}$.

Bemerkung: *Ist $b : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ multilinear und $f : W \to W'$ linear so ist auch $f \circ b : V_n \to W'$ multilinear.*

Beweis:

$$\begin{aligned} f \circ b(u_1, \ldots, u_{i-1}, a \cdot v_1 + c \cdot v_i', u_{i+1}, \ldots, u_n) &= f\left(ab(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) + cb(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i', u_{i+1}, .\right. \\ &= a(f \circ b) \cdot (u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) + c(f \circ b) \cdot (u_1, \ldots, u_{i-} \end{aligned}$$

Satz 8.1 *Für $1 \leq m \leq n$ sei $v_1^{(m)}, \ldots, v_{d_m}^{(m)}$ eine vorgegebene Basis von V_m weiter seien $w_{i_1, i_2}, \ldots, {}_{i_n} \in W$ für alle Indizes $1 \leq_{i_1} \leq d_1, 1 \leq_{i_2}, d_2, \ldots, 1 \leq_{i_n}, \leq d_n$ vorgegebene Vektoren. Dann existiert genau eine multilineare Abbildung $b_1 : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ mit $b\left(v_{i_1}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)}, \ldots, {}^{(n)}_{i_n}\right) = w_{i_1, i_2}, \ldots, {}_{i_n}$ für alle $i_1, \ldots, i_n$.*

Beweis: *„Eindeutigkeit“*
Seien $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2, \ldots, u_n \in V_n$ beliebige Vektoren, schreibe $u_m = a_1^{(m)} \cdot v_1^{(m)} + \ldots + a_{d_m}^{(m)} \cdot v_{d_m}^{(m)}$ mit $a_i^{(m)} \in K$, dann

$$\begin{aligned} b \cdot (u_1, \ldots, u_n) &= b \cdot \left(\sum_{i=1}^{d_1} a_i^{(1)} v_i^{(1)}, \ldots, \sum_{i=1}^{d_n} a_i^{(n)} v_i^{(n)} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{d_1} \ldots \sum_{i_n}^{d_n} a_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}^{(n)} \cdot b\left(v_{i_1}^{(1)}, \ldots, v_{i_n}^{(n)}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{d_1} \ldots \sum_{i_n}^{d_n} a_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}^{(n)} \cdot w_{i_1, \ldots i_n} \end{aligned}$$

„Existenz“
Seien $u_1 \in V_1, \ldots, u_n \in V_n$ wie oben, definiere $b(u_1, \ldots, u_n) := \sum_{i_1=1}^{d_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{d_n} a_{i_1}^{(1)} \ldots a_{i_n}^{(n)} \cdot w_{i_1}, \ldots, {}_{i_n}$. z.B. b ist multilinear.
Sei $1 \leq m \leq n$, seien $\widetilde{u}_m = \widetilde{a}_1^{(m)} \cdot v_1^{(m)} + \ldots + \widetilde{a}_{d_m}^{(m)} \cdot v_{d_m}^{(m)} \in V_m$ und seien $c, d \in K$. Nun
$b(u_1, \ldots, u_{i-1}, c \cdot u_m + d \cdot \widetilde{u}_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$

$= \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot \sum_{i_n=1}^{d_n} a_{i_1}^{(1)} \cdot a_{i_{m-1}}^{(m-1)} \cdot \left(c \cdot a_{i_m}^{(m)} + d \cdot \widetilde{a}_{i_m}^{(m)}\right) \cdot a_{i_{m+1}}^{(m+1)} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}^{(n)} \cdot w_{i_1} \cdot \ldots \cdot {}_{i_n}$
$= c \cdot \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_1} a_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i_1}^{(m-1)} \cdot a_{i_m}^{(m)} \cdot a_{i_{m+1}}^{(m+1)} \ldots a_{i_n}^{(n)} \cdot w_{i_1} \cdot \ldots \cdot {}_{i_n}$
$+ d \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_n} a_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i_{m-1}}^{(,-1)} \cdot \widetilde{a}_{i_m}^{(m)} \cdot a_{i_{m+1}}^{(m+1)} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}^{(n)} \cdot w_{i_1} \cdot \ldots \cdot {}_{i_n}$
$= c \cdot b \cdot (u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_n) + d \cdot b \cdot (u_1, \ldots, \widetilde{u}_m, \ldots, u_n)$

Definition: Eine multilineare Abbildung $b : V \times \ldots \times V \to W$ heißt alternierend, falls gilt $b(u_1, \ldots, u_n) = 0$, so bald mindestens zwei Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in V$ gleich sind.

Beispiel: $b : K^2 \times K^2 \longrightarrow K$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot x_2 - x - 2 \cdot x_1$$

Bemerkung: *Ist $b : V \times \ldots \times V \to W$ alternierend multilinear und $f : W \to W'$ linear, so ist $f \circ b$ ebenfalls alternierend multilinear.*

Beweis: *Offensichtlich!*

Bemerkung: Sei $b : V \times \ldots \times V \to W$ multilinear, dann gilt :

i. Ist b alternierend, so gilt $b(u_1, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -b(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.

ii. Ist $2 \neq 0$ in K, so gilt in i. auch die Umkehrung.

Beweis:

i. $0 = b(ldots, \overbrace{u_i + u_j}^{i\text{-te Stelle}}, \ldots, \overbrace{u_i + u_j}^{j\text{-te Stelle}}, \ldots)$.
$= b(\ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + b(\ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) + b(\ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots) + b(\ldots, u_j, \ldots, u_j, \ldots)$

ii. nach Voraussetzung gilt insbesondere, $b(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) = -b(\ldots, \overbrace{u}^{i\text{-te Stelle}}, \ldots, \overbrace{u}^{j\text{-te Stelle}}, \ldots)$
$\Rightarrow \overset{\in K}{2} \cdot b(\underbrace{\ldots, u, \ldots, u, \ldots}_{W}) = 0, 2 \neq 0 \Rightarrow b(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) = 0$ *mit* $u_1, u_2, u_3 \in V$

$$\begin{array}{ccc} b(u_1, u_2, u_3) & \Rightarrow & b(u_3, u_1, u_2) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ -(b(u_3, u_2, u_1) & \Rightarrow & -(-b(u_3, u_1, u_2)) \end{array}$$

Exkurs über Permutationen

Eine Permutation (von n Elementen) ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich selbst.

Schreibweise $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$ z.B. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ von oben $b(u_1, u_2, u_3) =$

$b\left(u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, u_{(3)}\right)$

Beweis:
Gruppe : ✓
Einselemnent : ($\pi = id = \frac{1\ldots n}{1\ldots n}$, inverses Element = inverse Abbildung) $\#S_n = n!$, denn :

$\pi(1)$	gibt es	n	Möglichkeiten
$\pi(2)$	gibt es	$n-1$	Möglichkeiten
$\pi(n)$	gibt es	$n=1$	Möglichkeiten

Bemerkung: Für $n \geq 3$ ist S_n nicht kommutativ!

Definition: *Eine Transposition τ ist eine Permutation, welche genau 2 Zahlen zwischen 1 und n austauscht, d.h. es existiert $1 \leq i \leq j \leq n$, so dass gilt $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für alle $k \neq i, j$*

Schreibweise für Transpositionen $\tau(ij)$

Lemma: *Zu jeder Permuation $\pi \in S_n$ existiert eine geeignete Transposition $\tau_i, \ldots, \tau_r \in S_n$ mit $\pi = \tau_i, \ldots, \tau_r$*

Beweis: *Sei* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & \ldots & n \\ \pi(1) & \ldots & \pi(n-1) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$ *beliebig setze* $\tau_1 := (n\tau\underbrace{(n)})$, *dann ist* $\tau_1 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & \ldots & n \\ \tau_1 \cdot \pi(1) & \ldots & \tau_1 \cdot \pi(n-1) & \ldots & \tau_1 \cdot \pi(n) \end{pmatrix}$ *nun setze* $\tau_2 := ({}_{n-1}\tau\pi\,(n-1))$, *dann* $\tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & \ldots & n \\ \tau_1 \cdot \pi(1) & \ldots & \tau_1 \cdot \pi(n-1) & \ldots & \tau_1 \cdot \pi(n) \end{pmatrix}$, *mache so sukzessive weiter nach endlich vielen Schritten erhalten wir* $\tau_r \cdot \ldots \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$

Beachte: Jede Transposition $\tau(ij)$ hat die Eigenschaft $\tau \cdot \tau = 1$, also $\tau = \tau^{-1}$, also $\pi = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_r$

Beachte: Produkt in S_n ist das Kompositum $\Phi \circ \Psi = \Phi\Psi$

Beispiel: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\tau_1 := (1\ 3)$ $\tau_1\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\tau_2 := (2\ 4)$ $\tau_2\tau_1\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \pi = (1\ 3)(2\ 4)$